Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(2), 326-338
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.162061

Hans汉斯

高观点下讨论数学归纳法的有效性问题

陈建军*，王世芳*#，梁亚娜*

肇庆学院数学与统计学院，广东 肇庆

收稿日期：2025年12月21日；录用日期：2026年2月9日；发布日期：2026年2月27日

摘　要

本文旨在从高等数学视角下讨论高中教师董昊雷和宋亚洲所提出的(第一)数学归纳法失效的问题，并进一步加深探讨数学归纳法的有效性问题。

关键词

数学归纳法，高观点，有效性

On the Effectiveness of the Mathematical Induction from an Advanced Standpoint

Jianjun Chen*, **Shifang Wang*#**, **Yana Liang***

School of Mathematics and Statistics, Zhaoqing University, Zhaoqing Guangdong

Received: December 21, 2025; accepted: February 9, 2026; published: February 27, 2026

Abstract

In this note, we aim to research the effectiveness of the Mathematical Induction form an advanced standpoint through discussing the contrary raised by two senior middle school teachers Haolei Dong and Yazhou Song.

Keywords

Mathematical Induction, Advanced Standpoint, Effectiveness

*共同一作。
#通讯作者。

文章引用: 陈建军, 王世芳, 梁亚娜. 高观点下讨论数学归纳法的有效性问题[J]. 理论数学, 2026, 16(2): 326-338.
DOI: 10.12677/pm.2026.162061

1. 引言

数学家华罗庚在文献[1]里说过：“从少数的事例中摸索出来规律，再从理论上证明这一规律的一般性，是人们认识客观法则的方法之一。”事实上，这正是归纳法的通俗说法。所谓归纳法是指从特殊到一般的科学研究方法，它包含完全归纳法和不完全归纳法。相反地，从一般到特殊的科学研究方法称为演绎法。这两种方法在科学研究时是相辅相成的，“归纳法，没有和演绎法综合起来，就把数学变成跟数学没有共同之点的经验，而演绎法，没有经过归纳法的授粉作用，也就使数学失去了创造的能力”[2]。

数学归纳法是一种归纳－演绎的方法。在数学研究里，常常要求对全体无穷对象(例如与自然数集有关)下结论，并且希望能证明结论是正确的，而数学归纳法正是解决这种问题的一种常用方法。应用数学归纳法，可以通过“有限”来解决“无限”的问题。数学归纳法的正确性，源自于皮亚诺(Peano)公理中的第五条数学归纳原理：任意一个含 1 的自然数集合，如果它包含数 a，也一定包含 a 的随从 a'，那么这个集合包含所有的自然数[1]。基于此，数学归纳法的步骤有：

(1) 当 $n=1$ 时，命题是正确的；

(2) 假设当 $n=k$ 时，这个命题是正确的，证明当 $n=k+1$ 时，这个命题也是正确的。

显然，在含有 1 的自然数集里，1 是集合中的最小值，然而对于任意一个自然数集的子集，必定会存在最小的数，这就是最小数原则[1]。因此，数学归纳法还有另一种表达形式：

(1) 当 $n=k_0\ge 1$ 时，命题是正确的；

(2) 假设当 $n=k\left(k\ge k_0\right)$ 时，这个命题是正确的，证明当 $n=k+1$ 时，这个命题也是正确的。

我们称满足上述一种步骤的数学归纳法为第一数学归纳法。

事实上，应用皮亚诺公理和最小数原则可知，数学归纳法还有其他形式。下面我们仅列举常用的形式。

(A) 第二数学归纳法[1]-[3]：

(1) 当 $n=1$ 时，命题是正确的；

(2) 假设当 $n\le k\left(k\ge 1\right)$ 时，命题是正确的，证明当 $n=k+1$ 时，命题也是正确的。

(B) 跳跃数学归纳法[1]-[3]：

(1) 当 $n=1,2,\cdots,m$ 时，命题是正确的；

(2) 假设当 $n=k\left(k\ge m\right)$ 时，命题是正确的，证明当 $n=k+m$ 时，命题也是正确的。

(C) 反向(倒推)数学归纳法[1]-[3]：

(1) 当 $n=2$ 时，命题是正确的；

(2) 假设当 $n=k$ 时，命题是正确的，证明当 $n=2k$ 时，命题也是正确的；

(3) 假设当 $n=r$ 时，命题是正确的，证明当 $n=r-1$ 时，命题也是正确的。

不难看出，在反向数学归纳法里，当 $k=2$ 时，存在当 $n=2,2^2,\cdots,2^k,\cdots$ 时，命题是正确的。因此可以将第(1)步和第(2)步合并成一步：当存在无穷多个自然数 n, 命题是正确的。

数学归纳法，不管是中学阶段还是大学阶段的数学学习，均是不可或缺的重要知识点。近两年，两位高中教师分别在文献[4] [5]列举一例来研究数学归纳法的应用效果。他们指出：(第一)数学归纳法在不等式应用的有效条件是：从“$n=k$”到“$n=k+1$”跳跃时，不等式两边的增量保持不等关系不变。他

