

Lambert W函数与指数和线性函数组合方程的求解

王广福^{1,2}, 盛选禹^{1*}, 董盛卉³

¹季华实验室, 广东 佛山

²中国煤炭科学研究院矿山人工智能研究所, 北京

³广东外语外贸大学日语语音文化学院, 广东 广州

收稿日期: 2025年12月18日; 录用日期: 2026年1月20日; 发布日期: 2026年1月28日

摘要

Lambert W函数形式为 $W(x) = xe^x$, 是一类特殊函数, x 在 $[-1/e, 0]$ 区间内, $W(x)$ 有双值, x 在 $[0, +\infty)$ 区间内, $W(x)$ 是单值。利用Lambert W函数, 本文对于指数和线性函数的多个组合方程进行求解, 并得出多种组合方程的标准解。

关键词

Lambert W函数, 指数函数, 线性函数, 函数导数

Solving Equations Combining Exponential and Linear Functions by Lambert W Function

Guangfu Wang^{1,2}, Xuanyu Sheng^{1*}, Shenghui Dong³

¹Jihua Laboratory, Foshan Guangdong

²Institute of Artificial Intelligence in Mining, China Coal Research Institute, Beijing

³Faculty of Japanese Language and Culture, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: December 18, 2025; accepted: January 20, 2026; published: January 28, 2026

Abstract

The Lambert W function, in the form $W(x) = xe^x$, is a special class of functions. $W(x)$ has two values in the interval $[-1/e, 0]$, and is single-valued in the interval $[0, +\infty)$. Using the Lambert W function,

*通讯作者。

文章引用: 王广福, 盛选禹, 董盛卉. Lambert W 函数与指数和线性函数组合方程的求解[J]. 理论数学, 2026, 16(1): 247-255. DOI: 10.12677/pm.2026.161027

this paper solves multiple combined equations of exponential and linear functions, and derives standard solutions for various combined equations.

Keywords

Lambert W Function, Exponential Function, Linear Function, Function Derivative

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. Lambert W 函数

1758 年, Lambert 兰伯特通过对 x 的 q 次幂进行级数展开, 解出了三项式方程 $x = q + x^m$ 。后来, 他将该方程数扩展至 x 的给定次幂[1] [2]。在文献[3]中, 欧拉将兰伯特方程变换成更对称的形式

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha-\beta} \quad (1)$$

用 $x^{-\beta}$ 代替 x , 设 $m = \alpha/\beta$ 且 $q = (\alpha - \beta)v$ 。欧拉版本的兰伯特级数解如下:

$$\begin{aligned} x^n = 1 + nv + \frac{1}{2}n(n + \alpha + \beta)v^2 + \frac{1}{6}n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta)v^3 \\ + \frac{1}{24}n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta)v^4 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

推导完级数后, 欧拉开始研究特殊情况, 首先是 $\alpha = \beta$ 。为了理解在原始三项式方程中的含义, 我们将(1.1)除以 $(\alpha - \beta)$, 然后令 $\beta \rightarrow \alpha$, 得到

$$\log x = vx^\alpha. \quad (3)$$

欧拉注意到, 如果我们能解方程(1.3)中 $\alpha = 1$ 的解, 那么我们就解任意 $\alpha \neq 0$ 的解。为了证明这一点, 将方程(3)乘以 α , 将 $\alpha \log x$ 化为 $\log x^\alpha$, 令 $z = x^\alpha$, 且 $u = \alpha v$ 。我们得到 $\log z = uz$, 它就是 $\alpha = 1$ 的方程(3)。

为了利用式(2)求解该方程, 欧拉首先令 $\alpha = \beta = 1$, 然后将(2)式重写为 $(x^n - 1)/n$ 的级数。接下来, 他令 $n = 0$, 得到左边为 $\log x$, 右边为一个级数形式:

$$\log x = v + \frac{2^1}{2!}v^2 + \frac{3^2}{3!}v^3 + \frac{4^3}{4!}v^4 + \frac{5^4}{5!}v^5 + \dots \quad (4)$$

该级数在 $|v| < 1/e$ 时收敛, 定义一个函数 $T(v)$, 称为树函数[4]。它等于 $-W(-v)$, 其中 $W(z)$ 定义为满足

$$\begin{aligned} W(z)e^{W(z)} &= z, \\ W(z) &= ze^z. \end{aligned} \quad (5)$$

这两个函数有许多应用: 例如, 树木的枚举[4]-[8]; 水波高度的计算[9]; 以及 Pólya 和 Szegő 考虑的问题[10] (问题 III. 209, 第 146 页)。Wright 使用 W 的复数分支和更一般的指数多项式的根来求解线性常系数延迟方程[11]。在[12]中, Fritsch、Shafer 和 Crowley 提出了一种算法, 用于对 $x > 0$ 时 $W(x)$ 的一个分支进行固定精度计算。计算机代数系统 Maple 多年来一直对 W 的这个实数值分支提供任意精度实现, 并

