Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(2), 26-31
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.162031

Hans汉斯

关于图笛卡尔积和子式的注记

吕玲玉

福州大学数学与统计学院，福建 福州

收稿日期：2025年12月25日；录用日期：2026年1月23日；发布日期：2026年2月2日

摘 要

设$G\Box H$和$G\cdot H$分别表示图G和H的笛卡尔积和字典积。本文研究了图积中的子式问题。特别地，我们通过构造方法证明，对任意简单图G和连通图H，图$G\cdot H$是图$G\Box H^k$的一个子式，其中H^k是H的k重笛卡尔积且$k=\chi(G)$。这一结论推广了Wood的早期结果。此外，我们还改进了Wood中$\eta(G\Box S_t)$的下界，其中$S_t=k_{1,t}$。

关键词

图子式，图积，笛卡尔积

A Note on Graph Cartesian Products and Minors

Lingyu Lyu

School of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou Fujian

Received: December 25, 2025; accepted: January 23, 2026; published: February 2, 2026

Abstract

Let $G\Box H$ and $G\cdot H$ denote the Cartesian product and the lexicographic product of graphs G and H, respectively. In this note, we investigate the graph minor in products of graphs. In particular, we show that, for any simple graph G and any connected graph H, the graph $G\cdot H$ is a minor of the graph $G\Box H^k$, where H^k is the k-fold Cartesian product of H and $k=\chi(G)$. This generalizes an earlier result of Wood. Moreover, we improve the lower bound of $\eta(G\Box S_t)$ in Wood, where $S_t=k_{1,t}$.

文章引用: 吕玲玉. 关于图笛卡尔积和子式的注记[J]. 理论数学, 2026, 16(2): 26-31. DOI: 10.12677/pm.2026.162031

Keywords

Minor, Product, Cartesian Product

1. 引言

本文所考虑的图均为无向简单图。未定义的术语和记号参见文献[1]。

定义 1.1 设 G,H 为图，$G*H$ 表示 G 和 H 的一种特定图乘积。$G*H$ 定义在顶点集上：

$$V(G*H)=V(G)\times V(H).$$

对于 $V(G*H)$ 中的两个顶点 $u=(u_1,u_2)$ 和 $v=(v_1,v_2)$，它们在 $G*H$ 中相邻当且仅当：

- 笛卡尔积 $G\square H$：$u_1=v_1$ 且 $u_2v_2\in E(H)$，或 $u_2=v_2$ 且 $u_1v_1\in E(G)$；
- 强积 $G\boxtimes H$：$u_1=v_1$ 且 $u_2v_2\in E(H)$，或 $u_2=v_2$ 且 $u_1v_1\in E(G)$，或 $u_1v_1\in E(G)$ 且 $u_2v_2\in E(H)$；
- 字典积 $G\cdot H$：$u_1v_1\in E(G)$ 或 $u_1=v_1$ 且 $u_2v_2\in E(H)$。

$G\boxtimes H$ 是从 G 的一个副本出发，将 G 中的每个顶点替换为 H 的一个副本而得到的，并且当 $u_1v_1\in E(G)$ 且 $u_2v_2\in E(H)$ 时，$(u_1,u_2)(v_1,v_2)\in E(G\boxtimes H)$。$G\cdot H$ 则是从 G 的一个副本出发，将 G 中的每个顶点替换为 H 的一个副本而得到的，对于 G 中的每条边 $u_1v_1\in E(G)$，在对应的两个 H 副本之间添加所有可能的边，即对于任意 $u_2,v_2\in V(H)$，连接 (u_1,u_2) 和 (v_1,v_2)。

在图同构意义下，图笛卡尔积运算满足交换律与结合律。因此，对任意有限个图 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，图 $G_1\square G_2\square\cdots\square G_k$ 是良定义的。此时我们定义图 $G:=G_1\square G_2\square\cdots\square G_k$ 的顶点集为

$$V(G)=\{(v_1,v_2,\cdots,v_k):v_i\in V(G_i),i\in[k]\}.$$

对于两个不同的顶点 $u=(u_1,\cdots,u_k)$ 与 $v=(v_1,\cdots,v_k)$，我们有 $uv\in E(G)$ 当且仅当存在唯一的指 $i\in[k]$，使得

$$u_iv_i\in E(G_i)\text{且}u_j=v_j\text{对所有}j\neq i\text{ 成立}.$$

在此情形下，称边 uv 位于第 i 维。对于任意图 G 及整数 $k\geq 1$，记

$$G^k:=\underbrace{G\square G\square\cdots\square G}_{k}$$

为 G 的 k 重笛卡尔积图。

定义 1.2 设 H 是一个顶点集为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的图。若存在 G 的 n 个两两不交的非空顶点子集 $X_1,X_2,\cdots,X_n\subseteq V(G)$，满足：

