

势在无穷远处消失的四阶椭圆方程的变号解

罗颖琪

广东工业大学数学与统计学院, 广东 广州

收稿日期: 2025年12月28日; 录用日期: 2026年2月2日; 发布日期: 2026年2月27日

摘要

Kirchhoff方程在物理领域具有基础性地位, 其解的存在性的理论研究意义日益凸显, 并受到广泛关注。其中, 四阶Kirchhoff方程在近年来吸引了大批学者广泛研究。本文研究一类四阶Kirchhoff型椭圆方程解的存在性: $\Delta^2 u - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + V(x)u = K(x)f(u)$, $x \in \mathbb{R}^3$, 其中 $V(x)$, $K(x)$ 为非负连续函数, $V(x)$ 在无穷远处消失, f 为准临界增长的连续函数。利用极小化方法和形变引理, 本文证明了上述问题在一定的条件下存在一个变号解。文献中的最新结果得到了极大的改进和推广。

关键词

四阶Kirchhoff方程, 变号解, 消失势, 变分方法

Sign-Changing Solutions for Fourth-Order Elliptic Equations with Potential Vanishing at Infinity

Yingqi Luo

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: December 28, 2025; accepted: February 2, 2026; published: February 27, 2026

Abstract

The Kirchhoff equation holds a fundamental position in the field of physics, and the significance of studying the existence of its solutions is increasingly prominent. Its application has received widespread attention. The fourth-order elliptic equation of Kirchhoff-type has attracted the particular attention of researchers in recent years. In this paper, we investigate the existence of solutions for

the following fourth-order elliptic equation of Kirchhoff-type:

$\Delta^2 u - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + V(x)u = K(x)f(u)$, $x \in \mathbb{R}^3$, where $V(x)$, $K(x)$ are nonnegative continuous functions, $V(x)$ vanishes at infinity and f is a continuous function with quascritical growth. Using a minimization argument and the quantitative deformation lemma, we prove the problem above has a sign-changing solution. Recent results from the literature are greatly improved and extended.

Keywords

Fourth-Order Elliptic Equations of Kirchhoff-Type, Sign-Changing Solution, Vanishing Potential, Variational Methods

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑以下四阶 Kirchhoff 型椭圆型方程:

$$\Delta^2 u - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u + V(x)u = K(x)f(u), \quad (1.1)$$

其中 $\Delta^2 := \Delta(\Delta)$ 是双调和算子, $V(x)$ 和 $K(x)$ 是非负连续函数。由于 $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx$ 的出现, 问题(1.1)是一个非局部问题, 这也带来了一定的困难。

当 Ω 是 \mathbb{R}^N 的有界域且 $V(x) = 0$ 时, 问题(1.1)与下面的四阶 Kirchhoff 型椭圆型方程有关:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = \Delta u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

它是张力的弹性梁或薄板的非线性振动模型, 其中 u 表示梁或板的位移, $\Delta^2 u$ 表示梁截面抵抗弯曲的能力, a 表示初始张力, $b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ 表示由形变引起的张力增量, $f(x, u)$ 表示非线性恢复力。该模型在工程结构分析具有重要的应用价值。对于问题(1.2), 现已有一些结果, 参阅文献[1]-[4]。例如, 当 $f(x, u)$ 被 $\lambda f(x, u)$ 代替时, 王等[3]用分支方法证明了对所有 $\lambda > 0$ 都存在正解, 而 $\lambda < 0$ 时则没有正解。此外, 问题(1.2)与 Kirchhoff 方程的定态模拟有关:

$$u'' + \Delta^2 u - \left(1 + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f(x, u). \quad (1.3)$$

从物理和工程的角度来看, 一维和二维是相关的, 因为在这些情况下, 模型(1.3)被认为是描述非线性振动的近似, 参阅文献[5] [6]。

借助 Banach 不动点定理, 马[7]研究了一类非局部四阶 Kirchhoff 型方程解的存在性和多解性:

$$\begin{cases} u'' - M \left(\int_0^1 |u'|^2 dx\right) u'' = q(x) f(x, u, u'), \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

