

一类非线性微分方程的超越亚纯函数解

方 洋

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年12月24日; 录用日期: 2026年1月20日; 发布日期: 2026年1月27日

摘 要

应用亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论, 研究一类非线性微分方程

$f^n + af^{n-2}f'' + P_d(z, f) = p_1(z)e^{a_1(z)} + p_2(z)e^{a_2(z)} + p_3(z)e^{a_3(z)}$ 的超越亚纯解, 其中 $P_d(z, f)$ 为 f 的 d 次微分多项式, $p_i (i=1, 2, 3)$ 为非零常数, $a_i(z) (i=1, 2, 3)$ 为互异的非常数多项式, 而且给出了相应的例子辅以说明。

关键词

Nevanlinna理论, 非线性微分方程, 亚纯解

On Transcendental Meromorphic Solutions of One Type of Nonlinear Differential Equations

Yang Fang

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: December 24, 2025; accepted: January 20, 2026; published: January 27, 2026

Abstract

This study employed Nevanlinna theory to examine finite-order meromorphic solutions of nonlinear differential equations with the form

$f^n + af^{n-2}f'' + P_d(z, f) = p_1(z)e^{a_1(z)} + p_2(z)e^{a_2(z)} + p_3(z)e^{a_3(z)}$ Where $P_d(z, f)$ is polynomial of degree d , $p_i (i=1, 2, 3)$ are non-zero constants, and $a_i(z) (i=1, 2, 3)$ are distinct non-constant

*通讯作者。

polynomials. Corresponding examples are provided for illustration.

Keywords

Nevanlinna Theory, Nonlinear Differential Equation, Meromorphic Solutions

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言与主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的基本结果和标准记号[1] [2]。现对文中使用的主要符号做出如下说明：设 f 是整个复平面 C 上的亚纯函数， f 的级表示为 $\rho(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ T(r, f)}{\log r}$ ；对于 $a \in C$ ，对于一个不恒为零的亚纯函数 $\alpha(z)$ ，若满足 $T(r, \alpha) = S(r, f)$ ，(这里 $S(r, f) = o(T(r, f)) (r \rightarrow \infty)$)，除去关于 r 的一个可能存在的有限例外集)则称 $\alpha(z)$ 为 $f(z)$ 的小函数。用 $P_d(z, f)$ 表示 $f(z)$ 的 d 次微分多项式 $P_d(z, f)$ 为：

$$P_d(z, f) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \prod_{i=0}^{\eta_i} \left(f^{(i)}(z) \right)^{\lambda_i}, \quad (1)$$

其中 a_λ 为 f 小函数， Λ 是非负整数的有限指标集，且 $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\eta_1})$ 和

$$d := \deg(P_d(z, f)) = \max_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \sum_{i=0}^{\eta_i} \lambda_i \right\}.$$

如今，复微分方程在许多学科中发挥重要作用，非线性微分方程的整函数解(亚纯解)的存在性与唯一性的探讨与分类具有理论意义，大量学者运用 Nevanlinna 值分布理论，广泛研究一系列的微分方程(参见文献[3]-[8])，以下仅列举部分成果。

2011 年，李平[3]仅得到如下结果

定理 1.1 设 $n \geq 2$ 为整数， $p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2$ 为非零常数且满足 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ， $Q_d(z, f)$ 为 $f(z)$ 的微分多项式，次数至多为 $n-2$ 次。若 f 是方程

$$f^n(z) + Q_d(z, f) = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} \quad (2)$$

的超越亚纯解，且满足 $N(r, f) = S(r, f)$ ，则以下三种情况之一成立：

(i) $f(z) = c_0 + c_1 e^{\alpha_1 z/n}$ ；

(ii) $f(z) = c_0 + c_2 e^{\alpha_2 z/n}$ ；

(iii) $f(z) = c_1 e^{\alpha_1 z/n} + c_2 e^{\alpha_2 z/n}$ ，且 $a_1 + a_2 = 0$ ，其中 c_0 为 $f(z)$ 的小函数， c_j 为常数并且满足 $c_j^n = p_j, j=1, 2$ 。