(1) 对每个 $i\in[n]$，$G[X_i]$ 是连通的；

(2) 对任意边 $ij\in E(H)$，图 G 中存在一条边连接 X_i 与 X_j，即存在 $u\in X_i$ 与 $v\in X_j$ 使得 $uv\in E(G)$；

则称 H 是 G 的一个子式，记为 $H\preceq G$。当 $H=K_t$ 为完全图时，称 H 为 G 的一个团子式。此时，上述定义等价于：G 中存在 t 个两两不交的连通子图，且任意两个子图之间均存在至少一条边相连。

给定图 G，称 G 中最大团子式所对应的完全图的顶点数，即满足 $K_t\preceq G$ 的最大整数 t 为图 G 的 Hadwiger 数，记作 $\eta(G)$。Hadwiger 数是图结构复杂性的主要度量之一。图乘积结构研究为描述复杂图

类提供了基于简单构建块的强大框架[2]-[4]。Kotlov [5]开创了对图积中子式的研究，并证明，对任意二分图G，强积$G\boxtimes K_2$是$G\square C_4$的一个子式。该结果的推论给出了$\eta\left(K_2^k\right)$最好的下界。Chandran 和 Sivadasan [6]研究了笛卡尔积图中的团子式。随后，Wood [7]以及 Chandran、Kostochka 和 Raju [8]继续研究了笛卡尔积图中的团子式。特别地，Wood [7]证明了以下结果：

定理 1.3 [7] 设H为一个连通图，G为一个二分图，则$G\cdot H\preceq G\square H\square H$。

给定图G，若存在一个映射$f:V\to\{1,2,\cdots,k\}$使得对任意边$uv\in E$有$f(u)\neq f(v)$，则称G是k-可着色的。色数$\chi(G)$是满足该条件的最小正整数k。在本文中，我们延续了关于笛卡尔积图中字典积子式的研究，将 Wood [7]的结果推广到了更一般的情况：

定理 1.4 设H为一个连通图，G为一个$\chi(G)=k$的图，则$G\cdot H\preceq G\square H^k$。

Wu、Yang 和 Yu [9]证明了，对任意连通图G，强积$G\boxtimes K_n$是$G\square K_n^{\chi(G)}$的一个子式。由强积和字典积的定义易知$G\cdot K_n$和$G\boxtimes K_n$同构，故该结果也可以写成：对任意连通图G，$G\cdot K_n$是$G\square K_n^{\chi(G)}$的一个子式。因此，定理 1.4 也是 Wu、Yang 和 Yu [9]结果的推广。

此外，我们还改进了 Wood [7]中$\eta(G\square S_t)$的下界，且改进后的下界是紧的：

命题 1.5 对任意n个顶点的连通图G和任意整数$t\geq 1$，有

$$\eta(G\square S_t)\geq\min\{|V(G)|,t+\omega(G)\}.$$

2. 预备知识

设$G=(V(G),E(G))$是一个连通图。设S是$V(G)$的一个非空子集。以S为顶点集，以G中两个端点均在S中的所有边为边集所组成的子图称为G的由S导出的子图，记为$G[S]$，这时，也称$G[S]$为G的导出子图。称G中最大团所含的顶点数为图G的团数，记作$\omega(G)$。叶子是指度为 1 的顶点，记S_t为具有t个叶子的星图，即$S_t=K_{1,t}$。对任意整数$m,n\in\mathbb{Z}$且$m<n$，定义$[m,n]:=\{m,m+1,\cdots,n\}$，并记$[n]:=[1,n]$。

若$P=\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$是图G的非空顶点子集的一个集合，且满足G的每个顶点恰好属于P中的一个元素，即$V_i\neq\varnothing$，$\bigcup_{i=1}^{k}V_i=V(G)$，且对任意$i\neq j$有$V_i\cap V_j=\varnothing$，则称$P$是图$G$的一个划分，$P$中的每个元素称为一个部。若$P$和$P'$是图$G$的两个不同的划分，且$P$的每个部都与$P'$的每个部有非空交，则称$P$和$P'$是交叉的。划分$P$的商图(关于$G$)记为$G/P$，其顶点集为$P$中的非空部，其中两个不同的部$A,B\in P$在$G/P$中相邻，当且仅当存在$u\in A$与$v\in B$，使得$u$与$v$在$G$中相邻。