近年来, 关于下面的四阶椭圆型方程, 得到了一些结果, 参阅文献[8]-[10]:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - M \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u = f(x, u), \\ u = \Delta u = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是有界光滑区域, $M: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ 是连续的, 且满足(H)对于某些 $m_0 > 0$, $M(t) > m_0, \forall t > 0$ 。此外, 存在 $m' > m_0$ 且 $t_0 > 0$, 使得 $M(t) = m'$ 且 $\forall t > t_0$ 。

在对非线性函数 $f(x, u)$ 作适当的假设下, 得到了系统(1.5)解的存在性和多解性。当 $M = \lambda$ 时, 借助山路技术和截断方法, 王[10]证明了存在 $\lambda^* > 0$ 使得当 $\lambda \in (0, \lambda^*)$ 时系统(1.5)至少有一个非平凡解。另外, 使用变分方法和临界点理论, Ferrara 等人[8]通过将一个关于非线性项的代数条件与经典的 Ambrosetti-Rabinowitz 条件(简称(AR))相结合, 得到了四阶 Kirchhoff 型椭圆型问题非平凡非负解的多解性结果, 即存在 $\mu > 4$ 和 $L > 0$ 使得

$$\mu F(x, t) \leq t f(x, t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, |t| > L,$$

其中 $F(x, t) = \int_0^t f(x, s) ds$ 。另外, 关于 Ω 为无界区域的系统(1.5)解的存在性和多解性, 也有很多结果, 参阅文献[11]。

如果用 \mathbb{R}^N 代替 Ω , 且(1.1)中的 $V(x) \neq 0$, 则关于下面的四阶椭圆型方程, 得到了一些结果, 参阅文献[12]-[20]:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \left(a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + V(x)u = f(x, u), \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

其中,

$$H^2(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \nabla u, u \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

在关于 $f(x, u)$ 和 $V(x)$ 的一些适当的假设下, 江等人[15]证明了当 $4 < N < 8$ 时, 存在许多具有变号位势的高能解。若 $a + b \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$ 被替换为 $M \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$, 其中 M 满足条件(H)且 $f(x, u) = \lambda k(x, u) + h(x, u)$, 吴和李[16]证明了对所有 $\lambda > 0$ 都有无穷多解。在[12]中, Almuaalemi 等人利用山路定理得到了无穷高能解的存在性。

当方程(1.5)中 $a = 1, b = 0$, 可以得到以下的方程:

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \Delta u + V(x)u = f(x, u), \\ u \in H^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (1.6)$$

其已被广泛研究, 参阅文献[21]-[27]。特别地, 在关于 $f(x, u)$ 的一些适当的假设下, 基于变分方法, 刘等[21]得到了系统(1.6)的非平凡解的存在性和多解性, 而叶和唐[25]在不考虑空间紧性的情况下, 证明了问题(1.6)的解的存在性和多解性, 大大改进了[21]中的最新结果。在[27]中, 张等利用临界点理论中的亏格性质, 得到了问题(1.6)无穷多解的存在性。

受上述文献的启发, 更准确地说, 在[28][29]中, 本文研究了一般非线性的问题(1.1), 其中包括在[28][29]中使用的非线性。此外, 本文还假设了函数 $V(x)$ 和 $K(x)$ 的更一般的条件。在本文中, 如果满足以下条件, 则 $(V, K) \in \kappa$:

(H₁) $V(x), K(x) > 0$, 对 $x \in \mathbb{R}^3$ 且 $K \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$;

(H₂) 如果 $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^3$ 是 Borel 集的序列, 使得对所有 n 和一些 $R > 0$, A_n 的勒贝格测度小于 R , 则

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{A_n \cap B_r^c(0)} K(x) dx = 0, n \in \mathbb{N},$$

