

各向异性Sobolev空间中分数阶拟地转方程的稳定性

雒 焕, 孙小春

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年12月16日; 录用日期: 2026年1月16日; 发布日期: 2026年1月27日

摘 要

本文针对二维分数阶表面准地转SQG方程的存在全局解, 在初始数据 θ_0 属于非齐次各向异性Sobolev空间 $H^{0,\alpha}\left(\frac{1}{2} < \alpha < 1\right)$ 条件下, 利用Bony分解理论和Littlewood-Paley分解技术, 证明了该方程解的稳定性。

关键词

各向异性Sobolev空间, 分数阶拟地转方程, Littlewood-Paley分解, Bony分解

Stability Results of Fractional Surface Quasi-Geostrophic Equation in Anisotropic Sobolev Space

Huan Luo, Xiaochun Sun

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: December 16, 2025; accepted: January 16, 2026; published: January 27, 2026

Abstract

We prove the stability of a global solution for the fractional SQG equation under the conditions that the initial data θ_0 belongs to the nonhomogeneous anisotropic Sobolev space $H^{0,\alpha}$ with $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. The main tools employed in our analysis are the Bony decomposition theory and Littlewood-Paley decomposition technique.

Keywords

Anisotropic Sobolev Space, Fractional Quasi-Geostrophic Equation, Littlewood-Paley Decomposition, Bony Decomposition

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

二维分数阶表面准地转 SQG 方程是由三维不可压缩欧拉方程推导出的二维模型。本文重点研究由下式给出的耗散 SQG 方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla \theta + v(-\Delta)^\alpha \theta = 0, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\alpha \in (1/2, 1)$, $v > 0$ 是耗散系数, 而 $\theta = \theta(x, t)$ 是两个空间变量 x 和时间 t 的实标量函数。速度场 u 通过 Riesz 变换确定:

$$u = \left(-\frac{\partial_2}{\sqrt{-\Delta}} \theta, \frac{\partial_1}{\sqrt{-\Delta}} \theta \right) = (-\mathcal{R}_2 \theta, \mathcal{R}_1 \theta) = \mathcal{R}^\perp \theta. \quad (2)$$

显然,

$$\operatorname{div} u = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0. \quad (3)$$

$(-\Delta)^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) 通过 Fourier 变换定义,

$$\widehat{(-\Delta)^\alpha f(\xi)} = |\xi|^{2\alpha} \hat{f}(\xi),$$

其中 $\hat{f}$ 表示[1]的 Fourier 变换。为便于记号, 我们写为 $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} = \Lambda$ 。

分数阶 SQG 方程是对经典 SQG 方程的扩展, 不同于经典拟地转方程, 分数阶 SQG 方程能更精确地描述具有非局部性和依赖性的动力学过程。因此, 各向异性分数阶方程成为捕捉复杂方向系统中的强大工具, 例如大气动力学、多孔介质流动及生物流体力学领域。

分数阶 SQG 方程的过往研究主要集中于各向同性的情形。Kiselev 与 Nazarov 在[2]中取得突破性进展, 证明了临界 SQG 方程的全局正则性。对于次临界分数阶 SQG 方程 ($\alpha < 1$), Constantin 与 Vicol 在[3]中证明了其全局存在性与唯一性。

除解的全局正则性外, 弱解及其对初始数据的依赖性研究亦取得进展。Resnick 探索了经典 SQG 方程的弱解及其长期行为, 该研究至今仍对理解非正则解具有重要影响[4]。

Danchin 与 Paicu 通过推进微积分方法, 在临界空间中深入剖析解的精细特性。这些方法论在研究分数阶 SQG 方程及相关模型时发挥了关键作用。分数阶 SQG 方程的各向异性情形比各向同性情形更为复杂, 这源于其对称性的缺失及额外的正则性要求。近期研究通过用分数阶算子 $(-\Delta)^\alpha$ 替代标准扩散项 $k\partial_{11}\theta$ 和 $k'\partial_{22}\theta$ [5] [6]。

在(1)式中, $(-\Delta)^\alpha \theta$ 取代了经典 SQG 方程中的扩散项, 构建了更一般的理论框架。文章定理以及证明借鉴了文献[7]的主要技术思想和方程中能量估计的方法, 文献[8]提供了处理分数阶算子的分析技巧,

将该思想融入方程中耗散项与非线性项的进一步估计, 因此本文将方法结合在一起, 将其推广应用于各向异性 Sobolev 空间中分数阶拟地转方程的稳定性问题。即如下定理,

定理 1 存在常数 C , 使得对于所有初始数据 $\theta_0 \in H^{0,\alpha}$, 且 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, 满足 $\|\theta_0\|_{H^{0,\alpha}} < \frac{\nu}{C}$, 方程(1)和(2)的解在 $L^\infty([0, \infty]; H^{0,\alpha}) \cap L^2([0, \infty]; H^{1,\alpha})$ 中具有一致有界性。因此, 我们得到

$$\|\theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 + \nu \int_0^t \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}}^2 dt \leq \left(\frac{\nu}{C}\right)^2. \quad (4)$$