2020 年刘慧芳和毛志强[6]对减弱定理 1.1 中的限制条件 $d \leq n-2$ ，并证明了如下定理。

定理 1.2 设 $n \geq 2$ 为正整数， $P_d(z, f)$ 为关于 f 的次数不超过 $d \leq n-1$ 的微分多项式，系数为多项式， $p_j, a_j (j=1, 2)$ 为非零常数且满足 $\frac{a_1}{a_2} \in \left\{ \frac{t}{n}, \frac{n}{t} : 1 \leq t \leq n \right\}$ 。若 $f(z)$ 是方程(1.2)的亚纯解并满足

$N(r, f) = S(r, f)$ ，则以下两种情形之一成立：

$$(i) f(z) = \gamma_1(z) + c_1 e^{\frac{\alpha_1 z}{n}}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{n}{t},$$

$$(ii) f(z) = \gamma_2(z) + c_2 e^{\frac{\alpha_2 z}{n}}, \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{t}{n}, \text{ 其中 } \gamma_j(z) \text{ 是 } f(z) \text{ 的小函数, } c_j \text{ 为常数并且满足 } c_j^n = p_j, j=1,2.$$

2023 年陈敏凤[8]研究了方程(2)右边包含三项线性无关的指数函数, 并得到定理 1.3

定理 1.3 设 $n \geq 3$ 为正整数, $P_d(z, f)$ 为关于 f 的次数不超过 $d \leq n-1$ 的微分多项式, 系数为小函数, $p_j, (j=1,2,3)$ 为非零常数, 且 $a_j, (j=1,2,3)$ 为互异的非零常数, 如果 f 为方程

$$f^n(z) + P_d(z, f) = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z} + p_3 e^{\alpha_3 z} \quad (3)$$

的有限级亚纯解, 并且满足 $N(r, f) = S(r, f)$ 则以下两种情况成立:

$$(1) f(z) = \gamma e^{\beta z} \text{ 其中 } \gamma, \beta \text{ 为非零常数, 且满足 } \gamma^n = p_1 \text{ (或 } p_2 \text{ 或 } p_3) \quad n\beta = a_1 \text{ (} a_2 \text{ 或 } a_3)$$

而且必有 $p_d(z, 0) \equiv 0$ 并存在正整数 l_1, l_2, l_3 满足 $\{l_1, l_2, l_3\} = \{1, 2, 3\}$ 以及互异的正整数 k_1, k_2 满足 $1 \leq k_1, k_2 \leq d$, 使得 $a_{l_1} : a_{l_2} : a_{l_3} = n : k_1 : k_2$ 。

$$(2) T(r, f) \leq 3\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r, f).$$

通过观察定理 1.3, 因此本文考虑到用 $af^{n-2}f'' + P_d(z, f)$ 取代将方程(3)中的 $p_d(z, f)$, 同时将互异非零常数 a_1, a_2, a_3 推广 $a_j(z), (j=1,2,3)$ 为互异的非常数多项式, 故得到如下定理。

定理 A: 设 $n \geq 7$ 为正整数, $P_d(z, f)$ 为关于 f 的微分多项式且次数为 $d \leq n-5$, 定义为(1), $p_j (j=1,2,3)$ 为非零常数, 且 $a_j(z), (j=1,2,3)$ 为互异的非常数多项式且满足 $\deg(\alpha_i - \alpha_j) \geq 1 (i \neq j)$ 。其中 $a \in C(a \neq 0)$, 如果 f 为方程

$$f^n + af^{n-2}f'' + P_d(z, f) = p_1 e^{\alpha_1(z)} + p_2 e^{\alpha_2(z)} + p_3 e^{\alpha_3(z)} \quad (4)$$

