

一类特殊分块矩阵的Drazin逆

盘子洋*, 秦莹莹#

五邑大学数学与计算科学学院, 广东 江门

收稿日期: 2025年12月25日; 录用日期: 2026年1月23日; 发布日期: 2026年2月5日

摘 要

Drazin逆是矩阵理论中不可或缺的一部分, 在众多应用领域中具有重要的作用。本文通过应用两个矩阵乘积的Drazin逆的正序律, 研究了秩可加性条件下一类 2×2 分块矩阵的Drazin逆, 给出了其Drazin逆的若干新表达式。

关键词

Drazin逆, 群逆, 正序律, 分块矩阵, 秩等式

Drazin Inverses of a Special Class of Block Matrices

Ziyang Pan*, Yingying Qin#

School of Mathematics and Computational Science, Wuyi University, Jiangmen Guangdong

Received: December 25, 2025; accepted: January 23, 2026; published: February 5, 2026

Abstract

Drazin inverse is an indispensable part of matrix theory and plays an important role in many application fields. This article studies the Drazin inverse of a class 2×2 block matrix under rank additivity conditions, by applying the forward order law for Drazin inverse of the product of two matrices. In addition, we present some new representations of the Drazin inverse of these 2×2 block matrices with some rank additivity conditions.

Keywords

Drazin Inverse, Group Inverse, Forward Order Law, Block Matrix, Rank Equality

*第一作者。

#通讯作者。



1. 引言及预备知识

在本文中, $C^{m \times n}$ 表示复数域 C 上所有 $m \times n$ 矩阵的集合。 I_k 表示 k 阶单位矩阵, $O_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 阶零矩阵的全体(若无歧义, 下标可省略)。对于矩阵 $A \in C^{m \times n}$ 来说, $A^*, R(A), r(A)$ 分别表示其共轭转置矩阵、值域和秩, 参见文献[1]-[3]。

若 A 是 $n \times n$ 复矩阵, 则存在唯一的矩阵 X 满足以下等式:

$$A^{k+1}X = A^k, \quad XAX = X, \quad AX = XA.$$

此时称 X 为 A 的 Drazin 逆记为 $X = A^D$, 其中 k 是满足 $r(A^k) = r(A^{k+1})$ 的最小非负整数, 称为 A 的指标(记为 $k = \text{Ind}(A)$)。特别地, 当 $k = 1$ 时, 矩阵 X 称为 A 的群逆, 记为 $X = A^s$ 。若 A 非奇异, 则显然有 $A^D = A^{-1}$, 参见文献[4]。

Drazin 逆的理论在过去几十年间取得长足发展。矩阵的 Drazin 逆广泛地应用于矩阵方程近似求解、微分方程数值解、应用统计学、马尔可夫链、密码学、迭代方法以及多体系统动力学等领域的大规模科学计算当中, 相关研究可参见文献[1]-[3]。

尽管 Drazin 逆的理论与应用研究取得了较大的进步, 但关于 Drazin 逆的许多基本问题仍需进一步探究。众所周知, Drazin 逆的应用中, 往往涉及到一个关键问题: 即下述 2×2 分块矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

的 Drazin 逆的表达式研究。在早期文献[5] [6]中, 学者们通过矩阵 Φ 的分块形式推导了 Φ 的条件逆、Moore-Penros 逆或 $\{1\}$ -逆的通用表达式。20 世纪 60 年代中期以来, Φ 的广义逆的应用受到诸多学者关注, 例如: Nobel [7]、Miao [8]等相关文献。近年来, Φ 的 Drazin 逆理论与应用研究得到了长足的发展, 逐渐成为了一个热点的前沿研究课题, 参见文献[1]-[3]。

在本文中, 通过利用两个矩阵乘积的 Drazin 逆的正序律, 我们将在适当条件下揭示特定的 2×2 分块矩阵的 Drazin 逆与其各个子块的 Drazin 逆之间的关系。

以下的引理在文章后面的讨论起着关键作用。

引理 1 [1] 设 $A_i \in C^{m \times m}$, $i = 1, 2$, 且 $A = A_1 A_2$, 且 $k = \max\{\text{Ind}(A_1), 1, \text{Ind}(A)\}$, 再设 $X = A_1^D A_2^D$ 。则下列表述等价:

- (1) $A^D = (A_1 A_2)^D = A_1^D A_2^D = X$,
- (2) $r \begin{pmatrix} A^{2k+1} & A^k E_1 \\ E_2 A^k & N \end{pmatrix} = r(A^k) + r(A_1^k) + r(A_2^k)$,

其中 $E_1 = \begin{pmatrix} O & O & I_m \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} O & O & I_m \end{pmatrix}^*$ 且 $N = \begin{pmatrix} O & A_2^{2k+1} & A_2^k \\ A_1^{2k+1} & A_1^k A_2^k & O \\ A_1^k & O & O \end{pmatrix}$ 。

2. 主要结果

本节通过利用两个矩阵乘积的 Drazin 逆的正序律, 研究了在适当条件下特定 2×2 分块矩阵的 Drazin 逆与其各子块的 Drazin 逆之间的关系。相关结论如下:

定理 1 设 $A, B \in C^{m \times m}$ 和 $k = \max \left\{ \text{Ind}(A), \text{Ind}(B), 1, \text{Ind} \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix} \right\}$ 。则下列表述等价:

- (1) $\begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} A^D & B^D \\ O & O \end{pmatrix}$;
- (2) $r \begin{pmatrix} A^{2k+1} & A^{2k}B & O & A^{k-1}B \\ O & O & B^{2k+1} & B^k \\ A^k & A^{k-1}B & -B^k & O \end{pmatrix} = r(A^k, A^{k-1}B) + r(B^k)$.

证明: 由矩阵的性质可知

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}^D = \left[\begin{pmatrix} I_m & I_m \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \right]^D. \quad (2.1)$$

利用引理 1, 令 $A_1 = \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ O & O \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$ 和 $W = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}$, 可得

$$W^k = (A_1 A_2)^k = \begin{pmatrix} A^k & A^{k-1}B \\ O & O \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

同时, 可知下列正序律:

$$W^D = (A_1 A_2)^D = \left[\begin{pmatrix} I_m & I_m \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \right]^D = \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ O & O \end{pmatrix}^D \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^D \quad (2.3)$$

成立, 当且仅当

$$\begin{aligned} & r \begin{pmatrix} A^{2k+1} & A^{2k}B & O & O & O & O & A^k & A^{k-1}B \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ O & O & O & O & A^{2k+1} & O & A^k & O \\ O & O & O & O & O & B^{2k+1} & O & B^k \\ O & O & I_m & I_m & A^k & B^k & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \\ A^k & A^{k-1}B & I_m & I_m & O & O & O & O \\ O & O & O & O & O & O & O & O \end{pmatrix} \\ &= r(A^k, A^{k-1}B) + r(A^k) + r(B^k) + m \\ &\Leftrightarrow r \begin{pmatrix} A^{2k+1} & A^{2k}B & O & A^{k-1}B \\ O & O & B^{2k+1} & B^k \\ A^k & A^{k-1}B & -B^k & O \end{pmatrix} = r(A^k, A^{k-1}B) + r(B^k). \end{aligned} \quad (2.4)$$

另一方面, 因为

$$\begin{pmatrix} I_m & I_m \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ O & O \end{pmatrix}^D, \quad (2.5)$$

且

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} A^D & O \\ O & B^D \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

最终, 由(2.1)~(2.6)及引理 1, 可得公式(2.4)成立的充要条件为

$$\begin{aligned} W^D &= (A_1 A_2)^D = \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}^D = \left[\begin{pmatrix} I_m & I_m \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \right]^D \\ &= \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ O & O \end{pmatrix}^D \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} I_m & I_m \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^D & O \\ O & B^D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^D & B^D \\ O & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

根据引理 1 和定理 1, 很容易得出下列推论。

推论 1 设 $A \in C^{m \times m}$ 和 $B \in C^{m \times m}$ 。则下列表述等价:

$$(1) \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}^g = \begin{pmatrix} A^g & B^g \\ O & O \end{pmatrix};$$

$$(2) A^2 B = B^3.$$

设 I 为适当阶数的单位矩阵, 可知

$$\begin{pmatrix} O & O \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} O & O \\ A & B \end{pmatrix}^D = \left[\begin{pmatrix} O & O \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \right]^D, \quad (2.7)$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ I & O \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} A & O \\ B & O \end{pmatrix}^D = \left[\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ I & O \end{pmatrix} \right]^D, \quad (2.8)$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I \\ O & I \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} O & A \\ O & B \end{pmatrix}^D = \left[\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I \\ O & I \end{pmatrix} \right]^D. \quad (2.9)$$