会发生以下其中一种情况:

$$(H_3) \quad \frac{K}{V} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$$

或

$$(H_4) \quad \text{存在 } p \in (2, 6) \text{ 使得 } \frac{K(x)}{V(x)^{\frac{6-p}{4}}} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Alves 和 Souto [30]引入了关于函数 $V(x)$ 和 $K(x)$ 的假设 $(H_1) \sim (H_4)$, 并将问题(1.1)刻画为零质量。具有零质量的非线性椭圆型方程已被许多作者研究过, 参阅文献[30]-[33]。在梁或板的模型中, 势函数在无穷远处消失意味着弹性地基随着空间而衰减到 0, 这体现了支撑介质在远离指定区域时逐渐软化的物理情形。另外, 对于正定势而言, 相当于板放在均匀地基上, 紧嵌入较易可得。而对在无穷远处消失势而言, 远处恢复力几乎为 0。此时, 系统的平衡不再依赖外部的恢复力, 而是由 $\Delta^2 u$ 与 Kirchhoff 项主导, 从而构成一类具有零质量特征的非局部问题。

关于函数 f , 假设 $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 并且满足以下条件:

$$(f_1) \quad \text{若 } (H_3) \text{ 成立, 则 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0;$$

$$(f_2) \quad \text{若 } (H_4) \text{ 成立, 则 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{|t|^{p-1}} = m_0 \in \mathbb{R}, \quad \text{其中 } p \in (2, 6);$$

$$(f_3) \quad f \text{ 是准临界增长的, 即满足 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^5} = 0;$$

$$(f_4) \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{t^4} = \infty, \quad \text{其中 } F(t) = \int_0^t f(s) ds;$$

$$(f_5) \quad \text{映射 } t \mapsto \frac{f(t)}{|t|^3} \text{ 对所有 } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ 是非减的。}$$

以下是本文得到的主要结果:

定理 1.1 假设 $(V, K) \in \kappa$ 且 f 满足 $(f_1) \sim (f_5)$, 则问题(1.1)至少存在一个变号解。

在本文中, 由于不需要关于非线性项 f 的经典(AR)条件, 因此很难证明 Palais-Smale 序列是有界的。此外, 由于本文是在整个 \mathbb{R}^3 中工作, 因此, 紧性的缺乏对本文来说也是一个困难。为了解决这些问题, 本文的主要工具是极小化方法和形变引理。在定理 1.1 的证明中, 主要工作是证明 $M \neq \emptyset$ (定义在(2.3)中), 极小元是 I 的一个临界点(定义在(2.1)中)。首先, 利用 Brouwer 不动点定理证明了流形 $M \neq \emptyset$, 本文所用的方法与文献[34]中的方法完全不同。然后, 利用文献[35]中引入的形变引理证明了极小元是 I 的一个临界点。

本文主要是研究势函数在无穷远处消失的情况, 相较于文献[16], 其是处理强制势下具有凹凸非线性结构的同类方程, 通过山路定理和临界点理论得到多重解与无穷多解的存在性。此外, 本文将文献[20]所研究的 $5 \leq N \leq 7$ 推进至 $N = 3$ 。另外, 本文利用文献[30]所建立的条件与框架, 将其针对二阶消失势的 Schrödinger 方程的基态解存在性, 拓展至含非局部性的四阶 Kirchhoff 方程的变号解存在性, 更具普适性。

在本文中, 利用 $\|\cdot\|_r$ 表示 L^r -范数, $1 \leq r \leq \infty$, S_p 是嵌入的最佳 Sobolev 常数, 使用记号 $u^+ = \max\{u(x), 0\}$ 和 $u^- = \min\{u(x), 0\}$, 且 $u = u^+ + u^-$ 。此外, C 表示各种正的通用常量。另外, 如果取序列 $\{u_n\}$ 的一个子序列, 则子序列依然用 $\{u_n\}$ 来表示。此外, 使用 $o(1)$ 来表示任何趋于零的量为 $n \rightarrow \infty$ 。

论文的剩余部分结构如下。第二节讨论了变分设定, 并证明了必要的引理。在第三节中, 本文给出

了主要结果的证明。

2. 变分结构及相关引理

在这一部分中，主要概述问题(1.1)的变分框架，并给出一些初步的引理。

令

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^3) := \{u \in L^6(\mathbb{R}^3) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$$

且

$$E := \{u \in H^2(\mathbb{R}^3) \cap D^{1,2}(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} V(x)u^2 dx < +\infty\}.$$

