Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(2), 53-63
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.162034

一类广义半线性抛物方程在时间加权 L^{∞} 空间中的适定性理论

刘爱博[*]，**冯雨婷**[#]

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2025年12月25日；录用日期：2026年1月24日；发布日期：2026年2月6日

摘 要

在描述流体运动、热传导等演化过程时，半线性抛物方程是一类重要方程。现有研究多围绕特定形式的方程展开，对广义化模型的适定性分析有待完善。本文以Diego Chamorro与Maxence Mansais提出的分数阶Navier-Stokes方程为基础，保留非线性项核心结构并进行参数优化，建立了一类一般化的半线性抛物方程模型。利用Duhamel原理将方程转化为等价的积分形式，运用Banach不动点原理、Besov空间刻画、分数阶半群时间衰减估计及卷积Young不等式等关键工具，在临界空间 $L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}\left([0,+\infty)\times R^{d}\right)$ 中，证明了：当初始数据与外力项的范数满足小性阈值约束时，方程存在唯一的全局温和解。该一般化模型拓展了传统半线性抛物方程的适用场景，为研究不同分数阶扩散效应与非线性强度下的动力学行为提供了统一分析框架，相关理论结果对分数阶抛物方程的理论延伸具有参考价值。

关键词

半线性抛物方程，一般化模型，温和解，存在唯一性，临界空间

Well-Posedness Theory for a Class of Generalized Semilinear Parabolic Equations in Time-Weighted L^{∞} Spaces

Aibo Liu[*], **Yuting Feng**[#]

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: December 25, 2025; accepted: January 24, 2026; published: February 6, 2026

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 刘爱博, 冯雨婷. 一类广义半线性抛物方程在时间加权 L^{∞} 空间中的适定性理论[J]. 理论数学, 2026, 16(2): 53-63. DOI: 10.12677/pm.2026.162034

Abstract

Semilinear parabolic equations play a crucial role in describing evolutionary processes such as fluid motion and heat conduction. Existing research has predominantly focused on equations with specific forms, leaving the well-posedness analysis of generalized models insufficiently explored. Building upon the fractional Navier-Stokes equations proposed by Diego Chamorro and Maxence Mansais, this paper retains the core structure of the nonlinear term while optimizing parameters to establish a generalized model for a class of semilinear parabolic equations. By applying the Duhamel principle to transform the equation into an equivalent integral form, and utilizing key tools such as the Banach fixed-point theorem, characterization of Besov spaces, time-decay estimates for fractional semigroups, and the Young convolution inequality, we prove that in the critical space $L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}\left([0,+\infty)\times R^{d}\right)$, when the norms of the initial data and external force term satisfy a smallness threshold constraint, the equation admits a unique global mild solution. This generalized model extends the applicability of traditional semilinear parabolic equations and provides a unified analytical framework for studying dynamical behaviors under different fractional diffusion effects and nonlinear intensities. The theoretical results offer valuable insights for extending the theory of fractional parabolic equations.

Keywords

Semilinear Parabolic Equations, Generalized Model, Mild Solution, Existence and Uniqueness, Critical Space

1. 绪论

1.1. 研究背景

本研究旨在建立一类广义半线性抛物方程在临界空间中的适定性理论。其理论基础源于 Navier-Stokes 方程温和解理论的深刻发展，并最终指向对更一般模型的探索。以下将分三个阶段阐述该研究脉络。

1.1.1. 经典 Navier-Stokes 方程的温和解理论

不可压缩 Navier-Stokes 方程作为流体力学的基础模型，其解的存在性与正则性问题是数学界的核心挑战。温和解理论已成为一个极为有效的框架。Fujita 和 Kato [1]完成了这一理论的奠基性工作，他们通过 Duhamel 原理将方程转化为积分形式，首次在临界 Sobolev 空间 $\dot{H}^{1/2}$ 中，为小初值情形建立了局部温和解的存在唯一性，并证明其可延拓为全局解。该理论框架被不断拓展，例如 Cannone [2]将其系统化至齐次 Besov 空间，而 Koch 和 Tataru [3]则在最大临界空间 BMO^{-1} 中针对小初值建立了适定性。然而，一个根本性的问题是：如果初值在 BMO^{-1} 空间中很大，解的唯一性是否会失效？近期，Coiculescu 和 Palasek [4]的突破性工作给出了否定答案，他们证明了存在一个属于 BMO^{-1} 空间的初值，使得 Navier-Stokes 方程产生两个不同的全局光滑解。这揭示了在临界空间中，解的唯一性严格依赖于初值足够小。