2. 预备知识

让我们首先回顾: S 表示 $\mathbb{R}^N$ 上光滑函数构成的 Schwartz 空间, 其中函数的各阶导数在无穷远处衰减; S' 为缓增分布空间, 是 S 在通常配对下的对偶空间。本文利用 Littlewood-Paley 分解详细刻画各向异性 Sobolev 空间 $H^{0,\alpha}$, 分析中主要采用 Bony 分解[9]。设 $\varphi(\xi)$ 为支架包含于环域 $\left\{\xi \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\right\}$ 的光滑函数, χ 为支集包含于球 $\left\{\xi \in \mathbb{R} \mid |\xi| \leq \frac{4}{3}\right\}$ 的光滑函数, 则有

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \chi(\xi) + \sum_{q \in \mathbb{N}} \varphi(2^{-q} \xi) = 1.$$

为方便起见, 我们用 Δ_j 表示非齐次各向异性二进块, 在 x_2 方向上的定义如下:

$$\begin{aligned} \Delta_j a &= 0 & \text{当 } j \leq -2, \\ \Delta_j a &= \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi_2) \hat{a}) & \text{当 } j = -1, \\ \Delta_j a &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j} \xi_2) \hat{a}) & \text{当 } j \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

此外, 我们引入以下低频截断算子:

$$S_q u := \sum_{p \leq q-1} \Delta_p u, \text{ 对所有 } q \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

命题 1 对于 $f \in S'$, 可直接验证如下恒等式成立:

$$\begin{aligned} \Delta_p \Delta_q u &= 0, & \text{若 } |p-q| \geq 2. \\ \Delta_p (S_{q-1} u \Delta_q u) &= 0, & \text{若 } |p-q| \geq 5. \end{aligned} \quad (7)$$

命题 2 (Bernstein 不等式[9]) 设 $k \in \mathbb{N}$ 。设 (R_1, R_2) 满足 $0 < R_1 < R_2$ 。则存在仅依赖于 R_1, R_2 的常数 C , 使得对于任意 $1 \leq a \leq b \leq \infty$ 及任意 $u \in L^a(\mathbb{R}^2)$, 下列不等式成立:

$$\begin{aligned} \text{supp } \hat{u} \subset \mathcal{B}(0, R_1 \lambda) &\Rightarrow \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leq C^{k+1} \lambda^{k+2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} \|u\|_{L^a}, \\ \text{supp } \hat{u} \subset \mathcal{C}(0, R_1 \lambda, R_2 \lambda) &\Rightarrow C^{-k-1} \lambda^k \|u\|_{L^a} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \leq C^{k+1} \lambda^k \|u\|_{L^a}. \end{aligned}$$

定义 1 非齐次 Sobolev 空间 H^α 由以下范数定义:

$$\|a\|_{H^\alpha(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^\alpha |\hat{a}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

其中 $\hat{a}(\xi)$ 表示 a 的 Fourier 变换。

命题 3 (一维非齐次 Sobolev 空间中的乘积法则) 设 $a \in H^{\alpha_0}(\mathbb{R})$ 与 $b \in H^{\alpha_1}(\mathbb{R})$, $-\frac{1}{2} < \alpha_0, \alpha_1 < \frac{1}{2}$,

$\alpha_0 + \alpha_1 > 0$, 则在一维非齐次 Sobolev 空间中, $ab \in H^{\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ 与乘积法则成立如下:

$$\|ab\|_{H^{\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \leq C \|a\|_{H^{\alpha_0}(\mathbb{R})} \|b\|_{H^{\alpha_1}(\mathbb{R})}. \quad (8)$$

定义 2 Sobolev 空间 $H^{\alpha, \alpha'}(\mathbb{R}^2)$ ($\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$) 定义为

$$\|a\|_{H^{\alpha, \alpha'}(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi_1|^2)^\alpha (1 + |\xi_2|^2)^{\alpha'} |\hat{a}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

命题 4 对于 $a \in H^{\alpha, \alpha'}(\mathbb{R}^2)$, Sobolev 范数可等价表示为

$$\|a\|_{H^{\alpha, \alpha'}(\mathbb{R}^2)} = \left(\sum_{j, k \in \mathbb{Z}} 2^{2(j\alpha' + k\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta_j \Delta_k a(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

命题 5 Sobolev 范数也可表示为 L^2 空间与 Sobolev 空间的混合范数, 有

$$\|a\|_{H^{\alpha, \alpha'}(\mathbb{R}^2)} = \left\| 2^{j\alpha'} \|\Delta_j a\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}; H^\alpha(\mathbb{R}_{x_1}))} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})},$$

其中 $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}; H^\alpha(\mathbb{R}_{x_1}))}$ 表示混合范数, 是将 x_2 方向上的 L^2 范数与 x_1 方向上的 Sobolev 范数相结合。

引理 1 [7] 对于 $\alpha' > \frac{1}{2}$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$\|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}; H^\alpha(\mathbb{R}))} \leq C \|a\|_{H^{\alpha, \alpha'}}. \quad (9)$$

