Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(3), 103-111
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.163074

基于Picard迭代的Conformable分数阶微分方程初值问题的存在唯一性研究

于子豪

北方工业大学理学院，北京

收稿日期：2025年12月24日；录用日期：2026年2月9日；发布日期：2026年3月16日

摘　要

本文利用常微分方程理论中典型的Picard迭代方法研究了一类conformable分数阶微分方程的初值问题连续解的存在唯一性结论。利用conformable分数阶导数的基本性质，我们得到了一个积分方程的连续解一定是该conformable分数阶微分方程的初值问题的连续解的结论，并基于此结论通过积分方程构造了Picard迭代序列。通过证明该迭代序列在给定区间上一致收敛，我们得到了该conformable分数阶微分方程的初值问题存在唯一的连续解的结论。

关键词

Conformable分数阶导数，Picard迭代方法，连续解，初值问题，存在唯一性

Existence and Uniqueness of Solutions for Initial Value Problems of Conformable Fractional Differential Equations via Picard Iteration

Zihao Yu

College of Science, North China University of Technology, Beijing

Received: December 24, 2025; accepted: February 9, 2026; published: March 16, 2026

Abstract

This paper employs the classical Picard iteration method in the theory of ordinary differential equations to study the existence and uniqueness of continuous solutions to the initial value problem for

文章引用: 于子豪. 基于 Picard 迭代的 Conformable 分数阶微分方程初值问题的存在唯一性研究[J]. 理论数学, 2026, 16(3): 103-111. DOI: 10.12677/pm.2026.163074

a class of conformable fractional differential equations. Using the basic properties of the conformable fractional derivative, we show that any continuous solution to the corresponding integral equation must be a continuous solution to the initial value problem of the conformable fractional differential equation. On this basis, the Picard iterative sequence is constructed via the integral equation. By proving that the iterative sequence converges uniformly on a given interval, we establish the existence and uniqueness of continuous solutions to the initial value problem of the conformable fractional differential equation.

Keywords

Conformable Fractional Derivative, Picard Iteration, Continuous Solution, Initial Value Problem, Existence and Uniqueness

1. 引言

在 2014 年，Khalil [1]等人提出了 conformable 分数阶导数，可视为经典导数的自然推广。具体的定义方式如下：

设 $0<\alpha\le 1$，若函数 $x(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，则其 conformable 分数阶导数定义为

$$(D^{\alpha}x)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0^{+}}\frac{x\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)-x(t)}{\varepsilon},\quad t>0,$$

在 $t=0$ 处的导数定义为

$$D_{\alpha}f(0)=\lim_{x\to 0^{+}}(D_{\alpha}f)(t),$$

当 x 可导时，有

$$D^{\alpha}x(t)=t^{1-\alpha}x'(t).$$

近年来，conformable 分数阶微分方程在分数阶动力系统研究中受到较多关注[2]-[4]。在文献[5]中，作者通过上下解与单调迭代方法得到了一类 conformable 分数阶微分方程的周期边值问题极值解的存在性的结论。在文献[6]中，作者运用不动点定理论证了一类 conformable 分数阶微分方程的带有 Riemann-Stieltjes 积分边界条件的边值问题解的存在性结论。这些结果丰富了 conformable 分数阶微分方程的理论分析结果，为后续进一步研究提供了参考。

另一方面，在常微分方程的基础理论中，Picard 迭代法是证明初值问题存在唯一性的重要工具[7]-[9]。该方法一般是将所考虑的微分方程转化为等价的积分方程，并据该积分方程构造 Picard 迭代序列，并且用分析方法证明该序列在给定区间上的一致收敛性，进而得到积分方程存在的唯一解，从而得到所考虑的微分方程的问题的解的存在唯一性结论。Picard 迭代的优势在于方法清晰、结构简单，且能给出具体的逼近序列，是常微分方程理论中最基础而有效的证明手段之一。