且从 Release 2 开始对所有分支都提供任意精度实现[13]。

将式(5)用函数标准形式写下来, 如式(6)所示。

$$\begin{aligned} W(x) &= xe^x, \\ W(x)e^{W(x)} &= x. \end{aligned} \quad (5)$$

如果 x 为实数, 则当 $-1/e \leq x$ 时, $W(x)$ 有两个可能的实数值(见图 1)。当满足 $-1 \leq W(x)$ 时, 我们将分支记为 $W_0(x)$, 或者直接记为 $W(x)$, 当这样就不会造成混淆时, 满足 $W(x) \leq -1$ 的分支记为 $W_{-1}(x)$ 。 $W_0(x)$ 称为 W 函数的主分支。

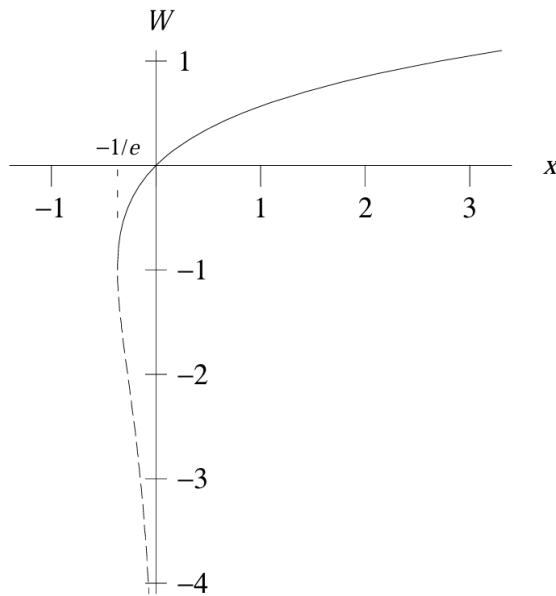


Figure 1. The two real branches of $W(x)$. —, $W_0(x)$; ---, $W_{-1}(x)$

图 1. $W(x)$ 的两个实数分支。——, $W_0(x)$; ---, $W_{-1}(x)$

2. $W(x)$ 函数的导数

$$y = W(x) = W(ye^y)$$

$$x = ye^y$$

两边同时对 x 求导

$$1 = (e^y + ye^y) \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y + ye^y}$$

$$\because x = ye^y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y + x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{W(x)} + x}$$

3. 求解方程 $x^x = 5^{2500}$

$$\ln x^x = \ln 5^{2500}$$

$$x \ln x = 2500 \ln 5$$

$$e^{\ln x} \ln x = 2500 \ln 5$$

两边使用 $W(x)$ 函数

$$W(e^{\ln x} \ln x) = W(2500 \ln 5)$$

$$\ln x = W(2500 \ln 5)$$

$$x = e^{W(2500 \ln 5)}$$

$$2500 = 4 \cdot 5^4$$

$$W(2500 \ln 5) = W(4 \cdot 5^4 \ln 5) = W(5^4 \ln 5^4) = \ln 5^4$$

$$x = e^{\ln 5^4} = 5^4$$

$$x = 5^4$$

通用形式为

$x^x = c$, c 为一常数。

$$x \ln x = \ln c$$

$$e^{\ln x} \ln x = \ln c$$

$$W(e^{\ln x} \ln x) = W(\ln c)$$

$$\ln x = W(\ln c)$$

$$x = e^{W(\ln c)}$$

4. 求解方程 $5^x = 8x + 6$

$$1 = (8x + 6)5^{-x}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{(8x + 6)}{8} 5^{-x}$$

$$-\frac{1}{8} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} = \left(-x - \frac{3}{4}\right) 5^{-x - \frac{3}{4}}$$

$$-\frac{1}{8} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} = \left(-x - \frac{3}{4}\right) e^{(\ln 5)\left(-x - \frac{3}{4}\right)}$$

$$-\frac{1}{8} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} \cdot \ln 5 = \left(-x - \frac{3}{4}\right) e^{(\ln 5)\left(-x - \frac{3}{4}\right)} \cdot \ln 5$$