3. 证明

引理 3.1 对每个连通图H及任意整数$k\geq 1$，均存在H^k的k个两两交叉的划分，使得

(a) 每个划分的每个部都在H^k中导出一个连通子图；

(b) 对每个划分P，商图H^k/P均同构于H。

证明 设$V(H)=\{1,2,\cdots,n\}$。对任意$i\in[k]$和$j\in[n]$，定义

$$A_{i,j}=\{(l_1,\cdots,l_{i-1},j,l_{i+1},\cdots,l_k):l_{i'}\in[n],i'\neq i\}.$$

则对每个$i\in[k]$，集合$\{A_{i,1},A_{i,2},\cdots,A_{i,n}\}$构成$H^k$的一个划分，从而得到$k$个划分。

我们首先证明这k个划分两两交叉。任取来自两个不同划分的两个部，不妨设为$A_{i_1,x}$和$A_{i_2,y}$，其中$i_1\neq i_2$且$x,y\in[n]$。取顶点

$$(l_1,\cdots,l_k),\text{其中}l_{i_1}=x,l_{i_2}=y,\text{其余 }l_r=1$$

DOI: 10.12677/pm.2026.162031

则该顶点同时属于 $A_{i_1,x}$ 与 $A_{i_2,y}$，因此任意两个不同划分是交叉的。

接下来证明(a)。注意到 $H^k\left[A_{i,j}\right]$ 同构于 H^{k-1}，而 H 连通蕴含 H^{k-1} 连通，故每个部在 H^k 中诱导的子图是连通的。

下面证明(b)。任取一个划分 P，不妨设 $P=\left\{A_{i,1},A_{i,2},\cdots,A_{i,n}\right\}$。显然 $\left|V\left(H^k/P\right)\right|=n=\left|V\left(H\right)\right|$。

首先证明：若 $j_sj_t\in E\left(H\right)$，则 A_{i,j_s} 与 A_{i,j_t} 在 H^k/P 中相邻。取任意

$$\left(l_1,\cdots,l_{i-1},j_s,l_{i+1},\cdots,l_k\right)\in A_{i,j_s}$$

和

$$\left(l_1,\cdots,l_{i-1},j_t,l_{i+1},\cdots,l_k\right)\in A_{i,j_t}$$

由于仅在第 i 个坐标处不同，且 $j_sj_t\in E\left(H\right)$，根据 k 重笛卡尔积图的定义，上述两个顶点在 H^k 中相邻，从而对应的两个部在商图中相邻。

反之，设 A_{i,j_s} 与 A_{i,j_t} 在 H^k/P 中相邻，其中 $j_s\neq j_t$。则存在

$$u=\left(l_1,\cdots,l_{i-1},j_s,l_{i+1},\cdots,l_k\right)\in A_{i,j_s}$$

和

$$v=\left(l_1',\cdots,l_{i-1}',j_t,l_{i+1}',\cdots,l_k'\right)\in A_{i,j_t},$$

使得 u 与 v 在 H^k 中相邻。由于 u 与 v 在 H^k 中相邻，根据笛卡尔积的定义，存在唯一的指标 $r\in\left[k\right]$，使得 $l_rl_r'\in E\left(H\right)$，且对所有 $l\neq r$ 有 $l_l=l_l'$。又由于 $j_s\neq j_t$，可知 u 与 v 在第 i 个坐标上不同，从而必有 $r=i$，并且 $j_sj_t\in E\left(H\right)$。

因此，H^k/P 与 H 的边集一一对应，从而 $H^k/P\cong H$。

□

定理 1.4 设 H 为一个连通图，G 为一个满足 $\chi\left(G\right)=k$ 的图，则 $G\cdot H\preceq G\square H^k$。

证明 由于 G 是 k-可着色的，存在一个正常的 k-着色

$$c:V\left(G\right)\to\left[k\right],$$

使得对任意 $i\in\left[k\right]$，集合 $\left\{v\in V\left(G\right):c\left(v\right)=i\right\}$ 在 G 中诱导一个独立集。