们在文献里的论证方法基于中学数学的知识，然而这种情况如何通过高等数学的视角解析呢？本文旨在应用高等数学的知识，分析文献[4] [5]所出现的异常现象，进而加深探讨数学归纳法的有效性问题。

2. 不等式是最优不等式吗？

保持不等式中不等关系成立的最合适的量，我们称为最优量。含有最优量的不等式称为最优不等式。正所谓“增之一分则嫌长，减之一分则嫌短”，哪怕变化了一点点，不等关系很可能会逆转。因此一个不等式是不是最优的，与所选论证方法是否有效存在密切的联系。为了具体地说明这个问题，我们先以文献[4]中的目标不等式开始：

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2}<\frac{2}{3}-\frac{1}{n+2}=B_n. \tag{1}$$

当应用数学归纳法证明它时，作者在文献里指出：(第一)数学归纳法的第二步不能成立。具体地，在(第一)数学归纳法的归纳假设下，当 $n=k+1$ 时，有

$$S_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}<\frac{2}{3}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)^2}, \tag{2}$$

但是不等式(2)的右侧不能推导出

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)^2}\le\frac{2}{3}-\frac{1}{k+3}=B_{k+1},$$

是因为“ S_k 从 k 到 $k+1$ 的增加量要大于 B_k 从 k 到 $k+1$ 的增加量”，进而断言(第一)数学归纳法失效。

由高等数学的知识可知，S_n+1 是著名的巴塞尔级数的部分和，并且数学家欧拉已经证明了巴塞尔级数是收敛的，即 $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi^2}{6}-1$ 。另一方面，显然有 $\pi<\sqrt{10}$ ，我们知道下式成立，

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi^2}{6}-1<\frac{2}{3}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{n\to+\infty}B_n.$$

它暗示着不等式(1)里 $n+2$ 中的 2 与不等式的成立与否关系不大。在文献[4]中，作者用面积法证明

$$\frac{1}{(k+1)^2}<\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+\frac{3}{2}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{k+\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+\frac{3}{2}},$$

再对上述不等式两边求和，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2}<\sum_{i=1}^{n}\int_{i+\frac{1}{2}}^{i+\frac{3}{2}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{1+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}.$$

于是便有一个疑问，将不等式(1)中的 $n+2$ 替换成 $n+\frac{3}{2}$ 后，我们能应用(第一)数学归纳法证明它吗？

例 1 应用(第一)数学归纳法证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2}<\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}. \tag{3}$$

证明：当 $n=1$ 时，$\frac{1}{4}<\frac{2}{3}-\frac{1}{1+1.5}=\frac{4}{15}$ 。假设当 $n=k$ 时，上述不等式成立。当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}<\frac{2}{3}-\frac{1}{k+\frac{3}{2}}+\frac{1}{(k+2)^2}.$$

为了使得(第一)数学归纳法能成功应用，须有

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{k+\frac{3}{2}}+\frac{1}{(k+2)^2}<\frac{2}{3}-\frac{1}{k+1+\frac{3}{2}}.$$

事实上，上式等价于

$$\frac{1}{(k+2)^2}<\frac{1}{k+\frac{3}{2}}-\frac{1}{k+1+\frac{3}{2}}=\frac{1}{\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(k+\frac{5}{2}\right)}.$$

显然它是成立的，那是因为

$$(k+2)^2=k^2+4k+4>k^2+4k+\frac{15}{4}=\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(k+\frac{5}{2}\right).$$

所以(第一)数学归纳法成功应用于不等式(3)。 □

结合例 1 的结果，我们可以应用(第一)数学归纳法和放缩法证明不等式(1)，即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2}<\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{3}{2}}<\frac{2}{3}-\frac{1}{n+2}.$$

显然不等式(1)中的 B_n 不是最优量呢？上述分析激发我们寻找类似 $\frac{3}{2}$ 的其他常数的欲望。

例 2 求，使得下列不等式成立，并能应用(第一)数学归纳法证明的实常数 x 的取值范围，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2}<\frac{2}{3}-\frac{1}{n+x}\quad(x>-1).$$

解：题意要求能应用(第一)数学归纳法，我们须成立如下各个步骤：当 $n=1$ 时，$\frac{1}{4}<\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}$，即 $x>\frac{7}{5}$。假设当 $n=k\geq1$ 时，上述不等式成立，则当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}<\frac{2}{3}-\frac{1}{k+x}+\frac{1}{(k+2)^2}.$$

为了使得(第一)数学归纳法能成功应用，须有

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{k+x}+\frac{1}{(k+2)^2}\leq\frac{2}{3}-\frac{1}{k+1+x}.$$