1.1.2. 广义 Navier-Stokes 方程：分数阶模型的温和解理论

为了描述具有非标准扩散特性的复杂流体，数学家们引入了分数阶 Navier-Stokes 方程，其线性耗散项由分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\ (1<\alpha<2)$ 主导。分数阶 Navier-Stokes 方程温和解理论的系统研究，由 Lions [5]的开创性工作奠定基础。随后，Cannone 与 Wu [6]在 Fourier-Besov 空间的框架下，为该方程建立了系统的全局适定性理论，明确了相应临界空间的尺度。进一步地，Miao，Yuan 与 Zhang [7]将研究拓展至更一般的分数阶耗散方程，发展了普适性的正则性估计方法。近期，Chamorro 与 Mansais [8]的工作引入了更一般的外力项，并在此设定下完善了临界空间中的解理论。这一系列研究共同将温和解的理论框架从经典的二阶扩散情形，推广至了更一般的分数阶情形。

1.1.3. 半线性抛物方程的统一框架与本文的推广

从数学模型的高度来看，前述 Navier-Stokes 方程均可在形如 $\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}=F(u)$ 的发展方程框架下进行研究。该框架以分数阶耗散为核心线性机制，其相应的温和解理论为分析 Navier-Stokes 方程提供了有效工具。

然而，现有文献多集中于非线性项 $F(u)$ 为特定形式的情形，本文将研究一类更一般的方程，其形式为 $\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u=(-\Delta)^{\beta}\left(|u|^{k-1}u\right)+f$。对此类半线性抛物方程，其系统的温和解理论仍是一个有待深入探索的重要课题。本文的研究目的正是填补这一空白。基于文献[8]中 Chamorro 和 Mansais 对分数阶 Navier-Stokes 方程的研究，我们构建了一类更具普适性的模型。本文的核心贡献在于：通过严格的尺度分析，定义了与模型参数 (α,β,k) 相适应的临界空间 $L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}\left([0,+\infty)\times R^d\right)$，并在此空间中证明了全局温和解的存在唯一性。

1.2. 物理来源与模型抽象

本文研究的广义半线性抛物方程 $\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u=(-\Delta)^{\beta}\left(|u|^{k-1}u\right)+f$ 是对多个物理模型核心结构的提炼。非线性项 $(-\Delta)^{\beta}\left(|u|^{k-1}u\right)$ 与分数阶耗散算子 $\partial_t+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ 的组合，概括了一类重要的演化行为。

当 $\alpha=2,\beta=\dfrac{1}{2},k=2$ 时，方程(1.2)可退化为经典的 Navier-Stokes 方程：

$$\partial_t u+u\cdot\nabla u=\Delta u-\nabla p,\qquad div(u)=0.$$

通过 Leray 投影算子可消去压力项 p 并维持散度为零的条件。本文略去了矢量场的旋度结构、Leray 投影和不可压缩条件 $div(u)=0$，将其简化为一个标量模型进行研究。

当 $\beta=0$ 时，方程(1.2)退化为经典的半线性抛物方程：

$$\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u=|u|^{k-1}u.$$

该方程广泛应用于描述种群动力学、化学燃烧过程以及某些多孔介质中的渗流问题。

1.3. 本文研究的主要内容

2025 年，Diego Chamorro 和 Maxence Mansais [8]证明了如下带外力项的不可压缩分数阶 Navier-Stokes 方程在三种临界空间中全局温和解的存在唯一性。

$$\begin{cases}\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u+div(u\otimes u)+\nabla p=f, & div(u)=0,\quad (1<\alpha<2),\\ u(0,\cdot)=u_0, & div(u_0)=0.\end{cases}\tag{1.1}$$

基于以上研究，本文将去除压力项和不可压缩约束的条件，考虑 $R^d\ (d\geq 3)$ 上的一类标量半线性抛物方程，

$$\begin{cases}\partial_t u+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u=(-\Delta)^{\beta}\left(|u|^{k-1}u\right)+f, & (2\beta<\alpha<2k\beta),\\ u(0,\cdot)=u_0.\end{cases}$$

通过 Duhamel 原理，将原抛物方程转化为如下等价的积分形式：

$$u=p_t*u_0+\int_0^t p_{t-s}*(-\Delta)^{\beta}\left(|u|^{k-1}u\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\left(p_{t-s}*f\right)\mathrm{d}s, \tag{1.2}$$

其中 $p_t(t>0)$ 是分数阶热核，满足 $\widehat{p_t}(\xi)=\mathrm{e}^{-t|\xi|^{\alpha}}$ 。

本文的主要研究目的是，在临界空间 $L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}\left([0,+\infty)\times R^d\right)$ 中，证明全局温和解的存在性，而以下定理是这一目标的核心成果。