设 $V\left(H\right)=\left\{1,2,\cdots,n\right\}$。由引理 3.1，图 H^k 存在 k 个两两交叉的划分，并且满足条件(a)与(b)。记这些划分为

$$\left\{A_{i,1},A_{i,2},\cdots,A_{i,n}\right\},\quad i\in\left[k\right].$$

对 $G\cdot H$ 的每个顶点 $\left(v,j\right)$，定义 $G\square H^k$ 中的顶点子集

$$X_{v,j}=\left\{\left(v,u\right):u\in A_{c(v),j}\right\}.$$

由于对每个 $i\in\left[k\right]$，$\left\{A_{i,1},\cdots,A_{i,n}\right\}$ 是 H^k 的一个划分，可知

$$\left\{X_{v,j}:v\in V\left(G\right),\,j\in\left[n\right]\right\}$$

构成了 $G\square H^k$ 顶点集的一个划分。

下面验证子式关系。由引理 3.1(a)，每个 $A_{c(v),j}$ 在 H^k 中诱导的子图是连通的，从而根据笛卡尔积的定义，每个 $X_{v,j}$ 在 $G\square H^k$ 中诱导的子图亦是连通的。

设 $\left(v,j_1\right)$ 与 $\left(v',j_2\right)$ 是 $G\cdot H$ 中的两个相邻顶点，我们证明其对应的点集 X_{v,j_1} 与 X_{v',j_2} 在 $G\square H^k$ 中相邻。根据字典积的定义，要么 $vv'\in E\left(G\right)$，要么 $v=v'$ 且 $j_1j_2\in E\left(H\right)$。

情形 1 $vv' \in E(G)$。

由于 c 是一个正常着色，必有 $c(v) \neq c(v')$。因此，划分 $\{A_{c(v),1},\cdots,A_{c(v),n}\}$ 与 $\{A_{c(v'),1},\cdots,A_{c(v'),n}\}$ 是交叉的，从而存在顶点

$$u \in A_{c(v),j_1} \cap A_{c(v'),j_2}.$$

于是 $(v,u) \in X_{v,j_1}$ 与 $(v',u) \in X_{v',j_2}$ 在 $G\square H^k$ 中相邻。

情形 2 $v = v'$ 且 $j_1 j_2 \in E(H)$。

此时，任取

$$u = (l_1,\cdots,l_{c(v)-1},j_1,l_{c(v)+1},\cdots,l_k) \in A_{c(v),j_1}$$

和

$$u' = (l_1,\cdots,l_{c(v)-1},j_2,l_{c(v)+1},\cdots,l_k) \in A_{c(v),j_2},$$

由于 u 与 u' 仅在第 $c(v)$ 个坐标处不同，且 $j_1 j_2 \in E(H)$，可知 $(v,u) \in X_{v,j_1}$ 与 $(v,u') \in X_{v,j_2}$ 在 $G\square H^k$ 中相邻。

综上，在两种情形下，$G\cdot H$ 中的相邻顶点对应于 $G\square H^k$ 中相邻的连通子图，因此由子式的定义可得 $G\cdot H \preceq G\square H^k$。

□

下面的结果在 Wood [7]的下界基础上作了改进。具体而言，我们将 $G\square S_t$ 的 Hadwiger 数下界从 $\min\{|V(G)|,t+1\}$ 提升到 $\min\{|V(G)|,t+\omega(G)\}$。

命题 1.5 对任意 n 个顶点的连通图 G 和任意整数 $t \geq 1$，有

$$\eta(G\square S_t) \geq \min\{|V(G)|,t+\omega(G)\}.$$

证明 设 H 是 G 的一个最大团，记 $\omega(G)=c$，并令 $V(H)=\{v_{n-c+1},\cdots,v_n\}$。相应地，设 $V(G)\setminus V(H)=\{v_1,\cdots,v_{n-c}\}$，$V(S_t)=\{r\}\cup[t]$。令 $k=\min\{n,t+c\}$。下面构造 $G\square S_t$ 的 k 个两两互不相交的顶点子集。

首先，对每个 $i \in [n-c+1,n]$，定义

$$X_i = \{(v_i,r)\},$$

这些点集两两不交。且由于 H 是团，对任意不同的 $i,j \in [n-c+1,n]$，顶点 (v_i,r) 与 (v_j,r) 在 $G\square S_t$ 中相邻。

接下来，对每个 $a \in [k-c] \subseteq [t]$ (由于 $k=\min\{n,t+c\}$，所以 $k-c \leq t$)，定义

$$X_a = \{(v_a,r)\} \cup \{(v_j,a): j \in [n]\}.$$

我们断言 X_a 在 $G\square S_t$ 中诱导一个连通子图。事实上，由于 G 是连通图，又因为 (v_a,a) 与 (v_a,r) 在 $G\square S_t$ 中相邻，可知 X_a 所诱导的子图是连通的。