事实上，上式等价于

$$(k+2)^2\geq(k+x)(k+1+x).$$

记函数 $f(x)=x^2+(2k+1)x-(3k+4)$。上述分析告诉我们，须满足“对于任意 $k\geq1$，都有不等式 $f(x)\leq0$ 成立”。由一元二次方程的求根公式，不等式 $f(x)\leq0$ 可解得

$$-\left(k+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}\leq x\leq-\left(k+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}.$$

为了使得(第一)数学归纳法能够成功应用，实常数 x 的取值范围是

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty}\left[-\left(k+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}},-\left(k+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}\right]\cap\left(\frac{7}{5},+\infty\right).$$

接着，我们求上述开集列的可数交。根据海涅定理，不失一般性，此时不妨假设 k 是一个连续变量，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pm\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}\right)=\pm\frac{k+2}{\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}}-1<0.$$

所以函数 $g(k)=-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pm\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}$ 是一个定义在 $[1,+\infty)$ 上的单调递减函数，其中显然有

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}+\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]=+\infty.$$

另一方面，

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]=\lim_{k\to+\infty}\frac{3k+4}{\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}+\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{3}{2}.$$

综上所述，实常数 x 的取值范围是

$$(-1,+\infty)\cap\left[-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{37}}{2},\frac{3}{2}\right]\cap\left(\frac{7}{5},+\infty\right)=\left(\frac{7}{5},\frac{3}{2}\right].$$ □

由例 2 的分析，为了能够应用(第一)数学归纳法，巴塞尔级数的部分和最优的估计是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2}\le\frac{2}{3}-\frac{1}{n+\frac{7}{5}},$$

最后再结合放缩法便可完整证明不等式(1)。

注 1：由于(第一)数学归纳法的首步骤可以从 $n=k_0(\ge1)$ 开始验证，此时实常数 x 的取值范围是

$$\bigcap_{k=k_0}^{+\infty}\left[-\left(k+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}},-\left(k+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{k^2+4k+\frac{17}{4}}\right]\cap\left(\frac{7}{5},+\infty\right).$$

巴塞尔级数是一个收敛级数，对于发散级数是否会出现类似的问题呢？以下不等式来源于文献[5]。

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}>2\sqrt{n}-\frac{3}{2}. \tag{4}$$

在文献[5]里，作者的分析思路和结论与文献[4]的类似，然而同样的疑问，这个不等式是最优的吗？

首先我们知道

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\int_n^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x<\frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{5}$$

对不等式(5)两边求和，得到

$$1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{i+1}}<1+\sum_{i=1}^{n}\int_i^{i+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=1+\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{n+1}-1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}>\sum_{i=1}^{n}\int_{i}^{i+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{n+1}-2.$$

它们暗示着，当 $n\to+\infty$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}$ 与 $\sqrt{n+1}$ 是同阶无穷大。应用待定系数法和 Stolz 定理，从

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}}{a\sqrt{n+1}+b}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{i}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}=\frac{2}{a},$$

(其中常数 a,b 为两个待定系数)可知 $a=2$。故不等式(4)右边的乘子 2 是最优的，但是减数 $\frac{3}{2}$ 是不是最优呢？能否将 $-\frac{3}{2}$ 增加或减少一点点，使得它变成最优的呢？让我们先考察将它减少一点点的情形。

例 3 应用(第一)数学归纳法证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}\geq 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}-2. \tag{6}$$

证明：当 $n=1$ 时，$1\geq 2\sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}-2$。假设当 $n=k$ 时，不等式(6)成立，当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{i}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq 2\sqrt{k}-2+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

为了使得数学归纳法能成功应用，须有

$$2\sqrt{k}-2+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq 2\sqrt{k+1}-2+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

事实上，上式等价于

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}\geq 2\sqrt{k+1}.$$

显然它是成立的，那是因为

$$\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

所以(第一)数学归纳法能成功应用于不等式(6)。 □

从例 3 可以看出，当 $n\geq 4$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}>2\sqrt{n}-\frac{3}{2}\geq 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}-2,$$

所以相对于不等式(4)，不等式(6)过分放缩了，但它却提供了寻找不等式(4)最优形式的线索。接下来我们考察将 $-\frac{3}{2}$ 增加一点点的情形。

例 4 应用(第一)数学归纳法证明：当自然数 n 充分大时，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}\geq 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{3}{2}. \tag{7}$$

证明：通过验算，当 $n=160$ 时，不等式(7)成立。假设 $n=k(\geq 160)$ 时，不等式(7)也成立。当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{i}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{3}{2},$$

为了使得数学归纳法能成功应用，须要验证

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{3}{2}\geq 2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{3}{2}.$$

事实上，上式等价于

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k}}\geq 2\sqrt{k+1}.$$

显然它是成立的，所以(第一)数学归纳法能成功地应用于不等式(7)。 □

从例 4 可以看出，当 $n\geq 160$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}\geq 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{3}{2}>2\sqrt{n}-\frac{3}{2}.$$

值得注意的是，仔细观察例 3 和例 4 的证明，我们发现常数 $\frac{3}{2}$ 在应用(第一)数学归纳法证明的过程中并未起到关键作用。它激发我们寻找不等式(4)最优形式的兴趣。