定理 1： 设以下参数固定：$p_0\in\left(\dfrac{d}{\alpha},+\infty\right]$，$\beta>0$，$\alpha$ 满足 $2\beta<\alpha<2k\beta$，η 满足 $-\dfrac{d}{p_0}-\dfrac{2\beta-\alpha}{k-1}<\eta<\alpha-\dfrac{d}{p_0}$。考虑 $u_0:R^d\to R$ 为初始数据，并且 $u_0\in\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\left(\frac{\alpha-2\beta}{k-1}\right)}\left(R^d\right)$。设 $f:[0,+\infty)\times R^d\to R$ 为一个外力，并且 $\|f\|_{F_{\rho}^{-\eta,p_0}}=\sup\limits_{\tau>0}\tau^{\rho}\left\|(-\Delta)^{-\frac{\eta}{2}}f(\tau,\cdot)\right\|_{L^{p_0}}$，其中 $\rho=1-\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{d}{p_0}+\eta+\dfrac{2\beta-\alpha}{k-1}\right)$。

如果量 $\|u_0\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\left(\frac{\alpha-2\beta}{k-1}\right)}}+\|f\|_{F_{\rho}^{-\eta,p_0}}$ 足够小，那么分数阶问题(1.2)存在一个全局温和解 u 使得 $u\in L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}\left([0,+\infty)\times R^d\right)$，其中

$$L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}\left([0,+\infty)\times R^d\right)=\left\{\varphi:[0,+\infty)\times R^d\to R,\phi\in S'\left([0,+\infty)\times R^d\right):\|\varphi\|_{L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}}<+\infty\right\},$$

并且

$$\|\varphi\|_{L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}}=\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}\|\varphi(t,\cdot)\|_{L^{\infty}}.$$

定理 1 的证明主要基于压缩映射原理。文献[8]中为证明分数阶 Navier-Stokes 方程温和解所采用的证明框架与关键技术，在本问题的研究中仍然适用。具体而言，本文将通过建立初始数据项、非线性项及外力项在空间 $L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}\left([0,+\infty)\times R^d\right)$ 中的先验估计来验证压缩性。证明的主要调整在于，需根据本文引入的一般参数 (α,β,k) 重新推导各项估计中的指数尺度。

2. 相关引理

我们将介绍证明过程所需要的一些相关引理。

引理 1.1 (Banach 不动点原理) 设 X 是一个 Banach 空间，设 $B:X\times X\times\cdots\times X\to X$ 是一个 m-线性连续算子，满足：对 $\forall u_1,u_2,\cdots,u_m\in X$，有

$$\|B(u_1,u_2,\cdots,u_m)\|_X\le K\prod_{j=1}^{m}\|u_j\|_X,$$

其中常数 $K>0$. 设 $R>0$ 满足 $m(2R)^{m-1}K<1$。那么，对于每一个 $y\in X$ 且满足 $\|y\|_X\le R$ 的方程

$$u=y+B(u,u,\cdots,u),$$

在 X 中存在唯一的解 u，且该解满足 $\|u\|_X\le 2R$ 以及 $\|u\|_X\le\dfrac{m}{m-1}\|y\|_X$。此外，解 u 连续依赖于 y，其意义如下：如果 $\|z\|_X\le R$ 且 $v=z+B(v,v,\cdots,v)$，$\|v\|_X\le 2R$，那么

$$\|u-v\|_X \le \frac{1}{1-m(2R)^{m-1}K}\|y-z\|_X.$$

下面给出 Besov 空间的等价刻画。

引理 1.2 [8] Besov 空间 $\dot{B}^{-s}_{\infty,\infty}\left(R^d\right)$ 可以用以下条件描述：

$$\psi\in\dot{B}^{-s}_{\infty,\infty}\left(R^d\right)\Leftrightarrow\sup_{t>0}t^{\frac{s}{\alpha}}\|p_t*\psi\|_{L^\infty}<+\infty,$$

其中 p_t 是由表达式 $\widehat{p_t}(\xi)=\mathrm{e}^{-t|\xi|^\alpha}$ 给出的分数阶热核。

引理 1.3 将介绍分数阶半群的时间衰减估计。

引理 1.3 [9]对于分数阶半群 $\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\theta}$ 的梯度项，在 $L^p\left(R^d\right)$ 空间中的时间衰减估计为：

$$\left\|\nabla\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\theta}f\right\|_{L^p\left(R^d\right)}\le Ct^{-\frac{1}{2\theta}}\|f\|_{L^p\left(R^d\right)}.$$