两边使用 $W(x)$ 函数

$$W\left(-\frac{1}{8} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} \cdot \ln 5\right) = W\left[\left(-x - \frac{3}{4}\right) e^{(\ln 5)\left(-x - \frac{3}{4}\right)} \cdot \ln 5\right]$$

$$\begin{aligned}
W\left(-\frac{1}{8} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} \cdot \ln 5\right) &= \left(-x - \frac{3}{4}\right) \cdot \ln 5 \\
\frac{W\left(-\frac{1}{8} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} \cdot \ln 5\right)}{\ln 5} &= -x - \frac{3}{4} \\
\frac{W\left(-\frac{1}{8} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} \cdot \ln 5\right)}{\ln 5} + \frac{3}{4} &= -x \\
x &= -\frac{W\left(-\frac{1}{8} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} \cdot \ln 5\right)}{\ln 5} - \frac{3}{4} \\
-\frac{1}{8} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} \cdot \ln 5 &= -\frac{1}{8} \sqrt[4]{125} \cdot \ln 5 \approx -0.672685 < -0.3678 \approx \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

说明 W 函数有两个根, 分别求解, 得 $x_1 \approx -0.710139$

$$x_2 \approx -1.8968$$

标准形式为:

$$\begin{aligned}
a^x &= kx + b, \quad a, b, k \text{ 为常数。} \\
1 &= (kx + b) a^{-x} \\
-\frac{1}{k} &= \left(-x - \frac{b}{k}\right) a^{-x} \\
-\frac{1}{k} a^{-b/k} &= \left(-x - \frac{b}{k}\right) a^{-x-b/k} \\
-\frac{1}{k} a^{-\frac{b}{k}} \cdot \ln a &= \left(-x - \frac{b}{k}\right) e^{\left(-x - \frac{b}{k}\right) \ln a} \cdot \ln a \\
W\left[-\frac{1}{k} a^{-\frac{b}{k}} \cdot \ln a\right] &= W\left[\left(-x - \frac{b}{k}\right) e^{\left(-x - \frac{b}{k}\right) \ln a} \cdot \ln a\right] \\
W\left[-\frac{1}{k} a^{-\frac{b}{k}} \cdot \ln a\right] &= \left(-x - \frac{b}{k}\right) \cdot \ln a \\
-x - b &= \frac{W\left[-\frac{1}{k} a^{-\frac{b}{k}} \cdot \ln a\right]}{\ln a} \\
x &= -b - \frac{W\left[-\frac{1}{k} a^{-\frac{b}{k}} \cdot \ln a\right]}{\ln a}
\end{aligned}$$

5. 求解方程 $3x + e^{4x} = 0$

$$e^{4x} = -3x$$

$$1 = -3xe^{-4x}$$

$$\frac{4}{3} = -4xe^{-4x}$$

两边使用 $W(x)$ 函数:

$$W\left(\frac{4}{3}\right) = W(-4xe^{-4x})$$

$$W\left(\frac{4}{3}\right) = -4x$$

$$x = -\frac{1}{4}W\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$x = -0.1693$$

标准形式为:

$$kx + e^{ax} = 0$$

k 和 a 为常数。

$$e^{ax} = -kx$$

$$1 = -kxe^{-ax}$$

$$\frac{a}{k} = -axe^{-ax}$$

两边使用 $W(x)$ 函数:

$$W\left(\frac{a}{k}\right) = W(-axe^{-ax})$$

$$W\left(\frac{a}{k}\right) = W(-axe^{-ax})$$

$$W\left(\frac{a}{k}\right) = -ax$$

$$x = -\frac{1}{a}W\left(\frac{a}{k}\right)$$

6. 求解方程 $3x + e^{7x} = 2$

$$e^{7x} = 2 - 3x$$

$$1 = (2 - 3x)e^{-7x}$$

$$\frac{7}{3} = \left(\frac{14}{3} - 7x\right)e^{-7x}$$

$$\frac{7}{3}e^{\frac{14}{3}} = \left(-7x + \frac{14}{3}\right)e^{-7x + \frac{14}{3}}$$

两边使用 $W(x)$ 函数:

$$W\left(\frac{7}{3}e^{\frac{14}{3}}\right) = W\left[\left(-7x + \frac{14}{3}\right)e^{-7x + \frac{14}{3}}\right]$$

$$W\left(\frac{7}{3}e^{\frac{14}{3}}\right) = -7x + \frac{14}{3}$$

$$-7x = W\left(\frac{7}{3}e^{\frac{14}{3}}\right) - \frac{14}{3}$$

$$x = -\frac{1}{7}W\left(\frac{7}{3}e^{\frac{14}{3}}\right) + \frac{2}{3}$$

$$x \approx 0.08061$$

标准形式为:

$$kx + e^{ax} = b$$

k 、 a 和 b 为常数。

$$e^{ax} = b - kx$$

$$1 = (b - kx)e^{-ax}$$

$$\frac{a}{k} = \left(\frac{ab}{k} - ax\right)e^{-ax}$$

$$\frac{a}{k}e^{\frac{ab}{k}} = \left(\frac{ab}{k} - ax\right)e^{\frac{ab}{k} - ax}$$