例 5 求，使得下列不等式成立，并能应用(第一)数学归纳法证明的实常数 x 的取值范围

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}>2\sqrt{n+x}+a\quad\left(x\geq 0,\ a<1\right). \tag{8}$$

解：题意要求能应用(第一)数学归纳法，我们须成立如下各个步骤：当 $n=1$ 时，$1>2\sqrt{1+x}+a$，即 $-1\leq x<\frac{(1-a)^2}{4}-1$。假设当 $n=k\geq 1$ 时，上述不等式成立。当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{i}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2\sqrt{k+x}+a+\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

为了使得数学归纳法能成功应用，须要验证

$$2\sqrt{k+x}+a+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq 2\sqrt{k+1+x}+a.$$

事实上，上式等价于

$$\sqrt{k+1+x}+\sqrt{k+x}\geq 2\sqrt{k+1}.$$

解之，$x\geq\frac{k+\frac{9}{8}}{2(k+1)}$。为了使得(第一)数学归纳法能成功应用，实常数 x 的取值范围是

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{k+\frac{9}{8}}{2(k+1)},+\infty\right)\cap\left(-1,\frac{(a-1)^2}{4}-1\right)=\left[\frac{17}{32},+\infty\right)\cap\left(-1,\frac{(a-1)^2}{4}-1\right). \tag{9}$$

为了上述的取值范围不是空集，须满足 $\frac{(1-a)^2}{4}-1>\frac{17}{32}$，$a<1$，所以 a 的取值范围是 $\left(-\infty,1-\frac{7}{4}\sqrt{2}\right)$。

总之，为了能够应用(第一)数学归纳法证明不等式(8)，必须满足

$$a\in\left(-\infty,1-\frac{7}{4}\sqrt{2}\right)\ \text{且}\ x\in\left[\frac{17}{32},\frac{(1-a)^2}{4}-1\right).$$ □

注 2：(1) 根据例 5 的分析，特别地，当 $a=-\frac{3}{2}<1-\frac{7}{4}\sqrt{2}$ 时，$x\in\left[\frac{17}{32},\frac{9}{16}\right)$。所以我们可以用(第一)数学归纳法和放缩法证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}>2\sqrt{n+\frac{17}{32}}-\frac{3}{2}>2\sqrt{n}-\frac{3}{2}.$$

(2) 由于(第一)数学归纳法首步骤可以从 $n=k_0\left(\geq 1\right)$ 开始验证，此时对实常数 x 的取值范围讨论，只需要将等式(9)替换为

$$\bigcap_{k=k_0}^{+\infty}\left[\frac{k+\frac{9}{8}}{2\left(k+1\right)},+\infty\right)\cap\left(-1,\frac{\left(1-a\right)^2}{4}-1\right).$$

最后再模仿例 5 的方法，保证取值范围是非空集即可。在此省略。

通过本节的分析，我们发现不等式是否最优的与(第一)数学归纳法是否有效存在密切的联系。或者，通俗地讲，如果先将放缩法不恰当地应用在不等式上，则(第一)数学归纳法的应用往往失效。

3. 它是一个充要条件吗？

当 $S_n\geq 0\ \left(n\geq 1\right)$ 时，记 $\Delta S_n=S_n-S_{n-1},\Delta S_1=S_1$. 在文献[4] [5]中，作者给出了(第一)数学归纳法失效的原因：那是因为“$\Delta S_{k+1}>\Delta B_{k+1}$”。那么这个条件对于(第一)数学归纳法的有效性而言是充要条件吗？下面的性质说明条件“$\Delta S_n\leq\Delta B_n$”是“能够应用(第一)数学归纳法证明 $S_n\leq B_n$”的充分性条件。

性质 1 对于任意的 $n\geq 1$，都有 $\Delta S_n\leq\Delta B_n$，则能够应用(第一)数学归纳法证明 $S_n\leq B_n\left(n\geq 1\right)$。

证明：我们直接应用(第一)数学归纳法：当 $n=1$ 时，条件保证 $S_1\leq B_1$ 成立。假设当 $n=k$ 时，$S_k\leq B_k$ 成立，当 $n=k+1$ 时，

$$S_{k+1}=S_k+\Delta S_{k+1}\leq B_k+\Delta B_{k+1}=B_{k+1},$$

所以我们有 $S_n\leq B_n\left(n\geq 1\right)$。 □

自然而然地问：条件“$\Delta S_n\leq\Delta B_n$”是一个必要性条件吗？为了回答这个问题，我们先考察文献[2]第 37 页的一个例子。

例 6 当 $n\geq 10$ 时，应用(第一)数学归纳法证明不等式 $2^n>n^3$.