的有限级超越亚纯解, 并满足 $N(r, f) = S(r, f)$, 则以下情况成立。

$f(z) = Ce^{\beta z + \gamma}$, 其中 C, β 为非零常数, $\alpha_1(z), \alpha_2(z), \alpha_3(z)$ 均为一次多项式, 且存在正整数 i_1, i_2, i_3 满足 $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$ 及整数 $j (1 \leq j \leq d)$ 使得:

$$n\beta = \alpha'_{i_1}(z), (n-1)\beta = \alpha'_{i_2}(z), j\beta = \alpha'_{i_3}(z),$$

系数满足 $C^n = p_{i_1}, aC^{n-1}\beta = p_{i_2}$, 且 $P_d(z, Ce^{\beta z}) = p_{i_3} e^{\alpha_{i_3}(z)}$ 。

下面的例 1.1-1.3 说明满足定理 A 结论的亚纯解是存在的。

例 1.1. $f(z) = e^z$ 为微分方程

$$f^7 + f^5 f'' + f'' = e^{6z} + e^{7z} + e^z$$

的解, 此时 $n=7$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, $\alpha_1(z) = 7z$, $\alpha_2(z) = 6z$, $\alpha_3(z) = z$, $\alpha = 1$, a 为任意非零常数, $P_d(z, f) = f''$, 满足定理 A 的结论。

2. 引理

引理 2.1 [9] (Clunie 引理) 设 f 为方程

$$f^n(z)P(z, f) = Q(z, f)$$

的一个超越亚纯解, 其中 $P(z, f), Q(z, f)$ 为关于 f 及其导数的多项式, 系数为亚纯函数, 记为 $\{a_\lambda | \lambda \in I, I \text{ 为指标集}\}$, 对所有的 $\lambda \in I$ 满足 $m(r, a_\lambda) = S(r, f)$ 。如果 $Q(z, f)$ 关于 f 及其导数的总次数 $\leq n$ 则

$$m(r, P(z, f)) = S(r, f)$$

对所有 r 的成立, 至多需除去一个对数测度有限的例外集 E 。

引理 2.2 [10] (Cramer 法则), 考虑线性方程组 $AX = B$ 其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ and } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

如果 $\det(A) \neq 0$, 那么该线性方程组有唯一解

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, \frac{\det(A_n)}{\det(A)} \right),$$

其中

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ 且 } i=1, 2, \dots, n.$$

引理 2.3 [11] 设 $n \geq 2$, $f_j(z)$ ($j=1, 2, \dots, n$) 为亚纯函数, $g_j(z)$ ($j=1, 2, \dots, n$) 为整函数并满足以下条件:

$$(1) \sum_{j=1}^n f_j(z) e^{g_j(z)} \equiv 0;$$

(2) 当 $1 \leq j < k \leq n$ 时, $g_j(z) - g_k(z)$ 不为常数;

(3) 当 $1 \leq j \leq n$, $1 \leq h < k \leq n$ 时, $T(r, f_j(z)) = o\left(T\left(r, e^{g_h(z) - g_k(z)}\right)\right), r \rightarrow \infty, r \notin E$, 其中 $E \subset (1, \infty)$ 具有有限线性测度或对数测度, 那么有 $f_j(z) \equiv 0$ ($j=1, \dots, n$) 成立。

引理 2.4 [11] (Hadamard 分解定理)。设 $f(z)$ 为复平面上的有穷级亚纯函数, 级为 $\rho(f)$, 如果在 $z=0$ 附近, 有

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots (\text{其中 } a_k \neq 0)$$

则

$$f(z) = z^k e^{Q(z)} \frac{P_1(z)}{P_2(z)},$$

其中 $p_1(z), p_2(z)$ 分别为 $f(z)$ 非零点和极点的典型乘积, $Q(z)$ 为次数至多为 $\rho(f)$ 的多项式。

3. 定理 A 的证明

假设方程(4)有一个亚纯解 $f(z)$ 满足 $N(r, f) = S(r, f)$, 记

$$h(z) = f^n + a f^{n-2} f' + P_d(z, f)$$

则方程(4)可化为

$$h(z) = p_1 e^{\alpha_1(z)} + p_2 e^{\alpha_2(z)} + p_3 e^{\alpha_3(z)} \quad (5)$$