引理 2 [10] 设 $a(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数, 设 $a_k(t) = \|\Delta_k a\|_{L^2} \cdot 2^{\frac{k\alpha}{q'}}$ 是 l^2 空间中随时间变化的函数序列, 满足 $\alpha > \frac{1}{2}, 2 < q < \infty, 1 < q' < 2$, 则有

$$\|a_k(t)\|_{l^2} \leq C \|a(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{q}} \|\Lambda^\alpha a(t)\|_{L^2}^{\frac{1}{q'}}, \quad \text{where } \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

引理 3 对满足 $\frac{1}{2} < \alpha' \leq \alpha < 1$ 的实数 α 和 α' , 当 $\theta \in H^{\frac{1}{4}\alpha} \cap H^{\frac{1}{4}\alpha'} \cap H^{0, \alpha'}$ 和 $\Lambda^\alpha \theta \in H^{\frac{1}{4}\alpha} \cap H^{0, \alpha}$, 则存在常数 C 使得

$$\left\| \Delta_j (u \cdot \nabla \theta) \right\|_{L^2} \leq C \cdot d_j \cdot 2^{-j\alpha} \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}\alpha}} \left(\|\theta\|_{H^{0, \alpha'}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{\frac{1}{4}\alpha}}^{\frac{1}{q}} + \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}\alpha'}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0, \alpha}}^{\frac{1}{q'}} \right), \quad (10)$$

其中 $u = (-\mathcal{R}_2 \theta, \mathcal{R}_1 \theta)$ 和 $d_j \in l^1(\mathbb{Z})$ 。

3. 引理 3 证明

为消除各向异性的影响, 我们将估计分为两个部分:

$$F_j^1 = \Delta_j (u_1 \partial_1 \theta), F_j^2 = \Delta_j (u_2 \partial_2 \theta).$$

首先, 我们估计 F_j^1 项

$$\begin{aligned} \|F_j^1\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}; H^{-\frac{1}{4}})} &= \|\Delta_j (u_1 \partial_1 \theta)\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}; H^{-\frac{1}{4}})} \\ &= \|\Delta_j (T_{u_1} \partial_1 \theta + T_{\partial_1 \theta} u_1 + R(u_1, \partial_1 \theta))\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}; H^{-\frac{1}{4}})}. \end{aligned}$$

由(6)式可得,

$$\left\| \left\| \Delta_j T_{u_1} \partial_1 \theta \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \leq \left\| \sum_{|k-j| \leq 2} \left\| \Delta_j (S_{k-1} u_1 \Delta_k \partial_1 \theta) \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})},$$

应用 Sobolev 空间的乘积规则, (8)式可得

$$\left\| \left\| \Delta_j T_{u_1} \partial_1 \theta \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \leq \sum_{|k-j| \leq 2} \left\| \left\| S_{k-1} u_1 \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} \left\| \Delta_k \partial_1 \theta \right\|_{H^0} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})},$$

利用引理 1 和 Bernstein 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned} \left\| \left\| \Delta_j T_{u_1} \partial_1 \theta \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} &\leq \sum_{|k-j| \leq 2} \left\| S_{k-1} u_1 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{x_2}; H^{\frac{1}{4}})} \left\| \Delta_k \partial_1 \theta \right\|_{L^2} \\ &\leq \sum_{|k-j| \leq 2} C \cdot 2^k \left\| u_1 \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha'}} \left\| \Delta_k \theta \right\|_{L^2}, \end{aligned}$$

利用引理 2, 令 $q = \infty, q' = 1$, 则

$$\begin{aligned} \left\| \left\| \Delta_j T_{u_1} \partial_1 \theta \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} &\leq \sum_{|k-j| \leq 2} C \cdot 2^k \left\| u_1 \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha'}} \left\| \Lambda^\alpha \theta \right\|_{L^2} \\ &\leq C \cdot c_j \left\| u_1 \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha'}} \left\| \Lambda^\alpha \theta \right\|_{H^{0, \alpha}} \end{aligned} \quad (11)$$

同样地, 我们可以在 Sobolev 空间中应用引理 1、引理 2 和 Sobolev 空间的乘积规则(8)式, 我们还得到:

$$\begin{aligned} \left\| \left\| \Delta_j T_{\partial_1 \theta} u_1 \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} &\leq \left\| \sum_{|k-j| \leq 2} \left\| \Delta_j (S_{k-1} \partial_1 \theta \Delta_k u_1) \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \\ &\leq \sum_{|k-j| \leq 2} \left\| \left\| S_{k-1} \partial_1 \theta \right\|_{H^0} \left\| \Delta_k u_1 \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \\ &\leq \sum_{|k-j| \leq 2} \left\| \left\| S_{k-1} \partial_1 \theta \right\|_{H^0(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{x_2})} \left\| \left\| \Delta_k u_1 \right\|_{H^{\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \\ &\leq \sum_{|k-j| \leq 2} 2^k \left\| \Delta_k \theta \right\|_{L^2} \left\| \Delta_k u_1 \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}; H^{\frac{1}{4}})} \\ &\leq C \cdot c_j \left\| \Lambda^\alpha \theta \right\|_{H^{0, \alpha'}} \left\| u_1 \right\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha}}. \end{aligned} \quad (12)$$