此例的证明比较简单，我们省略不证！但是我们不妨在表 1 里看看 $1\leq n\leq 9$ 的情况。

Table 1. The analysis of the inequality $2^n>n^3$ when $1\leq n\leq 9$

表 1. 当 $1\leq n\leq 9$ 时，不等式 $2^n>n^3$ 的正确性分析

	2^n	n^3	$2^n>n^3$?
$n=1$	2	1	正确
$n=2$	4	8	错误
$n=3$	8	27	错误
$n=4$	16	64	错误
$n=5$	32	125	错误
$n=6$	64	216	错误
$n=7$	128	343	错误
$n=8$	256	512	错误
$n=9$	512	729	错误

不难看出，这个例子有一定的特点，仅仅当 $n=2,3,4,5,6,7,8,9$ 时，不等式 $2^n>n^3$ 不成立，于是我们利用这个特点构造不等式如下。

例 7 对于哪些自然数 n，能够应用(第一)数学归纳法证明不等式 $\sum_{i=1}^{n} i^{-3} > \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$ ？

解： 显然这个不等式与例 6 有关，所以在证明前，我们在表 2 里讨论一下前几项的结果。

Table 2. The analysis of the inequality $\sum_{i=1}^{n} i^{-3} > \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$ when $1\le n\le 9$

表 2. 当 $1\le n\le 9$ 时，不等式 $\sum_{i=1}^{n} i^{-3} > \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$ 的正确性分析

	$\sum_{i=1}^{n} i^{-3}$	$\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$	$\sum_{i=1}^{n} i^{-3} > \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$?
$n=1$	1	0.5	正确
$n=2$	1.25	0.75	正确
$n=3$	1.16203703703704	0.875	正确
$n=4$	1.17766203703704	0.9375	正确
$n=5$	1.18566203703704	0.96875	正确
$n=6$	1.19029166666667	0.984375	正确
$n=7$	1.19320711856171	0.9921875	正确
$n=8$	1.19516024356171	0.99609375	正确
$n=9$	1.19653198567419	0.998046875	正确

此时我们应用(第一)数学归纳法证明。当 $n=9$ 时，不等式是成立的。假设当 $n=k\ge 9$ 时，原不等式也成立。当 $n=k+1\ge 10$ 时，由归纳假设，

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i^3}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^3}+\frac{1}{(k+1)^3}>\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{(k+1)^3}.$$

由例 6 可知

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{(k+1)^3}\ge\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^{k+1}}$$

等价于 $2^{k+1}\ge(k+1)^3$，故当 $n\ge 9$ 时，能够应用(第一)数学归纳法证明原不等式。 □

例 6 和例 7 告诉我们，能够应用(第一)数学归纳法证明“当 $n\ge 9$ 时，不等式 $S_n\le B_n$”，却不能推导出“当 $2\le n\le 8$ 时，$\Delta S_n\le\Delta B_n$”成立。进而，极端地思考，对于所有的自然数 n，都不能成立 $1^n>n^{1+1}$。于是我们继续提出疑问：会不会存在更多的自然数 n, 能够应用(第一)数学归纳法证明不等式 $S_n\le B_n$，但是不能推导出 $\Delta S_n\le\Delta B_n$ 呢？为此，我们考察例 6 的一般情形如下：

例 8 对于哪些自然数 n，能够应用(第一)数学归纳法证明不等式 $a^n>n^{a+1}$，其中 $a\in(1,2]\cap\mathbb{Q}$ ？

解： 我们先考察对于哪些自然数 n，不等式 $a^n>n^{a+1}$ 成立，其中 $a\in(1,2]\cap\mathbb{Q}$。事实上我们需要解方程 $a^x=x^{a+1}\left(x\ge 1, a\in(1,2]\cap\mathbb{Q}\right)$。将等式变形并化简如下：

$$1=x^{a+1}a^{-x}=x^{a+1}\mathrm{e}^{-x\ln a}.$$

由于 $a\in(1,2]\cap\mathbb{Q}$，所以等式两边同时开 $a+1$ 次方，即

$$1=\left(x^{a+1}\mathrm{e}^{-x\ln a}\right)^{\frac{1}{a+1}}=x\exp\left(-\frac{x\ln a}{a+1}\right). \tag{10}$$

接着，等式两边同时乘以$-\frac{\ln a}{a+1}$，得到

$$-\frac{\ln a}{a+1}=-\frac{x\ln a}{a+1}\exp\left(-\frac{x\ln a}{a+1}\right).$$

因为$-\frac{\ln a}{a+1}\in\left(-\mathrm{e}^{-1},0\right)$，所以原方程的解为：

$$x_1=-\frac{a+1}{\ln a}W_0\left(-\frac{\ln a}{a+1}\right)\text{或 }x_2=-\frac{a+1}{\ln a}W_{-1}\left(-\frac{\ln a}{a+1}\right).$$

由于当$x\to+\infty$时，a^x是x^{a+1}的高阶无穷大。所以，当$n\ge\max\left(\left[x_1\right]+1,\left[x_2\right]+1,1\right)$时，不等式$a^n>n^{a+1}$成立，其中$[x]$表示对$x$取整数部分。