且

$$\begin{pmatrix} O & O \\ I & I \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} O & O \\ I & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & O \\ I & O \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} I & O \\ I & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & I \\ O & I \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} O & I \\ O & I \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

依照定理 1 的类似方法及(2.7)~(2.10), 我们可以给出以下结论。

定理 2 设 $A, B \in C^{m \times m}$ 和 $k = \max \left\{ \text{Ind}(A), \text{Ind}(B), 1, \text{Ind} \begin{pmatrix} O & O \\ A & B \end{pmatrix} \right\}$ 。则下列表述等价:

$$(1) \begin{pmatrix} O & O \\ A & B \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} O & O \\ A^D & B^D \end{pmatrix};$$

$$(2) r \begin{pmatrix} B^{2k} A & B^{2k+1} & O & B^{k-1} A \\ O & O & A^{2k+1} & A^k \\ B^{k-1} A & B^k & -A^k & O \end{pmatrix} = r(B^{k-1} A, B^k) + r(A^k).$$

证明: 由矩阵的性质可知

$$\begin{pmatrix} O & O \\ A & B \end{pmatrix}^D = \left[\begin{pmatrix} O & O \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \right]^D.$$

$$\text{令 } A_1 = \begin{pmatrix} O & O \\ I & I \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, \quad \text{可得 } (A_1 A_2)^k = \begin{pmatrix} O & O \\ B A^{k-1} & B^k \end{pmatrix}.$$

类似于定理 1 的证明, 并结合引理 1 和(2.7)和(2.10)可知定理 2 中的(1)等价与(2)。

推论 2 设 $A \in C^{m \times m}$ 和 $B \in C^{m \times m}$ 。则下列表述等价:

$$(1) \begin{pmatrix} O & O \\ A & B \end{pmatrix}^g = \begin{pmatrix} O & O \\ A^g & B^g \end{pmatrix};$$

$$(2) B^2 A = A^3.$$

定理 3 设 $A, B \in C^{m \times m}$ 和 $k = \max \left\{ \text{Ind}(A), \text{Ind}(B), 1, \text{Ind} \begin{pmatrix} A & O \\ B & O \end{pmatrix} \right\}$ 。则下列表述等价:

$$(1) \begin{pmatrix} A & O \\ B & O \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} A^D & O \\ B^D & O \end{pmatrix};$$

$$(2) r \begin{pmatrix} A^{2k+1} & O & A^k \\ BA^{2k} & O & BA^{k-1} \\ O & B^{2k+1} & -B^k \\ BA^{k-1} & B^k & O \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A^k \\ BA^{k-1} \end{pmatrix} + r(B^k).$$

证明: 由矩阵的性质可知

$$\begin{pmatrix} A & O \\ B & O \end{pmatrix}^D = \left[\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ I & O \end{pmatrix} \right]^D.$$

$$\text{令 } A_1 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} I & O \\ I & O \end{pmatrix}, \text{ 可得 } (A_1 A_2)^k = \begin{pmatrix} A^k & O \\ BA^{k-1} & O \end{pmatrix}.$$

类似于定理 1 的证明, 并结合引理 1 和(2.8)和(2.10)可知定理 3 中的(1)等价与(2)。

推论 3 设 $A \in C^{m \times m}$ 和 $B \in C^{m \times m}$ 。则下列表述等价:

$$(1) \begin{pmatrix} A & O \\ B & O \end{pmatrix}^g = \begin{pmatrix} A^g & O \\ B^g & O \end{pmatrix};$$

$$(2) BA^2 = B^3.$$

定理 4 设 $A, B \in C^{m \times m}$ 和 $k = \max \left\{ \text{Ind}(A), \text{Ind}(B), 1, \text{Ind} \begin{pmatrix} O & A \\ O & B \end{pmatrix} \right\}$ 。则下列表述等价:

$$(1) \begin{pmatrix} O & A \\ O & B \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} O & A^D \\ O & B^D \end{pmatrix};$$

$$(2) r \begin{pmatrix} AB^{2k} & O & AB^{k-1} \\ B^{2k+1} & O & B^k \\ O & A^{2k+1} & -A^k \\ AB^{k-1} & A^k & O \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} AB^{k-1} \\ B^k \end{pmatrix} + r(A^k).$$