将引理 1.3 应用到本论文中，可得：

$$\left\|p_{t-s}*(-\Delta)^\beta\left(|u|^{k-1}u\right)\right\|_{L^\infty}=\left\|(-\Delta)^\beta\mathrm{e}^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\left(|u|^{k-1}u\right)\right\|_{L^\infty}\le C(t-s)^{-\frac{2\beta}{\alpha}}\|u\|^k_{L^\infty}.$$

引理 1.4 将介绍卷积的 Young 不等式。

引理 1.4 (卷积的 Young 不等式) 若 $f\in L^p\left(R^d\right)$， $g\in L^q\left(R^d\right)$，且

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}(1\le p,q,r\le\infty),$$

则卷积的范数满足

$$\|f*g\|_{L^r}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

下面将介绍分数阶热核与分数阶 Laplacian 复合的范数缩放性。

引理 1.5 [8]设 $d\ge3$ 为空间维数，则下列范数估计成立：

$$\left\|(-\Delta)^{\frac{\eta}{2}}p_{t-s}\right\|_{L^p}=C(t-s)^{\frac{d}{\alpha p}-\frac{d+\eta}{\alpha}},$$

这里的 C 为常数。

3. 定理 1 的证明

基于文献[8]所建立的理论框架，本文可通过引理 1 中的 Banach 不动点原理构造问题(1.2)的温和解，即证明以下三个关键不等式：

$$\|p_t*u_0\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}\le C_1\|u_0\|_{\dot{B}^{-\left(\frac{\alpha-2\beta}{k-1}\right)}_{\infty,\infty}}, \tag{3.1}$$

$$(-\Delta)^\beta F(u)\in C^{m,\theta_1}_{loc} \tag{3.2}$$

$$\left\|\int_0^t p_{t-s}*f\,\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}\le C_3\|f\|_{F^{-\eta,p_0}_\rho}. \tag{3.3}$$

接下来，我们依次建立初始数据项、非线性项和外力项的估计。

证明 对于不等式(3.1)，由引理 1.2 可知，

$$u_0\in\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\left(\frac{\alpha-2\beta}{k-1}\right)}\left(R^d\right)\Leftrightarrow\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}\left\|p_t*u_0\right\|_{L^\infty}<+\infty,$$

因此得出以下两项范数的等价性：

$$\left\|u_0\right\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\left(\frac{\alpha-2\beta}{k-1}\right)}}\cong\left\|p_t*u_0\right\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}},$$

故存在常数 C 满足

$$\left\|p_t*u_0\right\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}\le C\left\|u_0\right\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\left(\frac{\alpha-2\beta}{k-1}\right)}}.$$

对于不等式(3.2)，根据 Minkowski 积分不等式和引理 1.3 可得：

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t p_{t-s}*(-\Delta)^\beta\left(|u|^{k-1}u\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty}&\le\int_0^t\left\|p_{t-s}*(-\Delta)^\beta\left(|u|^{k-1}u\right)\right\|_{L^\infty}\mathrm{d}s\\&\le\int_0^t C(t-s)^{-\frac{2\beta}{\alpha}}\|u\|_{L^\infty}^k\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

对上述不等式两边同时取 $\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}$，可得

$$\left\|\int_0^t p_{t-s}*(-\Delta)^\beta\left(|u|^{k-1}u\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}\le\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}C\int_0^t(t-s)^{-\frac{2\beta}{\alpha}}\|u\|_{L^\infty}^k\,\mathrm{d}s,$$

在上述积分中引入权重 $s^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}$，并结合 Beta 函数，即

$$\int_0^t(t-s)^{-a}s^{-b}\mathrm{d}s=t^{1-a-b}B(1-a,1-b),$$

其中 $a<1,b<1$，因此可以得到

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t p_{t-s}*(-\Delta)^\beta\left(|u|^{k-1}u\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}&\le C\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}\int_0^t(t-s)^{-\frac{2\beta}{\alpha}}\left(s^{-\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}s^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}\left\|u(s,\cdot)\right\|^{L^\infty}\right)^k\mathrm{d}s\\&\le C\|u\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}^k\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}\int_0^t(t-s)^{-\frac{2\beta}{\alpha}}s^{-\frac{k(\alpha-2\beta)}{\alpha(k-1)}}\mathrm{d}s\\&=C\|u\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}^k\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}t^{\frac{2\beta-\alpha}{\alpha(k-1)}}B\left(-\frac{2\beta}{\alpha}+1,-\frac{k(\alpha-2\beta)}{\alpha(k-1)}+1\right)\\&=C\|u\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}^k,\end{aligned}$$