类似地, 我们应用引理 1、引理 2 和 Bernstein 不等式得到

$$\begin{aligned} \left\| \left\| \Delta_j R(u_1, \partial_1 \theta) \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} &\leq \left\| \sum_{\substack{|j-k| \leq 2 \\ |k-k'| \leq 1}} \left\| \Delta_j (\Delta_k u_1 \Delta_{k'} \partial_1 \theta) \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \\ &\leq \left\| \sum_{\substack{|j-k| \leq 2 \\ |k-k'| \leq 1}} \left\| \Delta_k u_1 \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} \left\| \Delta_{k'} \partial_1 \theta \right\|_{H^0} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \\ &\leq \sum_{\substack{|j-k| \leq 2 \\ |k-k'| \leq 1}} C \cdot 2^k \left\| \Delta_k u_1 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{x_2}; H^{\frac{1}{4}})} \left\| \Delta_{k'} \theta \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}; H^0)} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{|j-k|\leq 2} C \cdot 2^k \|u_1\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha'}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{L^2} \\ &\leq C \cdot c_j \|u_1\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha'}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}}. \end{aligned}$$

因此, 由(11)、(12)和(13)式可得

$$\begin{aligned} \|F_j^1\|_{L^2\left(\mathbb{R}_{x_2}; H^{-\frac{1}{4}}\right)} &= \left\| \Delta_j \left(T_{u_1} \partial_1 \theta + T_{\partial_1 \theta} u_1 + R(u_1, \partial_1 \theta) \right) \right\|_{L^2\left(\mathbb{R}_{x_2}; H^{-\frac{1}{4}}\right)} \\ &\leq C \cdot c_j \|u_1\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha'}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}} + C \cdot c_j \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}} \|u_1\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha}} + C \cdot c_j \|u_1\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha'}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}} \\ &\leq C \cdot c_j \left(\|u_1\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha'}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}} + \|u_1\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}} \right), \end{aligned}$$

其中 c_j 是 $l^2(\mathbb{Z})$ 中的一般元素, 且对于 $j \geq -1, 2^{-j\alpha} \leq c_j$, 且 $c_j^2 = d_j$.

$$\begin{aligned} \left| \langle \Delta_j(u_1 \partial_1 \theta) | \Delta_j \theta \rangle_{L^2} \right| &\leq \left\| \Delta_j(u_1 \partial_1 \theta) \right\|_{L^2\left(\mathbb{R}_{x_2}; H^{-\frac{1}{4}}\right)} \left\| \Delta_j \theta \right\|_{L^2\left(\mathbb{R}_{x_2}; H^{\frac{1}{4}}\right)} \\ &\leq \left\| \Delta_j(u_1 \partial_1 \theta) \right\|_{L^2\left(\mathbb{R}_{x_2}; H^{-\frac{1}{4}}\right)} \cdot c_j \cdot 2^{-j\alpha} \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha}} \\ &\leq C d_j \cdot 2^{-j\alpha} \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha}} \left(\|u_1\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha'}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}} + \|u_1\|_{H^{\frac{1}{4},\alpha}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}} \right). \end{aligned}$$

基于 Riesz 变换 $\mathcal{R}_k$ ($k=1,2$), 其中 $\mathcal{R}_k$ 是满足 $\frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} < 1$ 的 Fourier 乘子, 我们有:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_k \theta\|_{H^{\alpha,\alpha'}} &= \left\| 2^{j\alpha'} \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \widehat{\Delta_j \mathcal{R}_k \theta} \right\|_{L^2} \right\|_{l^2} \\ &= \left\| 2^{j\alpha'} \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j \cdot \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} \hat{\theta} \right\|_{L^2} \right\|_{l^2} \\ &\leq \left\| 2^{j\alpha'} \left\| \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi_j \cdot \hat{\theta} \right\|_{L^2} \right\|_{l^2} = \|\theta\|_{H^{\alpha,\alpha'}}. \end{aligned} \quad (14)$$

接下来, 我们通过 Bony 分解对 $u_2 \partial_2 \theta$ 进行估计, 得到:

$$\begin{aligned} \Delta_j(u_2 \partial_2 \theta) &= \Delta_j \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \Delta_k u_2 \Delta_{k'} \partial_2 \theta \right) \\ &= \Delta_j \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k'=k+2}^{k+1} \Delta_k u_2 \Delta_{k'} \partial_2 \theta + \sum_{k'=k+2}^{+\infty} \Delta_k u_2 \Delta_{k'} \partial_2 \theta \right) \right) \\ &= \Delta_j \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_{k+2} u_2 \Delta_k \partial_2 \theta + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=k+2}^{+\infty} \Delta_k u_2 \Delta_{k'} \partial_2 \theta \right) \\ &= \Delta_j \left(\left(\sum_{k \geq j-3} + \sum_{k < j-3} \right) S_{k+2} u_2 \Delta_k \partial_2 \theta + \sum_{k=-\infty} S_{k-1} \partial_2 \theta \Delta_k u_2 \right) \\ &= \Delta_j \left(\left(\sum_{k \geq j-3} + \sum_{k < j-3} \right) S_{k+2} u_2 \Delta_k \partial_2 \theta + \left(\sum_{|j-k| \leq 4} + \sum_{k < j-4} + \sum_{k > j+4} \right) S_{k-1} \partial_2 \theta \Delta_k u_2 \right) \\ &= \Delta_j \sum_{k \geq j-3} S_{k+2} u_2 \Delta_k \partial_2 \theta + \Delta_j \sum_{k < j-3} S_{k+2} u_2 \Delta_k \partial_2 \theta + \Delta_j \sum_{|j-k| \leq 4} S_{k-1} \partial_2 \theta \Delta_k u_2 \\ &\quad + \Delta_j \sum_{k < j-4} S_{k-1} \partial_2 \theta \Delta_k u_2 + \Delta_j \sum_{k > j+4} S_{k-1} \partial_2 \theta \Delta_k u_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