易证 $f(z)$ 是超越的, 否则, 若 $f(z)$ 为有理函数, 则方程(5)左边为有理函数, 由于 $a_j(z)$, ($j=1, 2, 3$) 互异的非常数多项式, 且 $\deg(\alpha_i - \alpha_j) \geq 1$ ($i \neq j$)。故 $e^{a_j(z)}$ ($j=1, 2, 3$) 为超越整函数, 因此右边是超越函数, 左边是有理函数, 矛盾。故 $f(z)$ 是超越亚纯函数。

接下来将证明 $f(z)$ 仅有有限多个零点, 对方程(5)逐次求导两次, 得到以下式子

$$\begin{aligned} h'(z) &= p_1 \alpha_1'(z) e^{\alpha_1(z)} + p_2 \alpha_2'(z) e^{\alpha_2(z)} + p_3 \alpha_3'(z) e^{\alpha_3(z)} \\ h''(z) &= p_1 \left(\alpha_1''(z) + (\alpha_1'(z))^2 \right) e^{\alpha_1(z)} + p_2 \left(\alpha_2''(z) + (\alpha_2'(z))^2 \right) e^{\alpha_2(z)} + p_3 \left(\alpha_3''(z) + (\alpha_3'(z))^2 \right) e^{\alpha_3(z)} \end{aligned}$$

故得到关于 $e^{\alpha_1(z)}, e^{\alpha_2(z)}, e^{\alpha_3(z)}$ 线性方程组:

$$\begin{cases} h(z) = p_1 e^{\alpha_1(z)} + p_2 e^{\alpha_2(z)} + p_3 e^{\alpha_3(z)} \\ h'(z) = p_1 \alpha_1'(z) e^{\alpha_1(z)} + p_2 \alpha_2'(z) e^{\alpha_2(z)} + p_3 \alpha_3'(z) e^{\alpha_3(z)} \\ h''(z) = p_1 \left(\alpha_1''(z) + (\alpha_1'(z))^2 \right) e^{\alpha_1(z)} + p_2 \left(\alpha_2''(z) + (\alpha_2'(z))^2 \right) e^{\alpha_2(z)} + p_3 \left(\alpha_3''(z) + (\alpha_3'(z))^2 \right) e^{\alpha_3(z)} \end{cases} \quad (6)$$

其中 $X_j = e^{\alpha_j(z)}$ 由(6)得到系数矩阵为

$$A(z) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 \alpha_1' & p_2 \alpha_2' & p_3 \alpha_3' \\ p_1 (\alpha_1'' + (\alpha_1')^2) & p_2 (\alpha_2'' + (\alpha_2')^2) & p_3 (\alpha_3'' + (\alpha_3')^2) \end{pmatrix}.$$

其行列式为

$$D_0(z) = \det A(z) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 \alpha_1' & p_2 \alpha_2' & p_3 \alpha_3' \\ p_1 (\alpha_1'' + (\alpha_1')^2) & p_2 (\alpha_2'' + (\alpha_2')^2) & p_3 (\alpha_3'' + (\alpha_3')^2) \end{vmatrix}$$

$D_0(z)$ 是一个有理函数, 我们考虑

$$D_1(z) = \begin{vmatrix} h & p_2 & p_3 \\ h' & p_2 \alpha_2' & p_3 \alpha_3' \\ h'' & p_2 (\alpha_2'' + (\alpha_2')^2) & p_3 (\alpha_3'' + (\alpha_3')^2) \end{vmatrix}$$

接下来将分两种情况讨论:

情形 1: 若 $D_0(z) \neq 0$

由引理 2.2 得

$$e^{\alpha_1(z)} = \frac{D_1(z)}{D_0(z)} \quad (7)$$

将 $D_1(z)$ 按第一列展开得到:

$$D_1(z) = M_{11}(z)h - M_{21}(z)h' + M_{31}(z)h'' \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{11}(z) &= \begin{vmatrix} p_2 \alpha_2' & p_3 \alpha_3' \\ p_2 (\alpha_2'' + (\alpha_2')^2) & p_3 (\alpha_3'' + (\alpha_3')^2) \end{vmatrix} = p_2 p_3 \left(\alpha_2' (\alpha_3'' + (\alpha_3')^2) - \alpha_3' (\alpha_2'' + (\alpha_2')^2) \right), \\ M_{21}(z) &= \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_2 (\alpha_2'' + (\alpha_2')^2) & p_3 (\alpha_3'' + (\alpha_3')^2) \end{vmatrix} = p_2 p_3 \left((\alpha_3'' + (\alpha_3')^2) - (\alpha_2'' + (\alpha_2')^2) \right), \\ M_{31}(z) &= \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ p_2 \alpha_2' & p_3 \alpha_3' \end{vmatrix} = p_2 p_3 (\alpha_3' - \alpha_2'). \end{aligned}$$

由于 $\deg(\alpha_i - \alpha_j) \geq 1$, $\alpha'_i \neq \alpha'_j$, 故 $M_{31}(z) \neq 0$ 对(7)式微分得到

$$\alpha'_1(z)e^{\alpha_1(z)} = \frac{D'_1(z)D_0(z) - D_1(z)D'_0(z)}{(D_0(z))^2}. \quad (9)$$

结合(7)和(9)消去 $e^{\alpha_1(z)}$ 得到

$$D'_1(z)D_0(z) - D_1(z)D'_0(z) = \alpha'_1(z)D_1(z)D_0(z). \quad (10)$$

将(8)带入(10)得到

$$D'_1 = M'_{11}h + M_{11}h' - M'_{21}h' - M'_{21}h'' + M'_{31}h'' + M_{31}h''.$$

将上式带入(10)整理得到关于 h 的三阶线性微分方程:

$$A_1(z)h + A_2(z)h' + A_3(z)h'' + A_4(z)h''' = 0 \quad (11)$$

其中系数 $A_j(z)$ 为多项式

$$\begin{aligned} A_1(z) &= M'_{11}D_0 - M_{11}(D'_0 + \alpha'_1D_0), \\ A_2(z) &= (M_{11} - M'_{21})D_0 + M_{21}(D'_0 + \alpha'_1D_0), \\ A_3(z) &= (-M_{21} + M'_{31})D_0 - M_{31}(D'_0 + \alpha'_1D_0), \\ A_4(z) &= M_{31}D_0. \end{aligned} \quad \text{特别的 } A_4(z) = M_{31}(z)D_0(z) \neq 0$$

将 $h(z) = f^n + af^{n-2}f'' + P_d(z, f)$ 带入(11)式整理得

$$A_1(f^n + af^{n-2}f'') + A_2(f^n + af^{n-2}f'')' + A_3(f^n + af^{n-2}f'')'' + A_4(f^n + af^{n-2}f'')''' = Q(z) \quad (12)$$

其中 $Q(z) = -(A_1P_d + A_2P'_d + A_3P''_d + A_4P'''_d)$ 且 $Q(z)$ 是次数不超过 d 的微分多项式, 为了简化(12)的左端, 我们引入以下记号:

$$\psi_1(z) = \frac{(f^n + af^{n-2}f'')'}{f^{n-5}}, \psi_2(z) = \frac{(f^n + af^{n-2}f'')''}{f^{n-5}}, \psi_3(z) = \frac{(f^n + af^{n-2}f'')'''}{f^{n-5}} \quad (13)$$