需要指出的是，conformable 分数阶导数与经典的 Riemann-Liouville 导数和 Caputo 导数在本质上是不同的。后两者的定义依赖于分数阶积分，而 conformable 导数则是一类局部型导数。

对于可导函数，conformable 分数阶微分方程

$$D^{\alpha}x(t)=f\left(t,x(t)\right)$$

可以等价的转化为带系数的常微分方程

$$x'(t)=t^{\alpha-1}f\left(t,x(t)\right)$$

基于以上文献与内容的启发，本文运用 Picard 迭代法讨论一类 conformable 分数阶微分方程初值问题

$$D^{\alpha}x(t)=f\left(t,x(t)\right),\ 0\le t\le T,\ x(0)=x_0,$$

其中 f 在带型区域 $0\le t\le T, x\in R$ 内连续并关于第二个变量满足 Lipschitz 条件。本文基于常微分方程[10]与数学分析[11]教材中的知识，加以适当的拓展，得到了关于此类分数阶微分方程初值问题连续解的存在唯一性定理。

2. 主要结论

定理：如果 $t^{r}f\left(t,x(t)\right)(0<r<1)$ 在带型区域 $0\le t\le T,\ x\in R$ 内连续且关于 x 满足 Lipschitz 条件，即对任意 $0\le t\le T$， $x_1,x_2\in R$ 存在常数 $L>0$，使得

$$t^{r}\left|f\left(t,x_1(t)\right)-f\left(t,x_2(t)\right)\right|\le L\left|x_1(t)-x_2(t)\right|.$$

则 conformable 分数阶微分方程初值问题

$$\begin{cases}D^{\alpha}x(t)=f\left(t,x(t)\right),\ 0<t\le T,\ 0<\alpha<1,\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

在 $0\le t\le T$ 上存在唯一的连续解 $x=x(t)$， $0\le t\le T$ 。

证明：本定理的证明分五步来完成。

第一步：证明积分方程

$$x(t)=x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s,\ 0\le t\le T.\tag{2}$$

的连续解 $x=x(t), t\in[0,T]$ 为微分方程初值问题(1)的连续解。

令连续函数 $x=x(t)$， $0\le t\le T$ ，是积分方程(2)的解，即满足

$$x(t)=x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s,\ 0\le t\le T.$$

对上式两边求导，有

$$x'(t)=t^{\alpha-1}f\left(t,x(t)\right),\ 0<t\le T.$$

即

$$t^{1-\alpha}x'(t)=f\left(t,x(t)\right),\ 0<t\le T.$$

根据 conformable 型分数阶导数的基本性质定义，则有

$$D^{\alpha}x(t)=t^{1-\alpha}x'(t)=f\left(t,x(t)\right),\ 0<t\le T.$$

即 $x(t)$ 满足初值问题(2)的微分方程。

对于确定的连续函数 $x=x(t)$，由 $t^{r}f\left(t,x(t)\right)$ 的连续性知，存在常数 $M>0$，使得对所有的 $0\le t\le T$，

有

$$\left|t^r f\left(t,x\left(t\right)\right)\right|\le M.$$

所以对所有的$0\le t\le T$，有

$$\left|\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\right|\le M\int_0^t s^{\alpha-1-r}\mathrm{d}s=\frac{M}{\alpha-r}t^{\alpha-r}$$

故当$t=0$时，有$x\left(0\right)=x_0+0=x_0$。故$x\left(t\right)$满足初值问题(1)的初值条件。

综上，积分方程(2)的连续解$x=x\left(t\right),0\le t\le T$，为初值问题(1)的连续解，第一步得证。

取$x_0\left(t\right)=x_0$，构造 Pichard 逐步逼近函数序列如下：

$$\begin{cases}x_0\left(t\right)=x_0,\ 0\le t\le T,\\ x_n\left(t\right)=x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x_{n-1}\left(s\right)\right)\mathrm{d}s,\ 0\le t\le T\left(n=1,2,\cdots\right).\end{cases}\tag{3}$$