最后，我们记集合A为

$$A=\left\{n\in\mathbb{N}\mid a\ge\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a+1}\right\}=\left\{n\in\mathbb{N}\mid n\ge\frac{1}{\sqrt[a+1]{a}-1}\right\}.$$

由最小数原则，集合A存在最小整数$N_{\min}$。故当$n=\max\left(\left[x_1\right]+1,\left[x_2\right]+1,N_{\min}+1\right)$时，不等式$a^n>n^{a+1}$成立，假设当$n=k\ge\max\left(\left[x_1\right]+1,\left[x_2\right]+1,N_{\min}+1\right)$时，不等式$a^n>n^{a+1}$成立。当$n=k+1$时，由归纳假设，有$a^{k+1}=a\cdot a^k>ak^{a+1}$。为了完成归纳步骤，必须有$ak^{a+1}\ge(k+1)^{a+1}$，即

$$a\ge\frac{(k+1)^{a+1}}{k^{a+1}}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{a+1},$$

而它是成立的。故当$n\ge\max\left(\left[x_1\right]+1,\left[x_2\right]+1,N_{\min}+1\right)$时，能够应用(第一)数学归纳法证明原不等式。 □

接下来，我们模仿例 7，利用例 8 的结论，得到下面不等式。

例 9 对于哪些自然数n，能够应用(第一)数学归纳法证明不等式$\sum_{i=1}^{n}i^{-(a+1)}>\sum_{i=1}^{n}a^{-i}$，其中$a\in[2-\varepsilon,2]\cap\mathbb{Q}$，$\varepsilon>0$是一个充分小的数。

解：先证明原不等式成立。由于

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{a+1}}=1+\left(\frac{1}{2^{a+1}}+\frac{1}{3^{a+1}}+\cdots+\frac{1}{n^{a+1}}\right)\ge1,$$

另一方面，根据等比数列的前n项和公式，当$n<\log_a\frac{1}{2-a}$时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a^i}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\cdots+\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a-1}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)<1.$$

由上述讨论，当$n=1$时，原不等式成立。设当$n=k$时，原不等式成立，当$n=k+1$时，

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{i^{a+1}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^{a+1}}+\frac{1}{(k+1)^{a+1}}>\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a^i}+\frac{1}{(k+1)^{a+1}}.$$

为了完成归纳步骤，我们的目标是验证

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a^i}+\frac{1}{(k+1)^{a+1}}\ge\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a^i}+\frac{1}{a^{k+1}}.$$

事实上它等价于$a^{k+1}\ge(k+1)^{a+1}$。由例 8 的结论，当$k\ge\max\left(\left[x_1\right]+1,\left[x_2\right]+1,N_{\min}+1\right)$时，有$a^{k+1}\ge(k+1)^{a+1}$成立，于是只需在首步里用$n=\max\left(\left[x_1\right],\left[x_2\right],N_{\min}\right)\ll\log_a\frac{1}{2-a}$替换$n=1$即可完成(第一)数学归纳法的证明。 □

注 3：**(1)** 在例 9 里，我们选取充分小的 $\varepsilon > 0$ 是有必要的，同时也是可以实现的。首先由于数学归纳法不考察 $n \to +\infty$ 的情形，只要 ε 是一个充分小的常数，能够保证自然数 n 有足够多，至少能远远大于 $\max\left([x_1],[x_2],N_{\min}\right)$，所以只需要取 ε 充分小，使得 $\max\left([x_1],[x_2],N_{\min}\right) \ll \log_a \dfrac{1}{2-a}$。根据例 7 中的不等式可知，$\varepsilon$ 的充分小性是可以实现的，比如取 $0 < \varepsilon < 10^{-30}$ 时，有 $n > 100$。

(2) 在例 8 和例 9 里，我们取参数 a 为有理数，是为了保证等式(10)的计算不需要考虑复数的情形。如果参数 a 为无理数，则需要把 1 看成一个复数，等式(10)的计算需要重新考虑，如等式(10)左边变为

$$1^{\frac{1}{a+1}} = \exp\left\{\frac{1}{a+1}\left(\ln|1| + i\arg 1 + 2k\pi i\right)\right\} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

最后再结合复数情形的朗伯 W 函数公式 $W(z)\mathrm{e}^{W(z)} = z$ [6]，同样可以得到例 9 所需要的结论。

(3) 至此，根据例 6 与例 7，例 8 与例 9 两组例子的结论，我们可以总结如下：

如果有 $S_1 \le B_1$，并且存在一个最小的自然数 $k_{\min} \ge 3$，能够应用(第一)数学归纳法证明“当 $n \ge k_{\min}$ 时，$S_n \le B_n$”，则不能断言“当 $2 \le n \le k_{\min} - 1$ 时，$\Delta S_n \le \Delta B_n$”。