对于 I_2, I_4, I_5 , 由(7)可得:

$$I_2 = \Delta_j \sum_{k \leq j-3} S_{k+2} u_2 \Delta_k \partial_2 \theta = \Delta_j \sum_{k \leq j-3} \sum_{l \leq k+1} \Delta_l u_2 \Delta_k \partial_2 \theta,$$

这里 $l \leq k+1 < j-2$, 那么 $|j-l| > 2$, 即 $I_2 = 0$

$$I_4 = \Delta_j \sum_{k \leq j-4} S_{k-1} \partial_2 \theta \Delta_k u_2 = \Delta_j \sum_{k \leq j-4} \sum_{l \leq k-2} \Delta_l \partial_2 \theta \Delta_k u_2,$$

这里 $l \leq k-2 \leq j-6$, 那么 $|j-l| \geq 6$, 即 $I_4 = 0$

$$I_5 = \Delta_j \sum_{k > j+4} S_{k-1} \partial_2 \theta \Delta_k u_2 = \Delta_j \sum_{k > j+4} \sum_{l \leq k-2} \Delta_l \partial_2 \theta \Delta_k u_2,$$

这里 $|j-l| > 2$, 即 $I_5 = 0$

所以 I_2, I_4 和 I_5 均为 0, 这意味着

$$F_j^2 = \Delta_j (u_2 \partial_2 \theta) = \Delta_j \sum_{k \geq j-3} S_{k+2} (\partial_2 \theta) \Delta_k u_2 + \Delta_j \sum_{|j-k| \leq 4} S_{k-1} (u_2) \Delta_k \partial_2 \theta = F_j^{2,1} + F_j^{2,2}. \quad (16)$$

因此, 利用(8)式、Hölder 不等式、Bernstein 不等式以及散度为 0 条件 $\partial_2 u_2 = -\partial_1 u_1$,

$$\begin{aligned} \left\| F_j^{2,1} \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}(\mathbb{R}_{x_1})} \Big\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} &= \left\| \sum_{k \geq j-3} \left\| \Delta_j S_{k+2} (\partial_2 \theta) \Delta_k u_2 \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \\ &\leq \sum_{k \geq j-3} \left\| S_{k+2} (\partial_2 \theta) \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} \left\| \Delta_k u_2 \right\|_{H^0} \Big\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \\ &\leq C \cdot 2^{\frac{j}{2}} \sum_{k \geq j-3} \left\| S_{k+2} (\partial_2 \theta) \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} \left\| \Delta_k u_2 \right\|_{H^0} \Big\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} \\ &\leq C \sum_{k \geq j-3} 2^{\frac{j}{2}} \left\| S_{k+2} (\partial_2 \theta) \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} \Big\|_{L^2} \left\| \Delta_k u_2 \right\|_{H^0} \Big\|_{L^2} \\ &\leq C \sum_{k \geq j-3} \sum_{l \leq k+1} 2^{\frac{j}{2}} 2^l \left\| \Delta_l \theta \right\|_{\left(\mathbb{R}_{x_2}, H^{\frac{1}{4}} \right)} \left\| \Delta_k u_1 \right\|_{L^2} \\ &\leq C \sum_{k \geq j-3} \sum_{l \leq k+1} 2^{\frac{j}{2}} 2^{k(l-\alpha)} 2^{l\alpha} 2^{-2k\alpha'} 2^{2k\alpha'} \left\| \Delta_l \theta \right\|_{L^2 \left(\mathbb{R}_{x_2}; H^{\frac{1}{4}} \right)} \left\| \Lambda^\alpha u_1 \right\|_{L^2} \\ &\leq C \sum_{k \geq j-3} 2^{\frac{j}{2}} 2^{k(l-\alpha)} 2^{-2k\alpha'} \left\| \theta \right\|_{H^{\frac{1}{4}-\alpha}} \left\| \Lambda^\alpha u_1 \right\|_{H^{0,\alpha'}}, \end{aligned}$$

其中 $\left\| \Delta_k u_2 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \cdot \left\| \Delta_k u_1 \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

由于 $\alpha' > \frac{1}{2}$, 我们得出结论:

$$\left\| F_j^{2,1} \right\|_{L^2 \left(\mathbb{R}_2; H^{-\frac{1}{4}} \right)} \leq C \cdot d_j \left\| \theta \right\|_{H^{\frac{1}{4}-\alpha}} \left\| \Lambda^\alpha u_1 \right\|_{H^{0,\alpha'}}. \quad (17)$$

随后, 我们估计 $F_j^{2,2}$, 其中 $\theta_j = \Delta_j \theta$. 利用分解 $\Delta_j = (\Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1}) \Delta_j$, 即 $F_j^{2,2} = \Delta_j \sum_{|j-k| \leq 4} S_{k-1} u_2 \Delta_k \partial_2 \theta$.