第二步：证明对所有的n，(3)中定义的函数$x_n\left(t\right)$在$0\le t\le T$上有定义且连续。

由$t^r f\left(t,x\left(t\right)\right)$的连续性知，存在常数$M_1>0$，对所有的$0\le t\le T$，满足

$$\left|t^r f\left(t,x_0\right)\right|\le M_1.$$

当$n=1$时，有

$$\left|\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x_0\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\right|\le M_1\int_0^t s^{\alpha-1-r}\mathrm{d}s=\frac{M_1 t^{\alpha-r}}{\alpha-r}.$$

当$t\to0$时，易知$\dfrac{M_1 t^{\alpha-r}}{\alpha-r}\to0$故$x_1\left(t\right)$在$t=0$处有定义且连续。

对任意的$t,t_0\in\left(0,T\right]$，有

$$\begin{aligned}\left|x_1\left(t\right)-x_1\left(t_0\right)\right|&=\left|\int_{t_0}^t s^{\alpha-1}f\left(s,x_0\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\right|\\&\le\frac{M_1}{\alpha-r}\left|t^{\alpha-r}-t_0^{\alpha-r}\right|.\end{aligned}$$

由$t^{\alpha-r}$的连续性知，$x_1\left(t\right)$在t_0处有定义且连续。因此，当$n=1$时，函数$x_1\left(t\right)$在区间$0\le t\le T$上有定义且连续。

设当$n=k$时，函数$x_k\left(t\right)$在$0\le t\le T$上有定义且连续，则对于$n=k+1$时，

$$x_{k+1}\left(t\right)=x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x_k\left(s\right)\right)\mathrm{d}s,\quad 0\le t\le T.$$

由$x_k\left(t\right)$及$t^r f\left(t,x_k\left(t\right)\right)$在$0\le t\le T$上的连续，用上面类似方法可证，$x_{k+1}\left(t\right)$在$0\le t\le T$上有定义且连续。所以，由数学归纳法知对所有的$n$，函数$x_n\left(t\right)$在$0\le t\le T$上有定义且连续，第二步得证。

第三步：证明函数序列$\left\{x_n\left(t\right)\right\}$在区间$0\le t\le T$上一致收敛。

要证明函数$x_n\left(t\right)$在区间$0\le t\le T$上的一致收敛性，只需证明函数级数

$$x_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_k\left(t\right)-x_{k-1}\left(t\right)\right],0\le t\le T$$

在$0\le t\le T$上一致收敛。

下面我们证明对任意的正整数n，所有的$0\le t\le T$，有

$$\left|x_n\left(t\right)-x_{n-1}\left(t\right)\right|\le\frac{M_1L^{n-1}}{\left(\alpha-r\right)^n}\frac{t^{n(\alpha-r)}}{n!}$$

成立。

由(3)可得，当 $k=1$ 时，对所有的 $0\le t\le T$ ，有

$$\begin{aligned}\left|x_1(t)-x_0(t)\right| &= \left|\int_0^t s^{\alpha-1} f\left(s,x_0(s)\right)\mathrm{d}s\right|\\ &\le M_1\int_0^t s^{\alpha-1-r}\mathrm{d}s\\ &= \frac{M_1 t^{\alpha-r}}{\alpha-r}.\end{aligned}$$

当 $k=2$ 时，对所有的 $0\le t\le T$ ，有

$$\left|x_2(t)-x_1(t)\right| = \int_0^t s^{\alpha-1}\left|f\left(s,x_1(s)\right)-f\left(s,x_0(s)\right)\right|\mathrm{d}s.$$