上述结论讨论了不等式“$\Delta S_n \le \Delta B_n$”前几项的性质，而对于余下的项，我们有：

性质 2 如果有 $S_1 \le B_1$，并且存在一个最小的自然数 $k_{\min} \ge 1$，能够应用(第一)数学归纳法证明“当 $n \ge k_{\min}$ 时，$S_n \le B_n$”，则能够推导出“当 $n \ge k_{\min} + 1$ 时，$\Delta S_n \le \Delta B_n$”。

证明：假设存在某个自然数 $n_0 \ge k_{\min} + 1$，有 $\Delta S_{n_0} > \Delta B_{n_0}$。我们验证(第一)数学归纳法的证明失效。

由题目条件，当 $n = k_{\min}$ 时，有 $S_{k_{\min}} \le B_{k_{\min}}$ 成立。假设当 $n = k\left(\ge k_{\min}\right)$ 时，$S_k \le B_k$ 成立，则当 $n = k+1$ 时，由归纳假设，

$$S_{k+1} = S_k + \Delta S_{k+1} \le B_k + \Delta S_{k+1},$$

为了完成归纳步骤，必须有 $\Delta S_{k+1} \le \Delta B_{k+1}$。然而当 $k = n_0 - 1 \ge k_{\min}$ 时，却有 $\Delta S_{k+1} > \Delta B_{k+1}$ 成立。所以此时(第一)数学归纳法失效，不能证明“当 $n \ge k_{\min}$ 时，$S_n \le B_n$”。 □

注 4：在性质 2 中，我们不能判断 $S_{k_{\min}} \le B_{k_{\min}}$ 是否成立，只有当 $k_{\min} = 1$ 时，由条件才知道 $S_1 \le B_1$。不过无论 $S_{k_{\min}} \le B_{k_{\min}}$ 是否正确，我们都可以得到如下集合的包含关系：

$$\varnothing \ne \bigcup_{k_{\min}=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k_{\min}}^{+\infty} \left\{n \in \mathbb{N} \mid \Delta S_n \le \Delta B_n\right\} \subseteq \left\{n \in \mathbb{N} \mid \text{能应用}(\text{第一})\text{数学归纳法证明 } 0 \le S_n \le B_n\right\} \subseteq \mathbb{N}.$$

4. 数学归纳法真的失效吗？

经过上面的分析，我们发现不等式(1)和不等式(4)不能应用(第一)数学归纳法的原因是没有满足第二节所述的充分不必要条件。从条件可以看出，它只考虑不等式两边“增量”的关系，这也暗示着第二数学归纳法和跳跃数学归纳法不能应用。但是数学归纳法的内容不止是“向前”归纳，我们可以避开考察“增量”的问题，选择“向后”递减式归纳法。

例 10 应用反向数学归纳法证明不等式(1)。

证明：显然，当 $n \ge \left[\dfrac{6}{10-\pi^2} - 2\right] + 1 = 45$ 时，$\dfrac{\pi^2}{6} - 1 < \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{n+2}$。所以当 $k \ge 6$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{(i+1)^2} < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < \frac{2}{3} - \frac{1}{2^k + 2}.$$

这说明不等式(1)对于无穷多个自然数 $\left\{2^k\right\}_{k\ge 6}$ 成立。

假设当 $n = r+1$ 时，不等式(1)成立。下证：当 $n = r$ 时，不等式(1)也成立。事实上，由归纳假设，

$S_{r+1}-B_{r+1}<0$，所以

$$0>S_{r+1}-B_{r+1}=\left[S_1+\sum_{i=2}^{r+1}(S_i-S_{i-1})\right]-\left[B_1+\sum_{i=2}^{r+1}(B_i-B_{i-1})\right]$$
$$=(S_1-B_1)+\left[\sum_{i=2}^{r+1}(S_i-S_{i-1})-\sum_{i=2}^{r+1}(B_i-B_{i-1})\right],$$

整理可得：

$$B_1-S_1>\left[\sum_{i=2}^{\mathrm{r}}(S_i-S_{i-1})+(S_{k+1}-S_k)\right]-\left[\sum_{i=2}^{r}(B_i-B_{i-1})+(B_{k+1}-B_k)\right]$$
$$=\left[\sum_{i=2}^{r}(S_i-S_{i-1})-\sum_{i=2}^{r}(B_i-B_{i-1})\right]+\left[(S_{r+1}-S_r)-(B_{r+1}-B_r)\right]$$
$$=\left[\sum_{i=2}^{r}(S_i-S_{i-1})-\sum_{i=2}^{r}(B_i-B_{i-1})\right]+\frac{1}{(r+2)^2(r+3)}$$
$$>\sum_{i=2}^{r}(S_i-S_{i-1})-\sum_{i=2}^{r}(B_i-B_{i-1}).$$

最后移项并整理，可得当 $n=r$ 时，不等式(1)也成立。 □

不等式(4)不同于不等式(1)，其中的级数是发散的，因此它的证明与例 10 中的证明不尽相同，我们须在例 10 的基础上做一定的修改。

例 11 应用反向数学归纳法证明不等式(4)。

证明：首先对于任意的自然数 n，有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ge 2\left(\sqrt{n+\frac{9}{16}}-\sqrt{n-\frac{7}{16}}\right).$$