由于

$$[\Delta_j, S_{k-1} u_2] \Delta_k (\partial_2 \theta) = \Delta_j (S_{k-1} (u_2) \Delta_k (\partial_2 \theta)) - S_{k-1} (u_2) \Delta_j (\Delta_k (\partial_2 \theta)). \quad (18)$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \Delta_j \sum_{|j-k| \leq 4} S_{k-1}(u_2) \Delta_k (\partial_2 \theta) \\
 &= \Delta_j \sum_{|j-k| \leq 4} [\Delta_j, S_{k-1} u_2] \Delta_k \partial_2 \theta + \Delta_j \sum_{|j-k| \leq 4} S_{k-1} ((u_2) \Delta_k (\partial_2 \theta)) \\
 &= \Delta_j \sum_{|j-k| \leq 4} [\Delta_j, S_{k-1} u_2] \Delta_k \partial_2 \theta + \Delta_j \sum_{|j-k| \leq 4} ((S_{k-1} - S_j) u_2 (\Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_j) \Delta_j (\partial_2 \theta)) \\
 &= \Delta_j \sum_{|j-k| \leq 4} [\Delta_j, S_{k-1} u_2] \Delta_k \partial_2 \theta + S_j (u_2) \partial_2 \theta_j + \sum_{|j-k| \leq 1} (S_{k-1} - S_j) u_2 \partial_2 \Delta_k \theta_j.
 \end{aligned} \tag{19}$$

则

$$\begin{aligned}
 \langle F_j^{2,2} | \theta_j \rangle_{L^2} &= \langle S_j (u_2) \partial_2 \theta_j | \theta_j \rangle_{L^2} + \sum_{|j-k| \leq 4} \langle [\Delta_j, S_{k-1} u_2] \Delta_k u_2 \partial_2 \theta | \theta_j \rangle_{L^2} \\
 &\quad + \sum_{|j-k| \leq 1} \langle (S_{k-1} - S_j) u_2 \partial_2 \Delta_k \theta_j | \theta_j \rangle_{L^2} \\
 &= \text{I} + \text{II} + \text{III},
 \end{aligned} \tag{20}$$

其中, 利用分部积分法

$$\begin{aligned}
 \langle S_j (u_2) \partial_2 \theta_j | \theta_j \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} S_j (u_2) \partial_2 \theta_j \cdot \theta_j dx_2 \\
 &= \int_{\mathbb{R}} (\partial_2 S_j (u_2) \cdot \theta_j + S_j (u_2) \cdot \partial_2 \theta_j) \theta_j dx_2 \\
 &= - \int_{\mathbb{R}} \theta_j \partial_2 S_j (u_2) \theta_j dx_2 - \langle S_j (u_2) \partial_2 \theta_j | \theta_j \rangle_{L^2}.
 \end{aligned}$$

所以,

$$\langle S_j (u_2) \partial_2 \theta_j | \theta_j \rangle_{L^2} = -\frac{1}{2} \langle S_j (\partial_2 u_2) \theta_j | \theta_j \rangle_{L^2} = \frac{1}{2} \langle S_j (\partial_1 u_1) \theta_j | \theta_j \rangle_{L^2}.$$

对于 $\text{I} = \langle S_j (u_2) \partial_2 \theta_j | \theta_j \rangle_{L^2}$, 我们可以用类似于 F_j^1 进行估计, 从而得到

$$\langle \theta_j S_j (\partial_1 u_1) | \Delta_j \theta \rangle_{L^2} \leq C \cdot d_j \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha'}} \left(\|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha'}} \|\Lambda^\alpha u_1\|_{H^{0, \alpha}} + \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha'}} \|\Lambda^\alpha u_1\|_{H^{0, \alpha'}} \right). \tag{21}$$

对于 $\text{II} = \sum_{|j-k| \leq 4} \langle [\Delta_j, S_{k-1} u_2] \Delta_k \partial_2 \theta | \theta_j \rangle_{L^2}$, 令 $h = \mathcal{F}^{-1} \varphi$ 和 $h_1(x) = xh(x)$ 。那么,