再根据 Lipschitz 条件，可得

$$\begin{aligned}\left|x_2(t)-x_1(t)\right| &\le \int_0^t s^{\alpha-1}\left|f\left(s,x_1(s)\right)-f\left(s,x_0(s)\right)\right|\mathrm{d}s\\ &\le L\int_0^t s^{\alpha-r-1}\left|x_1(s)-x_0(s)\right|\mathrm{d}s\\ &= \frac{M_1 L}{\alpha-r}\int_0^t s^{2(\alpha-r)-1}\mathrm{d}s\\ &= \frac{M_1 L t^{2(\alpha-r)}}{2!(\alpha-r)^2}.\end{aligned}$$

同理，当 $k=3$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|x_3(t)-x_2(t)\right| &\le L\int_0^t s^{\alpha-r-1}\left|x_2(s)-x_1(s)\right|\mathrm{d}s\\ &\le \frac{M_1 L^2}{2!(\alpha-r)^2}\int_0^t s^{3(\alpha-r)-1}\mathrm{d}s\\ &= \frac{M_1 L^2 t^{3(\alpha-r)}}{3!(\alpha-r)^3}.\end{aligned}$$

假设对正整数 $n=k$ ，对所有的 $0\le t\le T$ 时，有不等式

$$\left|x_k(t)-x_{k-1}(t)\right| \le \frac{M_1 L^{k-1}}{(\alpha-r)^k}\frac{t^{k(\alpha-r)}}{k!}$$

成立，则 $n=k+1$ 时，由(3)式、上述假设以及 Lipschitz 条件，对所有的 $0\le t\le T$ 时，可得

$$\begin{aligned}\left|x_{k+1}(t)-x_k(t)\right| &\le L\int_0^t s^{\alpha-r-1}\left|x_k(s)-x_{k-1}(s)\right|\mathrm{d}s\\ &\le \frac{M_1 L^k}{(\alpha-r)^{k+1}}\frac{t^{(k+1)(\alpha-r)}}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

由数学归纳法可知，对任意的正整数 n ，所有的 $0\le t\le T$ ，有

$$\left|x_n(t)-x_{n-1}(t)\right| \le \frac{M_1 L^{n-1}}{(\alpha-r)^n}\cdot\frac{t^{n(\alpha-r)}}{n!}$$

成立，由数学分析的理论知识可得数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_1 L^{n-1} T^{n(\alpha-r)}}{n!(\alpha-r)^n}$ 收敛，故函数项级数

$$x_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[x_k(t)-x_{k-1}(t)\right],\ 0\le t\le T$$

在 $0\le t\le T$ 上一致收敛。

因此函数序列 $\{x_n(t)\}$ 在 $0\le t\le T$ 上一致收敛，第三步得证。

设

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t),\ 0\le t\le T$$

则 $x(t)$ 在 $0\le t\le T$ 上连续。

第四步：证明 $x(t)$ $(0\le t\le T)$ 是积分方程(2)的连续解。

由上述证明可知 $\{x_n(t)\}$ 在 $0\le t\le T$ 上一致收敛于 $x(t)$，再由 $t^r f(t,x(t))$ 的连续性，可知 $\{t^r f(t,x_n(t))\}$ 在 $0\le t\le T$ 上一致收敛于 $t^r f(t,x(t))$。因而，对(3)两端取极限，可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n(t)&=x_0+\lim_{n\to\infty}\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s\\&=x_0+\int_0^t\lim_{n\to\infty}s^{\alpha-1}f\left(s,x_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s\\&=x_0+\int_0^t s^{\alpha-r-1}\lim_{n\to\infty}s^r f\left(s,x_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s\\&=x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

即

$$x(t)=x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s,0\le t\le T$$

故 $x(t)$ 是积分方程(2)定义在 $0\le t\le T$ 上的连续解。第四步得证。

第五步：证明 $x(t)$， $0\le t\le T$ ，是积分方程(2)的唯一解

设 $y(t)$ 是积分方程(2)的另一个连续解，则有

$$y(t)=x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,y(s)\right)\mathrm{d}s,0\le t\le T.$$