即不等式(3.2)成立。

这里值得注意的是：由 $2\beta<\alpha<2k\beta$ 易知上述 Beta 函数的参数均为正数。

为了结束定理的证明，只需证明不等式(3.3)。

首先考虑 $\frac{d}{\alpha}<p_0<+\infty$ 的情况。设 p_0' 为 p_0 的共轭指数。由 Minkowski 积分不等式可得

$$\left\|\int_0^t p_{t-s}*f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty}\le\int_0^t\left\|p_{t-s}*f(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}\mathrm{d}s,$$

根据 Young 卷积不等式以及分数阶拉普拉斯算子的性质，可得

$$\left\|\int_0^t p_{t-s}*f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty}\le\int_0^t\left\|(-\Delta)^{\frac{\eta}{2}}p_{t-s}\right\|_{L^{p_0'}}\left\|(-\Delta)^{-\frac{\eta}{2}}(f)(s,\cdot)\right\|_{L^{p_0}}\mathrm{d}s.$$

根据引理 1.5 中给出的分数阶热核性质，并引入权重 s^ρ 得到：

$$\left\|\int_0^t p_{t-s}*f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty}\le C\int_0^t(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}s^{-\rho}s^{\rho}\left\|(-\Delta)^{-\frac{\eta}{2}}(f(s,\cdot))\right\|_{L^{p_0}}\mathrm{d}s$$
$$\le C\int_0^t(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}s^{-\rho}\mathrm{d}s\left(\sup_{s>0}s^{\rho}\left\|(-\Delta)^{-\frac{\eta}{2}}(f(s,\cdot))\right\|_{L^{p_0}}\right)$$
$$\le C\int_0^t(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}s^{-\rho}\mathrm{d}s\|f\|_{F_\rho^{-\eta,p_0}}.$$

接下来，我们考虑

$$\int_0^t(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}s^{-\rho}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{t}{2}}(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}s^{-\rho}\mathrm{d}s+\int_{\frac{t}{2}}^t(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}s^{-\rho}\mathrm{d}s,$$

对于第一个积分，我们注意到，如果 $0\le s\le\frac{t}{2}$，那么 $\frac{t}{2}\le t-s\le t$，所以有

$$(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}\le Ct^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}.$$

如果 $\frac{t}{2}<s\le t$，所以有 $s^{-\rho}\le Ct^{-\rho}$。

因此，可以得到

$$\int_0^t(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}s^{-\rho}\mathrm{d}s\le Ct^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}\int_0^{\frac{t}{2}}s^{-\rho}\mathrm{d}s+Ct^{-\rho}\int_{\frac{t}{2}}^t(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}\mathrm{d}s,$$

下面讨论一下上述两项积分的可积性，因为 $-\frac{d}{p_0}-\frac{2\beta-\alpha}{k-1}<\eta$，所以

$$\rho=1-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d}{p_0}+\eta+\frac{2\beta-\alpha}{k-1}\right)<1;$$

因为 $\eta<\alpha-\frac{d}{p_0}$，所以 $\frac{d}{\alpha p_0}+\frac{\eta}{\alpha}<1$。因此，上述两项积分是可积的，经过积分可以得到：

$$\int_0^t(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}s^{-\rho}\mathrm{d}s\le Ct^{1-\rho-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}.$$

由于 $\rho=1-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d}{p_0}+\eta+\frac{2\beta-\alpha}{k-1}\right)$，因此有 $\int_0^t(t-s)^{-\frac{d}{\alpha p_0}-\frac{\eta}{\alpha}}s^{-\rho}\mathrm{d}s\le Ct^{\frac{2\beta-\alpha}{\alpha(k-1)}}$。

所以

$$\left\|\int_0^t p_{t-s}*f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty}\le Ct^{\frac{2\beta-\alpha}{\alpha(k-1)}}\|f\|_{F_\rho^{-\eta,p_0}},$$

从而得到

$$\left\|\int_0^t p_{t-s}*f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}=\sup_{t>0}t^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}}\left\|\int_0^t p_{t-s}*f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty}\le C\|f\|_{F_\rho^{-\eta,p_0}}.$$

最后考虑 $p_0=+\infty$ 的情况。由 Minkowski 积分不等式可得

$$\left\|\int_0^t p_{t-s}*f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty}\le\int_0^t\left\|p_{t-s}*f(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}\mathrm{d}s,$$