应用错位相减法，可得

$$\sum_{i=1}^{2^k}\frac{1}{\sqrt{i}}\ge 2\sum_{i=1}^{2^k}\left(\sqrt{i+\frac{9}{16}}-\sqrt{i-\frac{7}{16}}\right)=2\sqrt{2^k+\frac{9}{16}}-\frac{3}{2}>2\sqrt{2^k}-\frac{3}{2}.$$

这说明不等式(4)对于无穷多个自然数 $\{2^k\}_{k\ge1}$ 是成立的。

最后一步的归纳证明类似于例 10 中的证明，这里省略不证。 □

注 5：在例 11 的证明中，事实上我们得到了不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}}>2\sqrt{n+\frac{9}{16}}-\frac{3}{2}.$$

然而，从注 2(1)可以知道，这个不等式是不能应用(第一)数学归纳法证明，因为 $\frac{9}{16}\notin\left[\frac{17}{32},\frac{9}{16}\right)$。这是一个很有趣的现象，说明例 11 中的反证法与(第一)数学归纳法没有任何关系。

5. 总结

本文以不等式(1)和不等式(4)为起点，讨论第一数学归纳法的有效性问题。首先我们考察目标不等式是不是一种最优不等式。事实上，如果不等式在应用第一数学归纳法之前，不恰当地使用放缩法，往往导致第一数学归纳法失效。然后我们在第二节中讨论文献[4] [5]所给出第一数学归纳法失效的原因，并得到性质 1，2 和注 3(3)。最后我们发现若第一数学归纳法失效了，可以改用反向数学归纳法，并给出相应

的证明。

细心地发现，我们在第二节里实际上只考察了非负项的数列$\{S_n\}_{n\geq 1}$ $(S_n \geq 0)$的性质，对于一般的情形，所得的注 3(3)和性质 2 是不对的。例如，根据莱布尼兹判别法可知，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n} < +\infty$，相应地$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$。利用这个事实，考察能否应用第一数学归纳法证明“不等式$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{1}{i} < \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$”？为了文章的完整性，我们给出证明：当$n=1$时，$-1<1$，假设当$n=k$时，不等式成立，则当$n=k+1$时，

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \frac{1}{i} + (-1)^{k+1}\frac{1}{k+1} < \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} + (-1)^{k+1}\frac{1}{k+1},$$

为了完成归纳步骤，必须有$(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k+1}$，它显然是成立的，所以第一数学归纳法有效。但是当$n$为偶数时，都有$(-1)^n \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$，而不是$(-1)^n \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$，所以此时注 3(3)和性质 2 不成立。

由于数学归纳法的内容非常丰富，除了本文提到的归纳法外，还有诸如螺旋数学归纳法，多元数学归纳法等等其他形式。我们不禁产生疑问：在证明数学式子时，若存在一种或多种数学归纳法形式失效了，能否用其他形式代替呢？

基金项目

(1) 肇庆市教育发展研究院教育研究课题：高等数学观点下中学数学的衔接问题研究(课题编号：ZQJYY2023099)；

(2) 广东省新师范建设助推基础教育高质量发展研究与实践项目：“一体四翼”协同促进肇庆市中小学数学教师专业发展研究；

(3) 广东省教育科学规划课题(高等教育专项)：人工智能视域下地方本科院校职前教师 TPACK 在地化培养研究——以肇庆学院数学师范生为例(课题编号：2024GXJK252)；

(4) 广东省教育科学规划课题(高等教育专项)：认证理念下师范生教师职业能力测评研究(课题编号：2021GXJK471)；

(5) 肇庆市教育发展研究院教育研究课题：数学史融入初中数学教学的调查研究(课题编号：ZQJYY2023101)；

(6) 肇庆市教育发展研究院教育研究课题：初等数论课程对师范生数学素养培养的研究(课题编号：ZQJYY2023207)；

(7) 广东省本科高校数学教学指导委员会教改项目：思政背景下数学文化经典融入大学数学概率与统计课程的价值和路径(课题编号：GDSXJG50)。

参考文献

[1] 华罗庚. 数学归纳法[M]. 上海: 上海教育出版社, 1964.

[2] 伊·亚·杰朴曼. 数学归纳法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1959.

[3] 洪波. 怎样应用数学归纳法[M]. 上海: 上海教育出版社, 1982.

[4] 董昊雷. “失效”的数学归纳法[J]. 数学教学, 2022(12): 12-28.

[5] 宋亚洲. 数学归纳法真的“失效”了吗? [J].中学生数学, 2024(5): 6-8.

[6] Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J. and Knuth, D.E. (1996) On the Lambertw Function. *Advances in Computational Mathematics*, **5**, 329-359. https://doi.org/10.1007/bf02124750