要证明 $x(t)=y(t),0\le t\le T$ ，只需证明 $y(t)$ 也是函数序列 $\{x_n(t)\}$ 的一致收敛极限级数。现将函数序列 $\{x_n(t)\}$ 的每一项

$$x_0(t)=x_0,\ 0\le t\le T$$

$$x_n(t)=x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,x_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s,\ 0\le t\le T\left(n=1,2,\cdots\right)$$

与

$$y(t)=x_0+\int_0^t s^{\alpha-1}f\left(s,y(s)\right)\mathrm{d}s,\ 0\le t\le T$$

进行估计。接下来证明对于任意的正整数 n ，对所有的 $0\le t\le T$ ，有

$$\left|x_n(t)-y(t)\right|\le\frac{M_2L^n}{(\alpha-r)^{n+1}}\frac{t^{(n+1)(\alpha-r)}}{(n+1)!}.$$

对于确定的连续函数 $y(t)$ ，由 $t^r f(t,y(t))$ 的连续性知，存在常数 $M_2>0$ ，使得对所有的 $0\le t\le T$ ，有

$$\left|t^r f\left(t,y(t)\right)\right|\le M_2.$$

则对所有的 $0 \le t \le T$，有

$$\left|x_0(t)-y(t)\right| \le M_2\int_0^t s^{\alpha-r-1}\mathrm{d}s=\frac{Mt^{\alpha-r}}{\alpha-r}$$

$$\begin{aligned}\left|x_1(t)-y(t)\right| &= \int_0^t s^{\alpha-1}\left|f\left(s,x_0(s)\right)-f\left(s,y(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\ &\le L\int_0^t s^{\alpha-r-1}\left|x_0(s)-y(s)\right|\mathrm{d}s \\ &= \frac{M_2L}{(\alpha-r)^2}\frac{t^{2(\alpha-r)}}{2!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|x_2(t)-y(t)\right| &= \int_0^t s^{\alpha-1}\left|f\left(s,x_1(s)\right)-f\left(s,y(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\ &\le L\int_0^t s^{\alpha-r-1}\left|x_1(s)-y(s)\right|\mathrm{d}s \\ &= \frac{M_2L^2}{(\alpha-r)^3}\frac{t^{3(\alpha-r)}}{3!},\end{aligned}$$

设当 $n=k-1$ 时，对所有的 $0 \le t \le T$，有

$$\left|x_{k-1}(t)-y(t)\right| \le \frac{M_2L^{k-1}}{(\alpha-r)^k}\frac{t^{k(\alpha-r)}}{k!},$$

则 $n=k$ 时，对所有的 $0 \le t \le T$，有

$$\begin{aligned}\left|x_k(t)-y(t)\right| &= \int_0^t s^{\alpha-1}\left|f\left(s,x_{k-1}(s)\right)-f\left(s,y(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\ &\le L\int_0^t s^{\alpha-r-1}\cdot\frac{M_2L^{k-1}}{(\alpha-r)^k}\frac{s^{k(\alpha-r)}}{k!}\mathrm{d}s \\ &= \frac{M_2L^k}{(\alpha-r)^k k!}\int_0^t s^{(k+1)(\alpha-r)-1}\mathrm{d}s \\ &= \frac{M_2L^k t^{(k+1)(\alpha-r)}}{(\alpha-r)^{k+1}(k+1)!}.\end{aligned}$$

由数学归纳法可知，对于任意的正整数 n，对所有的 $0 \le t \le T$，有

$$\left|x_n(t)-y(t)\right| \le \frac{M_2L^n}{(\alpha-r)^{n+1}}\frac{t^{(n+1)(\alpha-r)}}{(n+1)!}.$$