则在条件(H₁), (H₃)和(H₄)下, E 是具有如下内积和范数的 Hilbert 空间:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + V(x)uv) dx$$

且

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^3} (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

为了恢复紧性, 对于 $p \in [1, \infty)$, 定义加权勒贝格空间 $L_K^p(\mathbb{R}^3)$ 如下:

$$L_K^p(\mathbb{R}^3) = \{u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ 是可测的}, \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u|^p dx < \infty\}.$$

此外, 存在以下的紧性引理。

引理 2.1 假设 $(V, K) \in \kappa$ 。若(H₃)或(H₄)成立, 则对 $2 \leq r < 6$, E 嵌入到 $L_K^r(\mathbb{R}^3)$ 是紧的。

证明: 令 $\{u_n\} \subset E$ 是一个有界序列, 由于 E 是一个 Sobolev 空间, 满足 $u_n \rightharpoonup u$ 。

情形 1: 假设(H₃)成立。因为 $K(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 且在 $L^r(B_R(0))$ 中满足 $u_n \rightarrow u$ 。因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} K(x)|u_n|^r dx = \int_{B_R(0)} K(x)|u|^r dx.$$

对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $0 < s_0 < s_1$ 且 $C > 0$ 使得

$$K(x)|s|^r \leq \varepsilon C(V(x)|s|^2 + |s|^6) + CK(x)\chi_{[s_0, s_1]}(|s|)|s|^6, \forall s \in \mathbb{R}.$$

因此,

$$\int_{B_R^c(0)} K(x)|u|^r dx \leq \varepsilon CP(u) + C \int_{A \cap B_R^c(0)} K(x) dx,$$

其中 $\int_{B_R^c(0)} (V(x)|u|^2 + |u|^6) dx$ 和 $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : s_0 \leq |u(x)| \leq s_1\}$ 。因为在 E 中有 $u_n \rightharpoonup u$, 且 E 嵌入 $L^6(\mathbb{R}^3)$ 是连续的, 则存在 $M_1 > 0$ 和 $\forall n \in \mathbb{N}$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|\Delta u_n|^2 + |\nabla u_n|^2 + V(x)|u_n|^2) dx \leq M_1, \quad \int_{\mathbb{R}^3} |u_n|^6 dx \leq M_1.$$

这意味着 $P(u_n)$ 有界。另一方面, 令 $A_n = \{x \in \mathbb{R}^3 : s_0 \leq |u_n(x)| \leq s_1\}$, 则有 $s_0^6 |A_n| \leq \int_{A_n} |u_n|^6 dx \leq M_1$ 。因

此, $\sup_{n \in \mathbb{N}} |A_n| < +\infty$ 。由(H₃)知, 存在 $R > 0$ 满足 $\int_{A_n \cap B_R^c(0)} K(x) dx < \frac{\varepsilon}{s_1^6}$ 。那么 $\int_{B_R^c(0)} K(x)|u_n|^r dx \leq \varepsilon \left(CM_1 + \frac{C}{s_1^6} \right)$ 。

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n|^r dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u|^r dx$ 。

情形 2: 假设(H4)成立, 令 $g(s) = V(x)s^{2-r} + s^{6-r}$, 其中 $s > 0$ 。易知它存在最小值 $C_r V(x)^{\frac{6-r}{4}}$, 其中 $C_r = \left(\frac{r-2}{6-r}\right)^{\frac{2-r}{4}} \frac{4}{6-r}$ 。因此, $C_r V(x)^{\frac{6-r}{4}} \leq V(x)s^{2-r} + s^{6-r}$ 。由(H4)知, 对 $\varepsilon \in (0, C_r)$, 存在足够大的 $R > 0$ 满足 $K(x)|s|^r \leq \varepsilon(V(x)|s|^2 + |s|^6)$ 。于是, $\int_{B_R^c(0)} K(x)|u|^r dx \leq \varepsilon \int_{B_R^c(0)} (V(x)|u|^2 + |u|^6) dx$ 。由 $u_n \rightarrow u$, 类似于情形 1, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u_n|^r dx = \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|u|^r dx$ 。证毕。