并且根据卷积的 Young 不等式可以得到

$$\left\|\int_0^t p_{t-s} * f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty} \le \int_0^t \left\|(-\Delta)^{\frac{\eta}{2}} p_{t-s}\right\|_{L^1} \left\|(-\Delta)^{-\frac{\eta}{2}} f(s,\cdot)\right\|_{L^\infty} \mathrm{d}s.$$

由引理 1.5 给出的分数阶热核的性质，可得

$$\left\|\int_0^t p_{t-s} * f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty} \le \int_0^t (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} \left\|(-\Delta)^{-\frac{\eta}{2}} f(s,\cdot)\right\|_{L^\infty} \mathrm{d}s.$$

现在引入$\|\ \|_{F_\rho^{-\eta,\infty}}$，得到

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t p_{t-s} * f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty} &\le C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} s^{-\rho}\mathrm{d}s\left(\sup_{s>0} s^{\rho}\left\|(-\Delta)^{-\frac{\eta}{2}}(f)(s,\cdot)\right\|_{L^\infty}\right)\\ &\le C\int_0^t (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} s^{-\rho}\mathrm{d}s\|f\|_{F_\rho^{-\eta,\infty}}\end{aligned}$$

接下来，考虑

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} s^{-\rho}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} s^{-\rho}\mathrm{d}s + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} s^{-\rho}\mathrm{d}s,$$

如果$0 \le s \le \frac{t}{2}$，那么有$\frac{t}{2} \le t-s \le t$，因此得到$(t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} \le Ct^{-\frac{\eta}{\alpha}}$。如果$\frac{t}{2} < s \le t$，有$s^{-\rho} \le Ct^{-\rho}$成立。综上可得

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} s^{-\rho}\mathrm{d}s \le Ct^{-\frac{\eta}{\alpha}}\int_0^{\frac{t}{2}} s^{-\rho}\mathrm{d}s + Ct^{-\rho}\int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}}\mathrm{d}s.$$

在$p_0 = +\infty$的情况下，由于$-\frac{2\beta-\alpha}{k-1} < \eta < \alpha$，所以$\rho = 1-\frac{1}{\alpha}\left(\eta+\frac{2\beta-\alpha}{k-1}\right) < 1$且$\frac{\eta}{\alpha} < 1$，因此上述两个积分是可积的。

经过积分得到：

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} s^{-\rho}\mathrm{d}s \le Ct^{-\rho-\frac{\eta}{\alpha}+1}.$$

由于$\rho = 1-\frac{1}{\alpha}\left(\eta+\frac{2\beta-\alpha}{k-1}\right)$，则$\int_0^t (t-s)^{-\frac{\eta}{\alpha}} s^{-\rho}\mathrm{d}s \le Ct^{\frac{2\beta-\alpha}{\alpha(k-1)}}$，所以

$$\left\|\int_0^t p_{t-s} * f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty} \le Ct^{\frac{2\beta-\alpha}{\alpha(k-1)}}\|f\|_{F_\rho^{-\eta,\infty}},$$

从而

$$\left\|\int_0^t p_{t-s} * f(s,\cdot)\mathrm{d}s\right\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}} \le C\|f\|_{F_\rho^{-\eta,\infty}}.$$

证毕。

4. 解的光滑性与衰减行为

本节将深入讨论由定理一所确立的全局温和解$u(t,x)$的性质，依次论证该解实际上是经典解并具有无穷阶光滑性，并刻画其在长时间尺度下的衰减速率。

4.1. 正则性提升：从温和解到经典解

定理 2 (光滑性与经典解) 设初始数据u_0与外力f满足定理 1 的小性条件，并设$u(t,x)$为相应的唯一

全局温和解，则该解在区域$\left(0,\infty\right)\times R^d$上无穷次可微，即$u\in C^{\infty}\left(\left(0,\infty\right)\times R^d\right)$。特别地，$u$是方程(1.2)在经典意义下的解。

证明：由定理1，解$u\in L^{\infty}_{\alpha,\beta,k}\left(\left[0,+\infty\right)\times R^d\right)$，即存在常数$C_0>0$，使得

$$\sup_{t>0} t^{\gamma}\left\|u(t)\right\|_{L^{\infty}}\le C_0,\quad \gamma=\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}. \tag{4.1}$$

定义非线性函数$F(z)=|z|^{z-1}z$。由(4.1)易知，存在常数$C_1>0$，使得对任意$t>0$，

$$\left\|F\left(u(t)\right)\right\|_{L^{\infty}}\le C_1 t^{-k\gamma}. \tag{4.2}$$