对于不同的 $a,b \in [k-c]$，点集 X_a 与 X_b 不相交，且顶点 $(v_b,a) \in X_a$ 与 $(v_b,r) \in X_b$ 相邻，因此 X_a 与 X_b 之间存在边相连。此外，对任意 $a \in [k-c]$ 和 $i \in [n-c+1,n]$，点集 X_a 与 X_i 不相交，且顶点 $(v_i,r) \in X_i$ 与 $(v_i,a) \in X_a$ 相邻。

综上所述，集合 $\{X_1,\cdots,X_{k-c}\} \cup \{X_{n-c+1},\cdots,X_n\}$ 给出了 $G\square S_t$ 中的 k 个两两不交的顶点集，其诱导子图均连通，且任意两个诱导子图之间均存在边相连。因此 $K_k \preceq G\square S_t$，从而

$$\eta\left(G\square S_t\right)\geq k=\min\left\{\left|V\left(G\right)\right|,t+\omega\left(G\right)\right\}.$$

□

当 G 为一个至少含 $t+2$ 个顶点的树图时，有 $\omega\left(G\right)=2$，从而由上述命题可得

$$\eta\left(G\square S_t\right)\geq\min\left\{\left|V\left(G\right)\right|,t+\omega\left(G\right)\right\}=t+2.$$

另一方面，由于 S_t 是 K_{t+1} 的子图，有 $\eta\left(G\square S_t\right)\leq\eta\left(G\square K_{t+1}\right)$。而 Wood 在[7]的定理 10.1 中证明了 $\eta\left(G\square K_{t+1}\right)=t+2$，因此 $\eta\left(G\square S_t\right)\leq t+2$。综上可知 $\eta\left(G\square S_t\right)=t+2$，从而命题 1.5 中给出的下界在该情形下是紧的。

命题 1.5 在 Wood [7]的结果基础上给出了实质性的改进，将常数 1 提升为 $\omega\left(G\right)$ 能够有效刻画 G 中团结构对笛卡尔积图 Hadwiger 数的贡献。为说明这一点，取 $G=K_n$，其中 $n\geq 2$。此时 $\omega\left(G\right)=n$ 且 $\left|V\left(G\right)\right|=n$。由 Wood 的下界只能得到 $\eta\left(K_n\square S_t\right)\geq t+1$，该下界与 n 无关。而由命题 1.5 可得 $\eta\left(K_n\square S_t\right)\geq\min\left\{n,t+\omega\left(K_n\right)\right\}=n$。当 $n\gg t$ 时，新下界相较于 $t+1$ 有显著提升。

参考文献

[1] Diestel, R. (2005) Graph Theory. 3rd Edition, Springer.

[2] Distel, M., Dujmović, V., Eppstein, D., Hickingbotham, R., Joret, G., Micek, P., *et al.* (2024) Product Structure Extension of the Alon-Seymour-Thomas Theorem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **38**, 2095-2107. https://doi.org/10.1137/23m1591773

[3] Dujmović, V., Morin, P., Wood, D. and Worley, D. (2025) Grid Minors and Products. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **32**, P2.24. https://doi.org/10.37236/12822

[4] Hickingbotham, R., Jungeblut, P., Merker, L. and Wood, D.R. (2023) The Product Structure of Squaregraphs. *Journal of Graph Theory*, **105**, 179-191. https://doi.org/10.1002/jgt.23008

[5] Kotlov, A. (2001) Minors and Strong Products. *European Journal of Combinatorics*, **22**, 511-512. https://doi.org/10.1006/eujc.2000.0428

[6] Chandran, L.S. and Sivadasan, N. (2007) On the Hadwiger's Conjecture for Graph Products. *Discrete Mathematics*, **307**, 266-273. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.06.019

[7] Wood, D.R. (2011) Clique Minors in Cartesian Products of Graphs. *The New York Journal of Mathematics*, **17**, 627-682.

[8] Chandran, L.S., Kostochka, A. and Raju, J.K. (2008) Hadwiger Number and the Cartesian Product of Graphs. *Graphs and Combinatorics*, **24**, 291-301. https://doi.org/10.1007/s00373-008-0795-7

[9] Wu, Z., Yang, X. and Yu, Q. (2010) A Note on Graph Minors and Strong Products. *Applied Mathematics Letters*, **23**, 1179-1182. https://doi.org/10.1016/j.aml.2010.05.007