将(12)两边除以 f^{n-5} 整理得到

$$f^{n-5}R(z) = Q(z). \quad (14)$$

其中

$$R(z) = A_1f^5 + aA_1f^3f'' + A_2\psi_1 + A_3\psi_2 + A_4\psi_3 \quad (15)$$

由于 $d \geq n-6$, 所以 $n-5 \geq d$, 结合(14)和引理 2.1 得

$$m(r, R) = O(\log r)$$

另外由于 $f(z)$ 仅有有限个极点, 因此我们有

$$T(r, R) = m(r, R) + N(r, R) = O(\log r),$$

所以 $R(z)$ 是一个有理函数, 接下来将分以下两种子情况:

情形 1.1: 如果 $R(z) \neq 0$

由(14)可得 $f^{n-6}(fR(z)) = Q(z)$. 再次应用引理 2.1 得到 $m(r, fR(z)) = O(\log r)$, 同理 fR 极点有限, 故 $T(r, fR) = m(r, fR) + N(r, fR) = O(\log r)$, 即 fR 为有理函数, 因此 $f = (fR)/R$ 必为有理函数, 与 $f(z)$ 为超越亚纯函数矛盾.

情形 1.2: 如果 $R(z) \equiv 0$

由(15)式可得

$$A_1 f^5 + a A_1 f^3 f'' = -(A_2 \psi_1 + A_3 \psi_2 + A_4 \psi_3). \quad (16)$$

我们断言 f 只能有有限多个零点, 用反证法, 假设 f 有无穷多个零点, 任取一个零点 z_0 设其重数 $p \geq 2$ 即 $f(z_0) = (z - z_0)^p g(z)$, 其中 $g(z_0) \neq 0$, z_0 且不为(16)式系数的零点, 现在分析(16)式两边在 z_0 的零点重数。

左边项 $A_1 f^5$ 零点重数为 $5p$, 项 $a A_1 f^3 f''$ 的零点重数为 $4p - 2$, 因为 $p \geq 2$, 所以 $4p - 2 < 5p$, 因此左边整体的零点重数为 $4p - 2$ 。

右边项关键在 ψ_3 , 通过展开 $(f^n + a f^{n-2} f'')''$ 可知, 存在一项形如 $C f^{n-5} (f')^3 f''$ (C 为非零常数), 除以 f^{n-5} 后得到 $C (f')^3 f''$, 不含 f , 因此该项在 z_0 处的零点重数为 $4p - 5$, 由于 $A_4(z) \neq 0$, 且其他项含 f 的正幂项, 故右边整体重数不超过 $4p - 5$ 。

因为 $p \geq 2$, 所以 $4p - 2 > 4p - 5$, 矛盾, 当 $p = 1$ 时, 左边重数为 2, 右边重数为 -1, 左右两边零点重数不相等, 亦矛盾, 从而 f 只有有限个零点。

情形 2: 若 $D_0(z) \equiv 0$

如果 $D_0(z) \equiv 0$, 此时系数矩阵的秩小于 3。但方程组(6)有解, 因此增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩, 因此, $D_0(z)$ 的所有 3×3 子式都为零, 这意味着 $D_1(z) \equiv 0$

$$D_1(z) = \begin{vmatrix} h & p_2 & p_3 \\ h' & p_2 \alpha'_2 & p_3 \alpha'_3 \\ h'' & p_2 (\alpha''_2 + (\alpha'_2)^2) & p_3 (\alpha''_3 + (\alpha'_3)^2) \end{vmatrix} \equiv 0$$

将 $D_1(z) \equiv 0$ 展开得到:

$$M_{11}(z)h - M_{21}(z)h' + M_{31}(z)h'' = 0. \quad (17)$$

将 $h(z) = f^n + a f^{n-2} f'' + P_d(z, f)$ 带入(17)得:

$$M_{11}(f^n + a f^{n-2} f'') - M_{21}(f^n + a f^{n-2} f'')' + M_{31}(f^n + a f^{n-2} f'')'' = Q^*(z), \quad (18)$$