由于 $\frac{M_2L^n}{(\alpha-r)^{n+1}}\frac{T^{(n+1)(\alpha-r)}}{(n+1)!}$ 为收敛级数的一般项，则当 $n\to\infty$ 时，有 $\left|x_n(t)-y(t)\right|\to 0$，故 $\left\{x_n(t)\right\}$ 在 $0 \le t \le T$ 上一致收敛于 $y(t)$，由极限的唯一性，可得

$$x(t)=y(t),\ 0 \le t \le T,$$

故 $x(t)(0 \le t \le T)$ 是积分方程(2)的唯一连续解。第五步得证。

综上所述，$x(t)(0 \le t \le T)$ 微分方程初值问题(1)存在唯一的连续解 $x(t)(0 \le t \le T)$，定理得证。

不难看出，当 $0<\alpha<1$ 时，权函数 $s^{\alpha-1}$ 在 $s\to 0^+$ 时趋向于无穷大，但由于

$$\int_0^t s^{\alpha-1}\mathrm{d}s=\frac{t^\alpha}{\alpha}<\infty$$

从而积分项在 $t=0$ 附近是仍然有意义的，因此得到的解 $x(t)$ 在 $[0,T]$ 上仍然连续。

另一方面，由积分方程可得

$$x'(t)=t^{\alpha-1}f\left(t,x(t)\right).$$

这意味着当 $t\to 0^{+}$ 时解的导数 $x'(t)$ 仍可能是无界的。因此，该问题的解在 $t=0$ 连续，但其导数不一定有界，这是由分数阶权函数的奇异性所导致的正常现象，不影响前述存在唯一性结论的成立。

3. 近似计算和误差估计

存在唯一性定理的证明不仅肯定了解的存在唯一性，并且在证明的过程中采用的逐步逼近法也是求近似解的一种方法，由证明过程中得到的

$$\left|x_n(t)-y(t)\right|\le\frac{M_2L^n}{(\alpha-r)^{n+1}}\frac{t^{(n+1)(\alpha-r)}}{(n+1)!}.$$

也可作为第 n 次近似解 $x_n(t)$ 与真正解 $y(t)$ 在 $0\le t\le T,x\in R$ 这一带型区域内的误差估计式。

下面给出一个例子：方程

$$f(t,x)=t^{-1/4}\frac{1+x}{1+x^2},\quad \alpha=\frac{3}{4},T=1,$$

希望利用存在唯一性定理确定在矩形区域 $0<t\le 1,x\in R$ 。经过点 $(0,0)$ 的误差不超过 1 的解的表达式。

在本例子中，$\alpha=\frac{3}{4}$，Lipschitz 条件中的 r 可为 $\frac{1}{4}$，具体如下：

$$t^{1/4}\left|f(t,x_1)-f(t,x_2)\right|=t^{1/4}\left|t^{-1/4}\frac{1+x_1}{1+x_1^2}-t^{-1/4}\frac{1+x_2}{1+x_2^2}\right|=\left|\frac{1+x_1}{1+x_1^2}-\frac{1+x_2}{1+x_2^2}\right|.$$

令 $g(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$，则只需证明 $g(x)$ 在 R 内满足 Lipschitz 条件，由

$$g'(x)=\frac{1-2x-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

可知，L 可取为

$$L=\sup_{x\in R}\left|g'(x)\right|=\frac{5+3\sqrt{3}}{8}$$

从而方程 $f(x,t)$ 在 $0\le t\le 1,x\in R$ 内满足

$$t^{r}\left|f\left(t,x_1(t)\right)-f\left(t,x_2(t)\right)\right|\le L\left|x_1(t)-x_2(t)\right|.$$

由定理(1)可知，方程存在唯一解，其中 $M_2=1$，满足

$$t^{\frac{1}{4}}\left|t^{-\frac{1}{4}}\frac{x_0+1}{x_0^2+1}\right|\le M_2.$$

根据估计式，有

$$\left|x_n(t)-x(t)\right|\le\frac{M_2L^n}{(\alpha-r)^{n+1}}\frac{T^{(n+1)(\alpha-r)}}{(n+1)!}\le 1.$$