两边使用 $W(x)$ 函数:

$$W\left[\frac{a}{k}e^{\frac{ab}{k}}\right] = W\left[\left(\frac{ab}{k} - ax\right)e^{\frac{ab}{k} - ax}\right]$$

$$W\left[\frac{a}{k}e^{\frac{ab}{k}}\right] = \frac{ab}{k} - ax$$

$$-ax = \frac{-ab}{k} + W\left[\frac{a}{k}e^{\frac{ab}{k}}\right]$$

$$x = \frac{b}{k} - \frac{1}{a}W\left[\frac{a}{k}e^{\frac{ab}{k}}\right]$$

7. 求解方程 $x^3 e^{5x} = 27$

$$(x^3 e^{5x})^{1/3} = 27^{1/3}$$

$$xe^{5x/3} = 3$$

$$\frac{5}{3}xe^{5x/3} = 3 \cdot \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3}xe^{5x/3} = 5$$

两边使用 $W(x)$ 函数:

$$W\left(\frac{5}{3}xe^{5x/3}\right) = W(5)$$

$$\frac{5}{3}x = W(5)$$

$$x = \frac{3}{5}W(5) \approx 0.79603$$

标准形式为:

$$x^b e^{ax} = c$$

$$(x^b e^{ax})^{1/b} = c^{1/b}$$

$$xe^{ax/b} = c^{1/b}$$

$$\frac{a}{b}xe^{ax/b} = \frac{a}{b}c^{1/b}$$

两边使用 $W(x)$ 函数:

$$W\left(\frac{a}{b}xe^{ax/b}\right) = W\left(\frac{a}{b}c^{1/b}\right)$$

$$\frac{a}{b}x = W\left(\frac{a}{b}c^{1/b}\right)$$

$$x = \frac{b}{a}W\left(\frac{a}{b}c^{1/b}\right)$$

8. 结论

Lambert W 函数形式为 $W(x) = xe^x$, 利用该函数, 可以对各种指数函数与线性函数的组合方程进行求解。在本论文中, 对于几种组合形式的方程进行了求解, 证明 Lambert W 函数对于这种组合形式的方程都可以进行求解, 并可以给出解的标准形式。同时由于在 $[-1/e, 0]$ 定义域内有两个值, 所以引用 Lambert W 函数求解时, 会有两个解存在。当定义域在 $(-\infty, -1/e)$, Lambert W 函数无解, 因此, 如果求解的方程中 W 函数的定义域在此范围内, 整体指数函数与线性函数的组合方程无解。

基金项目

季华实验室科研项目(X220011TN220)。

参考文献

- [1] Lambert, J.H. (1758) Observationes variae in mathes in puram. *Acta Helvetica*, **3**, 128-168.
- [2] Lambert, J.H. (1772) Observations Analytiques. *Nouveaux m'Emoires de l'Acad'emie Royale des Sciences et belles-lettres*, **1**, 128-168.
- [3] Euler, L. (1921) De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus. *Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. 1, Opera Mathematica*, Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 350-369.
- [4] Janson, S., Knuth, D.E., Łuczak, T. and Pittel, B. (1993) The Birth of the Giant Component. *Random Structures & Algorithms*, **4**, 233-358. <https://doi.org/10.1002/rsa.3240040303>
- [5] Borchardt, C.W. (1860) Ueber eine der Interpolation entsprechende darstellung der eliminations-resultante. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **57**, 111-121.
- [6] Cayley, A. (1889) A Theorem on Trees. *Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series*, **23**, 376-378.
- [7] Eisenstein, G. (1844) Entwicklung von $aa \cdots$. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **28**, 49-52.
- [8] Sylvester, J.J. (1857) On the Change of Systems of Independent Variables. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **1**, 42-56.

-
- [9] Skovgaard, O., Jonsson, I.G. and Bertelsen, J.A. (1975) Computation of Wave Heights Due to Refraction and Friction. *Journal of the Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division*, **101**, 15-32.
<https://doi.org/10.1061/awhcar.0000269>
 - [10] Pólya, G. and Szegő, G. (1972) Problems and Theorems in Analysis. Springer-Verlag.
 - [11] Wright, E.M. (1949) The Linear Difference-Differential Equation with Constant Coefficients. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematical and Physical Sciences*, **62**, 387-393.
<https://doi.org/10.1017/s0080454100006804>
 - [12] Fritsch, F.N., Shafer, R.E. and Crowley, W.P. (1973) Algorithm 443: Solution of the Transcendental Equation $We^w = X$. *Communications of the ACM*, **16**, 123-124. <https://doi.org/10.1145/361952.361970>
 - [13] Char, B.W., Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Leong, B.L., Monagan, M.B. and Watt, S.M. (1991) The Maple V Language Reference Manual. Springer-Verlag.