其中 $Q^*(z) = -[M_{11}P_d - M_{21}P_d' + M_{31}P_d'']$, 其次数不超过 d

定义:

$$\xi_1(z) = \frac{(f^n + a f^{n-2} f'')'}{f^{n-4}}, \quad \xi_2(z) = \frac{(f^n + a f^{n-2} f'')''}{f^{n-4}}.$$

将其带入(18)整理得到:

$$f^{n-4} R^*(z) = Q^*(z). \quad (19)$$

其中 $R^*(z) = M_{11}f^4 + a M_{11}f^2 f' - M_{21}\xi_1 + M_{31}\xi_2$

由于 $d \geq n - 5$, 所以 $n - 4 \geq d$, 结合引理 2.1 可得, $R^*(z)$ 为有理函数, 若 $R^*(z) \neq 0$, 则类似情形 1.1 方法推出 f 为有理函数, 故矛盾, 因此 $R^*(z) \equiv 0$, 则得到

$$M_{11}f^4 + a M_{11}f^2 f' = M_{21}\xi_1 - M_{31}\xi_2. \quad (20)$$

假设 f 有无穷多个零点, 任取一个零点 z_1 设其重数 $p \geq 2$ 即 $f(z_1) = (z - z_1)^p g(z)$ 。其中 $g(z_1) \neq 0$, 类似情形 1.2 的方法分析等式两边的零点重数不一样, 故矛盾, 因此 f 只有有限多个零点。

由于 f 是有限级超越亚纯函数, 且只有有限多个零点和极点, 由引理 2.4 (Hadamard 分解定理), f 可以表示为以下形式:

$$f(z) = q(z)e^{P(z)} \quad (21)$$

其中 $q(z)$ 是非零有理函数, $P(z)$ 是非常数多项式(若 $P(z)$ 为常数, 则 f 为有理函数, 矛盾)。

将(21)带入(4)计算得:

$$q^n e^{nP} + aq^{n-2} (q'' + 2q'p' + qp'' + q(p')^2) e^{(n-1)P} + P_d(z, qe^P) = \sum_{j=1}^3 p_j e^{\alpha_j(z)} \quad (22)$$

由于 P_d 关于 f 及其导数的微分多项式, 且 $f(z) = q(z)e^{P(z)}$, 其任意阶导数均可写成 e^P 乘以关于 $q, q', \dots, p, p', p'', \dots$ 的有理函数, 故 $P_d(z, qe^P)$ 可表示为:

$$P_d(z, qe^P) = \sum_{m=0}^d \beta_m(z) e^{mP(z)} \quad (23)$$

其中 β_m 为有理函数, 结合(22)得到:

$$q^n e^{nP} + aq^{n-2} (q'' + 2q'p' + qp'' + q(p')^2) e^{(n-1)P} + \sum_{m=0}^d \beta_m(z) e^{mP(z)} = \sum_{j=1}^3 p_j e^{\alpha_j(z)} \quad (24)$$

由引理 2.3 得, $e^{nP}, e^{(n-1)P}, e^{mP}$ 与 e^{α_i} 线性独立, 除非指数成比例, 因此存在正整数 i_1, i_2, i_3 , 使得 $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1, 2, 3\}$, 整数 $j (0 \leq j \leq d)$ 满足

$$nP(z) = \alpha_{i_1}(z) + C_1, \quad (n-1)P(z) = \alpha_{i_2}(z) + C_2, \quad jP(z) = \alpha_{i_3}(z) + C_3. \quad (25)$$

其中 C_1, C_2, C_3 为常数, 对(25)分别求导, 常数项消失, 故得到:

$$nP'(z) = \alpha'_{i_1}(z), \quad (n-1)P'(z) = \alpha'_{i_2}(z), \quad jP'(z) = \alpha'_{i_3}(z). \quad (26)$$

由此可得比例关系:

$$\alpha'_{i_1}(z) : \alpha'_{i_2}(z) : \alpha'_{i_3}(z) = n : (n-1) : j. \quad (27)$$