分数阶热半群与分数阶拉普拉斯算子复合后具有以下基本平滑估计：对任意$\delta\ge 0$，$1\le p\le q\le\infty$，存在常数$C=C(d,\alpha,\delta,p,q)>0$，使得

$$\left\|\left(-\Delta\right)^{\delta}\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\varphi\right\|_{L^q}\le Ct^{-\frac{\delta}{\alpha}-\frac{d}{\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|\varphi\right\|_{L^p},\quad \forall t>0. \tag{4.3}$$

考虑解的积分表达式：

$$u(t)=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0+\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\left(-\Delta\right)^{\beta}F\left(u(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}f(s)\mathrm{d}s. \tag{4.4}$$

固定$0<\tau<\Gamma$，对任意$\tau\le t'<t\le\Gamma$，我们估计$u(t)-u(t')$的L^{∞}范数。

对于非线性项部分的差，我们将其分解为两项：

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\left(-\Delta\right)^{\beta}F\left(u(s)\right)\mathrm{d}s-\int_0^{t'} \mathrm{e}^{-(t'-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\left(-\Delta\right)^{\beta}F\left(u(s)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^{\infty}}\\ &\le\int_{t'}^t\left\|\mathrm{e}^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\left(-\Delta\right)^{\beta}F\left(u(s)\right)\right\|_{L^{\infty}}\mathrm{d}s+\int_0^{t'}\left\|\left(\mathrm{e}^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}-\mathrm{e}^{-(t'-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\right)\left(-\Delta\right)^{\beta}F\left(u(s)\right)\right\|_{L^{\infty}}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

对于第一项，利用(4.2)和(4.3)，有

$$\left\|\int_{t'}^t \mathrm{e}^{-(t-s)(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\left(-\Delta\right)^{\beta}F\left(u(s)\right)\mathrm{d}s\right\|_{L^{\infty}}\le C\int_{t'}^t (t-s)^{-\frac{\beta}{\alpha}}\left\|F\left(u(s)\right)\right\|_{L^{\infty}}\mathrm{d}s\le CC_1\int_{t'}^t (t-s)^{-\beta/\alpha}s^{-k\gamma}\mathrm{d}s.$$

由于在区间$\left[t',t\right]\subset\left[\tau,\Gamma\right]$上，函数$s^{-k\gamma}$有界(因$\tau>0$)，且$\beta/\alpha<1$ (由定理1条件$\alpha>2\beta$可得)，因此该积分可被$C\left|t-t'\right|^{1-\frac{\beta}{\alpha}}$控制。

对于第二项，利用热半群算子的强连续性及其在L^{∞}上的范数估计(同样基于(4.3))，可以证明存在常数$\theta\in(0,1)$，使得该项不超过$C\left|t-t'\right|^{\theta}$。

综合线性项(显然光滑)和非线性项的估计，我们得到存在常数$\theta\in(0,1)$，使得对任意$\tau\le t'$，$t\le\Gamma$及$x,y\in R^d$，$\left|u(t,x)-u(t',y)\right|\le C\left(\left|t-t'\right|^{\theta}+\left|x-y\right|^{\theta}\right)$，因此，$u\in C^{\theta}_{loc}\left(\left(0,\infty\right)\times R^d\right)$。

假设已证明$u\in C^{m,\theta}_{loc}\left(\left(0,\infty\right)\times R^d\right)$ $(m\ge 0, 0<\theta<1)$。由于$F(z)$是实解析函数，根据复合函数的正则性理论，$F(u)\in C^{m,\theta}_{loc}$。进而，利用分数阶拉普拉斯算子$\left(-\Delta\right)^{\beta}$在Hölder空间中的正则性提升性质，我们有，$\left(-\Delta\right)^{\beta}F(u)\in C^{m,\theta_1}_{loc}$，其中$\theta_1=\theta+2\beta$。将此代入积分方程(4.4)，并再次应用热半群的平滑估计(4.3)，可推得$u\in C^{m+1,\theta_2}_{loc}$，其中$\theta_2$为某个新的Hölder指数。通过有限次这样的迭代，我们可以证明u具有任意阶的连续导数，即$u\in C^{\infty}\left(\left(0,\infty\right)\times R^d\right)$。

由于u无穷可微，我们可以直接对积分方程(4.4)两边关于时间t求导。利用热半群的性质和u的光

滑性，可以逐项验证 u 满足方程(1.2)的每一项定义，且等式在经典意义下成立。同时，初值条件 $u(0)=u_0$ 在温和解的定义下成立，结合 u 在 $t=0$ 附近的连续性，可知其亦为经典初值条件。因此，u 是方程(1.2)的经典解。