$$\begin{aligned}
 & [\Delta_j, S_{k-1} u_2] \tilde{\theta}_k(x_1, x_2) \\
 &= \Delta_j S_{k-1} u_2(x_1, x_2) - S_{k-1} u_2 \Delta_j \tilde{\theta}_k(x_1, x_2) \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left[\varphi(2^{-j} y_2) (\xi) \widehat{S_{k-1} u_2} \right] (x_1, x_2) - S_{k-1} u_2(x_1 - x_2) \mathcal{F}^{-1} \left[\varphi(2^{-j} y_2) (\xi) \tilde{\theta}_k(\widehat{x_1, x_2}) \right] \\
 &= 2^j \int_{\mathbb{R}} h(2^j y_2) (S_{k-1} u_2(x_1, x_2 - y_2) - S_{k-1} u_2(x_1, x_2)) \tilde{\theta}_k(x_1, x_2 - y_2) dy_2 \\
 &= -2^j \int_{\mathbb{R} \times [0, 1]} y_2 h(2^j y_2) S_{k-1} \partial_2 u_2(x_1, x_2 - ty_2) \tilde{\theta}_k(x_1, x_2 - y_2) dy_2 dt \\
 &= \int_{\mathbb{R} \times [0, 1]} h_1(2^j y_2) S_{k-1} \partial_1 u_1(x_1, x_2 - ty_2) \tilde{\theta}_k(x_1, x_2 - y_2) dy_2 dt.
 \end{aligned}$$

通过(8), 我们推导出

$$\left\| [\Delta_j, S_{k-1} u_2] \tilde{\theta}_k(\cdot, x_2) \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}} \leq C \int_{\mathbb{R}} |h_1(2^j y_2)| \|S_{k-1} \partial_1 u_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{x_2}; L^2)} \left\| \tilde{\theta}_k(\cdot, x_2 - y_2) \right\|_{H^{\frac{1}{4}}} dy_2.$$

通过对两边取 L^2 范数, 并利用范数的积分被积分的范数所限制的性质, 结合卷积不等式, 我们得到:

$$\left\| \left[\Delta_j, S_{k-1} u_2 \right] \tilde{\theta}_k(\cdot, x_2) \right\|_{H^{-\frac{1}{4}}} \leq C \cdot 2^{-j} \|S_{k-1} \partial_1 u_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{x_2}, L^2)} \|\tilde{\theta}_k\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}, H^{\frac{1}{4}})}.$$

此外, 应用引理 1、引理 2、Bernstein 不等式, 并利用 $|j-k| \leq 4$ 这一条件, 我们得到:

$$\begin{aligned} & \sum_{|j-k| \leq 4} \left\langle \left[\Delta_j, S_{k-1} u_2 \right] \Delta_k \partial_2 \theta \middle| \theta_j \right\rangle_{L^2} \\ & \leq \sum_{|j-k| \leq 4} C \cdot 2^{-j} \|S_{k-1} \partial_1 u_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}_{x_2}, L^2)} \|\theta_k\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}, H^{\frac{1}{4}})} \|\theta_j\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}, H^{\frac{1}{4}})} \\ & \leq \sum_{|j-k| \leq 4} C \cdot 2^{k-j} \|\Delta_k u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{ks} 2^{-ks} \|\theta_k\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2}, H^{\frac{1}{4}})} \cdot \chi_{|j-k| \leq 4} \\ & \leq \sum_{|j-k| \leq 4} C \cdot 2^{k-j} \|\Lambda^\alpha u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \cdot 2^{-j\alpha} \|\theta_k\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha}} \|\theta_j\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha}} \\ & \leq C \cdot d_j \cdot 2^{-j\alpha} \|\Lambda^\alpha u_1\|_{H^{0, \alpha'}}^2 \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha}}^2. \end{aligned}$$

对于 $\text{III} = \sum_{|j-k| \leq 1} \left\langle (S_{k-1} - S_j) u_2 \partial_2 \Delta_k \theta_j \middle| \theta_j \right\rangle_{L^2}$ 中 $(S_{k-1} - S_j) u_2 \partial_2 \Delta_k \theta_j$ 我们可以估计为 $F_j^{2,1}$ 。

此外, 通过应用 Riesz 定理, 我们得到

$$\left| \left\langle \Delta_j (u \cdot \nabla \theta) \middle| \Delta_j \theta \right\rangle_{L^2} \right| \leq C d_j \cdot 2^{-j\alpha} \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha}} \left(\|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0, \alpha'}} \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha}} + \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0, \alpha}} \right).$$

引理 3 已证明。

4. 定理 1 的证明

局部光滑解可简单得到。若存在全局先验界, 则全局解的存在性可通过标准紧性方法推导。首先, 将算子 Δ_j 作用于方程(1),

$$\Delta_j (\partial_t \theta) + \Delta_j (u \cdot \nabla \theta) + \nu \Delta_j (-\Delta)^\alpha \theta = 0, \quad (22)$$

并与 $\Delta_j \theta$ 进行内积运算, 我们得到能量估计式

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta_j \theta\|_{L^2}^2 + \nu \|\Lambda^\alpha \Delta_j \theta\|_{L^2}^2 \leq \left\langle \Delta_j (u \cdot \nabla \theta) \middle| \Delta_j \theta \right\rangle_{L^2}, \quad (1)$$

利用 $\theta_j = \Delta_j \theta$, 并应用引理 3 (其中 $\alpha = \alpha'$), 可得:

$$\frac{d}{dt} \|\Delta_j \theta\|_{L^2}^2 + 2\nu \|\Lambda^\alpha \Delta_j \theta\|_{L^2}^2 \leq C d_j \cdot 2^{-j\alpha} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0, \alpha}} \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha}}^2. \quad (24)$$