由于比值为常数, 此推出, $\alpha_1(z), \alpha_2(z), \alpha_3(z)$ 均为一次多项式。故设

$$\alpha_{i_1}(z) = n\beta z + c_1, \quad \alpha_{i_2}(z) = (n-1)\beta z + c_2, \quad \alpha_{i_3}(z) = j\beta z + c_3, \quad (28)$$

其中 $\beta \neq 0, c_1, c_2, c_3$ 为常数。

代入(28)式第一个式子得到

$$nP(z) = n\beta z + c_1 + C_1, \quad P(z) = \beta z + \gamma, \quad (29)$$

其中 $\gamma = (c_1 + C_1)/n$ 。

将 $P(z) = \beta z + \gamma$ 带入原方程并结合(28)匹配指数, 比较系数得到:

$$q(z)^n = p_{i_1} e^{-C_1}, \quad aq(z)^{n-2} (q'(z) + q(z)\beta) = p_{i_2} e^{-C_2}, \quad \beta_j(z) = p_{i_3} e^{-C_3}, \quad (30)$$

由于 $q(z)^n$ 为常数, 故 $q(z)$ 必为常数, 记 $q(z) = C$ (非零常数), 则 $q'(z) = 0$, 调整常数, 可设

$$C^n = p_{i_1}, \quad aC^{n-1}\beta = p_{i_2}, \quad \beta_j = p_{i_3}. \quad (31)$$

其中 $\beta_j(z)$ 是微分多项式 $P_d(z, Ce^{\beta z})$ 中对应 $e^{j\beta z}$ 项的系数, 其他 $\beta_m \equiv 0$, 故

$$P_d(z, Ce^{\beta z}) = p_{i_3} e^{\alpha_{i_3}(z)}. \quad (32)$$

至此, 定理 A 完全得证。

4. 结论

本文研究了带导数项 $af^{n-2}f''$ 的非线性微分方程, 在 $a \neq 0$ 且 $a_j(z)$ 为非常数多项式的条件下, 证明了该方程存在有限极点的超越亚纯解, 则解必为简单的指数函数, $a_j(z)$ 必须退化为一次多项式, 其导数之间满足严格的比例关系: $n:(n-1):j$ 。该结果推广了经典的 Li-Yang 型定理, 此类方程也应用数学物理中的若干模型, 未来可探讨 $k > 3$ 的情形。

参考文献

- [1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press.
- [2] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag.
- [3] Li, P. (2011) Entire Solutions of Certain Type of Differential Equations II. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **375**, 310-319. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.09.026>
- [4] Liao, L., Yang, C. and Zhang, J. (2013) On Meromorphic Solutions of Certain Type of Non-Linear Differential Equations. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, **38**, 581-593. <https://doi.org/10.5186/aasfm.2013.3840>
- [5] Lu, X.Q., Liao, L.W. and Wang, J. (2017) On Meromorphic Solutions of a Certain Type of Nonlinear Differential Equations. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **33**, 1597-1608. <https://doi.org/10.1007/s10114-017-6484-9>
- [6] Liu, H. and Mao, Z. (2020) Meromorphic Solutions of Certain Types of Non-Linear Differential Equations. *Computational Methods and Function Theory*, **20**, 319-332. <https://doi.org/10.1007/s40315-020-00313-0>
- [7] Chen, J.F. and Lian, G. (2020) Expressions of Meromorphic Solutions of a Certain Type of Nonlinear Complex Differential Equations. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **57**, 1061-1073.
- [8] 陈敏风, 陈宗煊. 某类非线性微分方程的亚纯解[J]. 数学学报(中文版), 2023, 66(6): 1205-1220.
- [9] Clunie, J. (1962) On Integral and Meromorphic Functions. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 17-27. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-37.1.17>
- [10] Mirsky, L. (1955) An Introduction to Linear Algebra. The Clarendon Press.
- [11] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Springer Science & Business Media.