证明: 由矩阵的性质可知

$$\begin{pmatrix} O & A \\ O & B \end{pmatrix}^D = \left[\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I \\ O & I \end{pmatrix} \right]^D.$$

$$\text{令 } A_1 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} O & I \\ O & I \end{pmatrix}, \text{ 可得 } (A_1 A_2)^k = \begin{pmatrix} O & AB^{k-1} \\ O & B^k \end{pmatrix}.$$

类似于定理 1 的证明, 并结合引理 1 和(2.9)和(2.10)可知定理 4 中的(1)等价与(2)。

推论 4 设 $A \in C^{m \times m}$ 和 $B \in C^{m \times m}$ 。则下列表述等价:

$$(1) \begin{pmatrix} O & A \\ O & B \end{pmatrix}^g = \begin{pmatrix} O & A^g \\ O & B^g \end{pmatrix};$$

$$(2) AB^2 = A^3.$$

数值例子

假设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

可以验证 $\text{Ind}(A) = 0$, $\text{Ind}(B) = 1$, $\text{Ind}\begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix} = 1$, 即

$$k = \max \left\{ \text{Ind}(A), \text{Ind}(B), 1, \text{Ind}\begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix} \right\} = 1.$$

在 $k=1$ 的条件下, 容易验证 $A^3 = A^2 = A = A^0$, $B^3 = B$ 且

$$\begin{aligned} r \begin{pmatrix} A^{2k+1} & A^{2k}B & O & A^{k-1}B \\ O & O & B^{2k+1} & B^k \\ A^k & A^{k-1}B & -B^{k-1} & O \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} A^k & A^{k-1}B \\ B^k & O \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} A^k & A^{k-1}B \\ B^k & O \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} A^3 & A^2B & O & B \\ O & O & B & B \\ A & B & -B & O \end{pmatrix} \\ &= r(A, B) + r(B). \end{aligned}$$

又因为 $A^D = A$, $B^D = B$, 且 $\text{Ind}\begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix} = 1$, 可得

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} A & B \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^D & B^D \\ O & O \end{pmatrix}.$$

3. 结论

利用矩阵秩或值域的若干经典等式, 本文列出了两个矩阵乘积 Drazin 逆正序律成立的充要条件。利用该正序律, 在满足秩可加性条件的前提下, 论文推导出了若干 2×2 分块矩阵 Drazin 逆的新表达式。特别地, 将本文的特例结果与文献[5]中 Meyer 关于上三角分块矩阵 Drazin 逆的通用公式进行代数对比, 可以证明在 $C = O$ 且 $D = O$ 的条件下, 文献[5]中的公式退化为本文提出的定理。

基金项目

2021 年度广东省教育厅省级课程思政示范项目(DSZ2021009), 2022 年广东省大学生创新训练项目(202211349312), 2020 年五邑大学课程思政建设改革示范项目(邑大教[2021] 53 号)。

参考文献

- [1] 王国荣. 矩阵与算子广义逆[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [2] Wang, G.R., Wei, Y.M. and Qiao, S.Z. (2004) Generalized Inverse: Theory and Computations. Science Press.
- [3] Ben-Israel, A. and Greville, T.N.E. (2003) Generalized Inverse: Theory and Applications. 2nd Edition, Springer-Verlag.
- [4] Drazin, M.P. (1958) Pseudo-Inverses in Associative Rings and Semigroups. *The American Mathematical Monthly*, **65**, 506-514. <https://doi.org/10.1080/00029890.1958.11991949>

- [5] Meyer Jr., C.D. (1973) Generalized Inverses and Ranks of Block Matrices. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **25**, 597-602. <https://doi.org/10.1137/0125057>
- [6] Groß, J. (2000) The Moore-Penrose Inverse of a Partitioned Nonnegative Definite Matrix. *Linear Algebra and its Applications*, **321**, 113-121. [https://doi.org/10.1016/s0024-3795\(99\)00073-7](https://doi.org/10.1016/s0024-3795(99)00073-7)
- [7] Noble, B. (1969) *Applied Linear Algebra*. Prentice-Hall.
- [8] Miao, J. (1991) General Expressions for the Moore-Penrose Inverse of a 2×2 Block Matrix. *Linear Algebra and Its Applications*, **151**, 1-15. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(91\)90351-v](https://doi.org/10.1016/0024-3795(91)90351-v)