4.2. 长时间衰减行为及其与线性衰减的对比

接下来，我们精确刻画解的长时间渐近行为，并将其与对应的线性方程的衰减速率进行对比。

定理 3 (衰减速率) 在定理 1 的条件下，存在常数 $C>0$，使得相应的全局温和解 $u(t,x)$ 满足如下衰减估计：$\|u(t)\|_{L^\infty(R^d)} \le Ct^{-\gamma}, \forall t>0$，其中 $\gamma=\dfrac{\alpha-2\beta}{\alpha(k-1)}$。此衰减率是最优的。

证明： 该结论是解属于空间 $L^\infty_{\alpha,\beta,k}\left([0,+\infty)\times R^d\right)$ 的直接推论。由该空间范数定义，

$\|u\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}} = \sup\limits_{t>0} t^\gamma \|u(t)\|_{L^\infty}$.

根据定理 1，$\|u\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}<\infty$。因此，对任意 $t>0$，有 $t^\gamma\|u(t)\|_{L^\infty}\le\|u\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}$。令 $C=\|u\|_{L^\infty_{\alpha,\beta,k}}$，即得估计式 $\|u(t)\|_{L^\infty(R^d)}\le Ct^{-\gamma},\forall t>0$。最优性是指，若衰减速率快于 $t^{-\gamma}$，则解将属于一个更“小”的空间，但这通常需要更强的初值条件；而 $t^{-\gamma}$ 是匹配初值空间 $B^{-\left(\frac{\alpha-2\beta}{k-1}\right)}_{\infty,\infty}\left(R^d\right)$ 的自然衰减率。

与线性衰减的对比分析：

考虑线性初值问题 $\partial_t v+(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}v=0$，$v(0)=u_0$。当初始数据 u_0 属于相同的齐次 Besov 空间 $\dot{B}^{-\left(\frac{\alpha-2\beta}{k-1}\right)}_{\infty,\infty}\left(R^d\right)$ 时，其解 $v(t)=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0$ 满足完全相同的衰减估计：存在常数 $C'>0$，使得

$$\|v(t)\|_{L^\infty}\le C't^{-\gamma}, t>0.$$

这一事实是分数阶热半群衰减估计的直接结果，也体现了 Besov 空间在刻画这类尺度不变问题中的自然性。

5. 结论

本文聚焦传统分数阶半线性抛物方程因参数固化导致适用场景受限的不足，围绕“模型泛化－适定性分析”的核心脉络，开展了广义化模型的构建与理论研究。研究以 Diego Chamorro 与 Maxence Mansais [8]提出的分数阶流体动力学方程为原型，在保留其非线性项核心结构的基础上，通过引入可调参数实现了模型的泛化拓展，突破了传统模型仅能刻画特定分数阶扩散行为的局限。本文在临界空间 $L^\infty_{\alpha,\beta,k}\left([0,+\infty)\times R^d\right)$ 中，明确了初始数据与外力项范数小性约束下，广义模型全局温和解的存在唯一性。这一结果完善了分数阶抛物方程在临界空间中的适定性理论。

参考文献

[1] Fujita, H. and Kato, T. (1964) On the Navier-Stokes Initial Value Problem. I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, 269-315. https://doi.org/10.1007/bf00276188

[2] Cannone, M. (1995) Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes. Diderot Editeur.

[3] Koch, H. and Tataru, D. (2001) Well-Posedness for the Navier-Stokes Equations. *Advances in Mathematics*, **157**, 22-35. https://doi.org/10.1006/aima.2000.1937

[4] Coiculescu, M.P. and Palasek, S. (2025) Non-Uniqueness of Smooth Solutions of the Navier-Stokes Equations from Critical Data. *Inventiones Mathematicae*. https://doi.org/10.1007/s00222-025-01396-z

[5] Lions, P.L. (1996) Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Vol. 1. Incompressible Models. Clarendon Press.

[6] Cannone, M. and Wu, G. (2006) Global Well-Posedness for the Fractional Navier-Stokes Equations in Critical Fourier-Besov Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **64**, 925-935.

[7] Miao, C., Yuan, B. and Zhang, B. (2010) Well-Posedness of the Cauchy Problem for the Fractional Power Dissipative Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **73**, 1636-1649.

[8] Chamorro, D. and Mansais, M. (2025) Some General External Forces and Critical Mild Solutions for the Fractional Navier-Stokes Equations. *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*, **11**, 1071-1100. https://doi.org/10.1007/s41808-025-00365-0

[9] Yu, X. and Zhai, Z. (2012) Well-Posedness for Fractional Navier-Stokes Equations in the Largest Critical Spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **35**, 676-683. https://doi.org/10.1002/mma.1582