在本例中，$\alpha=\frac{3}{4},r=\frac{1}{4},L=\frac{5+3\sqrt{3}}{8},M_2=1,T=1$，便有

$$\left|x(t)-x_n(t)\right|\le M_2L^nT^{(n+1)(\alpha-r)}\cdot\frac{1}{(\alpha-r)^{n+1}(n+1)!}=1\cdot 2^{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{5+3\sqrt{3}}{8}\right)^n}{(n+1)!}\le 1.$$

计算得到$n=4$，于是根据前文的推导，可以得到如下的近似表达式：

$$\begin{cases}x_{n+1}(t)=\int_0^t s^{-\frac{1}{2}}\frac{1+x_n(s)}{1+x_n(s)^2}\mathrm{d}s, & 0<t\le 1,\\ x_0(t)=0.\end{cases}$$

有

$$x_1(t)=2\sqrt{t}.$$

$$x_2(t)=\arctan\left(2\sqrt{t}\right)+\frac{1}{2}\ln(1+4t).$$

$$x_3(t)\approx 2t^{1/2}+2t-\frac{4}{3}t^{3/2}-\frac{28}{3}t^2-\frac{32}{15}t^{5/2}+\frac{2056}{45}t^3+\frac{18416}{315}t^{7/2}-\frac{7216}{35}t^4-\frac{108256}{189}t^{9/2}.$$

$$x_4(t)\approx 2t^{1/2}+2t-\frac{4}{3}t^{3/2}-\frac{26}{3}t^2-\frac{32}{5}t^{5/2}+\frac{1928}{45}t^3+\frac{6752}{63}t^{7/2}-\frac{2872}{21}t^4-\frac{943232}{945}t^{9/2}.$$

此时误差如下

$$\left|x_4(t)-x(t)\right|\le\frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot 32\cdot\frac{\left(5+3\sqrt{3}\right)^4}{8^4\cdot 120}=0.7036\le 1.$$

满足要求。

参考文献

[1] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M. (2014) A New Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **264**, 65-70. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002

[2] Qi, Y. and Wang, X. (2019) Asymptotical Stability Analysis of Conformable Fractional Systems. *Journal of Taibah University for Science*, **14**, 44-49. https://doi.org/10.1080/16583655.2019.1701390

[3] Basdouri, I., Kasmi, S. and Lerbet, J. (2025) Stability Analysis of Conformable Fractional Order Systems. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **40**, 752-762. https://doi.org/10.1007/s11766-025-4851-3

[4] Souahi, A., Ben Makhlouf, A. and Hammami, M.A. (2017) Stability Analysis of Conformable Fractional-Order Nonlinear Systems. *Indagationes Mathematicae*, **28**, 1265-1274. https://doi.org/10.1016/j.indag.2017.09.009

[5] Chen, H.L., Meng, S.M. and Cui, Y.J. (2020) Monotone Iterative Technique for Conformable Fractional Differential Equations with Deviating Arguments. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2020**, Article ID: 5827127. https://doi.org/10.1155/2020/5827127

[6] Meng, S.M. and Cui, Y.J. (2019) The Extremal Solution to Conformable Fractional Differential Equations Involving Integral Boundary Condition. *Mathematics*, **7**, Article No. 186. https://doi.org/10.3390/math7020186

[7] Makarov, E. and Spitters, B. (2013) The Picard Algorithm for Ordinary Differential Equations in Coq. In: Blazy, S., Paulin-Mohring, C. and Pichardie, D., Eds., *Interactive Theorem Proving* (*ITP* 2013), Springer, 463-468. https://doi.org/10.1007/978-3-642-39634-2_34

[8] Atangana, A. and Mishra, J. (2023) Analysis of Nonlinear Ordinary Differential Equations with the Generalized Mittag-Leffler Kernel. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **20**, 19763-19780. https://doi.org/10.3934/mbe.2023875

[9] Hartman, P. (1964) Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons.

[10] 王高雄. 常微分方程[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[11] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.