两边同时乘以 $2^{j\alpha}$ 并取 l^1 范数, 可得出结论:

$$\frac{d}{dt} \|\theta(t)\|_{H^{0, \alpha}}^2 + 2\nu \|\Lambda^\alpha \theta(t)\|_{H^{0, \alpha}}^2 \leq C \cdot \|\theta\|_{H^{\frac{1}{4}, \alpha}}^2 \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0, \alpha}}. \quad (25)$$

根据 Sobolev 嵌入 $H^{\frac{1}{2}, \alpha} \hookrightarrow H^{\frac{1}{4}, \alpha}$, 我们可以推导出

$$\frac{d}{dt} \|\theta(t)\|_{H^{0, \alpha}}^2 + 2\nu \|\Lambda^\alpha \theta(t)\|_{H^{0, \alpha}}^2 \leq C \|\theta\|_{H^{0, \alpha}} \|\theta\|_{H^{\frac{1}{2}, \alpha}}^2 \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0, \alpha}}. \quad (26)$$

应用插值不等式

$$\|\theta\|_{H^{\frac{1}{2}, \alpha}}^2 \leq C \cdot \|\theta\|_{H^{0, \alpha}} \|\theta\|_{H^{1, \alpha}} \leq C \cdot \|\theta\|_{H^{0, \alpha}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0, \alpha}}, \quad (27)$$

由此可知

$$\frac{d}{dt} \|\theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 + 2\nu \|\Lambda^\alpha \theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 \leq C \|\theta\|_{H^{0,\alpha}} \|\Lambda^\alpha \theta\|_{H^{0,\alpha}}^2.$$

对于所有 $t \in [0, \infty]$, $\|\theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}$ 满足以下全局界限与小性条件:

$$\|\theta(t)\|_{H^{0,\alpha}} < \frac{\nu}{C}.$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \|\theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 + \nu \|\Lambda^\alpha \theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 \leq 0.$$

假设 $t = t^*$, 我们得到 $\|\theta(t^*)\|_{H^{0,\alpha}} = \frac{\nu}{C}$, 并且

$$\int_0^{t^*} \frac{d}{dt} \|\theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 dt + \nu \int_0^{t^*} \|\Lambda^\alpha \theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 dt \leq 0, t \in [0, t^*]. \quad (28)$$

我们得到 $\|\theta(t^*)\|_{H^{0,\alpha}}^2 + \nu \int_0^{t^*} \|\Lambda^\alpha \theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 dt \leq \|\theta(0)\|_{H^{0,\alpha}}^2$, 那么 $\|\theta(t^*)\|_{H^{0,\alpha}} \leq \|\theta(0)\|_{H^{0,\alpha}} < \frac{\nu}{C}$, 这与假设相矛盾。

因此对于 $t \in [0, \infty)$

$$\|\theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 + \nu \int_0^t \|\Lambda^\alpha \theta(t)\|_{H^{0,\alpha}}^2 dt \leq \left(\frac{\nu}{C}\right)^2.$$

因此, 定理 1 的证明至此完成。

基金项目

本研究得到国家自然科学基金(12461020)的支持。

参考文献

- [1] Iorio Jr., R.J. and Iorio, V.d.M. (2001) Fourier Analysis and Partial Differential Equations. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511623745>
- [2] Kiselev, A., Nazarov, F. and Volberg, A. (2006) Global Well-Posedness for the Critical 2D Dissipative Quasi-Geostrophic Equation. *Inventiones Mathematicae*, **167**, 445-453. <https://doi.org/10.1007/s00222-006-0020-3>
- [3] Constantin, P. and Vicol, V. (2012) Nonlinear Maximum Principles for Dissipative Linear Nonlocal Operators and Applications. *Geometric and Functional Analysis*, **22**, 1289-1321. <https://doi.org/10.1007/s00039-012-0172-9>
- [4] Resnick, S.G. (1995) Dynamical Problems in Non-Linear Advective Partial Differential Equations. PhD Thesis, The University of Chicago.
- [5] Constantin, P., Majda, A.J. and Tabak, E. (1994) Formation of Strong Fronts in the 2-D Quasigeostrophic Thermal Active Scalar. *Nonlinearity*, **7**, 1495-1533. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/7/6/001>
- [6] Pedlosky, J. (1987) Geophysical Fluid Dynamics. Springer.
- [7] Jin, H.S., Kwak, M. and Lkhagvasuren, B. (2022) Stability Result for the Surface Quasi-Geostrophic Equations with Horizontal Dissipation in Anisotropic Sobolev Space. *Journal of Mathematical Physics*, **63**, Article ID: 091507. <https://doi.org/10.1063/5.0087229>
- [8] Chemin, J.-Y., Desjardins, B., Gallagher, I. and Grenier, E. (2000) Fluids with Anisotropic Viscosity. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **34**, 315-335. <https://doi.org/10.1051/m2an:2000143>
- [9] Danchin, R. (2005) Fourier Analysis Methods for Pde's. Lecture Notes.
- [10] Wu, H. and Fan, J. (2012) Weak-Strong Uniqueness for the Generalized Navier-Stokes Equations. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 423-428. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.09.028>