众所周知, 问题(1.1)的弱解是下列泛函的一个临界点:

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{4}\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)F(u) dx. \tag{2.1}$$

在上述假设下, 很容易知道 $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ 且

$$\begin{aligned} \langle I'(u), v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + V(x)uv) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^3} K(x)f(u)v dx. \end{aligned} \tag{2.2}$$

因此, 如果 $u \in E$ 是 I 的临界点, 则 u 是问题(1.1)的解。

引理 2.2 ([30], Lemma 2.2) 假设 f 满足 $(f_1) \sim (f_3)$ 且 $(V, K) \in \kappa$ 。令 $\{v_n\}$ 是一个在 E 中满足 $v_n \rightarrow v$ 的序列, 则

$$\int_{\mathbb{R}^3} KF(v_n) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} KF(v) dx$$

且

$$\int_{\mathbb{R}^3} Kf(v_n)v_n dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} Kf(v)v dx.$$

引理 2.3 ([31], Lemma 2.4) 假设 f 满足 $(f_1) \sim (f_5)$ 且 $(V, K) \in \kappa$, 则对任意 $u \in E \setminus \{0\}$, 有

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Kf(tu)u}{t^3} dx = \infty.$$

引理 2.4 ([31], Lemma 2.5) 假设 f 满足 $(f_1) \sim (f_5)$ 且 $(V, K) \in \kappa$, 则对任意 $u \in E \setminus \{0\}$, 有

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{KF(tu)}{t^4} dx = \infty.$$

引理 2.5 ([31], Lemma 2.6) 假设 f 满足 $(f_1) \sim (f_5)$ 且 $(V, K) \in \kappa$, 则对任意 $u \in E \setminus \{0\}$, 有

$$\lim_{|t| \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Kf(tu)u}{t} dx = 0.$$

现在, 证明与问题(1.1)的变号解的存在性有关的一些技术引理。

为此, 对于任意 $u \in E$ 且 $u^\pm \neq 0$, 定义 $H_u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $H_u(t, s) = I(tu^+ + su^-)$ 。

引理 2.6 假设 $(V, K) \in \kappa$ 且 f 满足 $(f_1) \sim (f_5)$, 则:

(i) 对 $t, s > 0$, (t, s) 是 H_u 的一个临界点当且仅当 $tu^+ + su^- \in M$, 其中

$$M = \{u \in E : u^\pm \neq 0, \langle I'(u), u^+ \rangle = \langle I'(u), u^- \rangle = 0\}; \tag{2.3}$$

(ii) 映射 H_u 存在唯一的临界点 (t_+, s_-) , 其中 $t_+ = t_+(u) > 0$ 且 $s_- = s_-(u) > 0$, 这是 H_u 的唯一极大点。

证明: 因为

$$\begin{aligned} \nabla H_u(t,s) &= \left(\left\langle I'(tu^+ + su^-), u^+ \right\rangle, \left\langle I'(tu^+ + su^-), u^- \right\rangle \right) \\ &= \left(\frac{1}{t} \left\langle I'(tu^+ + su^-), tu^+ \right\rangle, \frac{1}{s} \left\langle I'(tu^+ + su^-), su^- \right\rangle \right) \\ &= \left(\frac{1}{t} g_u(t,s), \frac{1}{s} h_u(t,s) \right), \end{aligned}$$

其中

$$g_u(t,s) = t^2 \|u^+\|^2 + t^2 s^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx + t^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} Kf(tu^+) tu^+ dx \tag{2.4}$$

且

$$h_u(t,s) = s^2 \|u^-\|^2 + t^2 s^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx + s^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} Kf(su^-) su^- dx. \tag{2.5}$$

因此, (i)得到了证明。

现在对(ii)进行证明。首先, 证明 H_u 临界点的存在性, 即 $M \neq \emptyset$ 。对于 $u \in E$, 当 $u^+ \neq 0$ 且 $s_0 \geq 0$ 取定时, 对于(2.4)和引理 2.5, 我们有

$$g_u(t,s_0) = t^2 \left(\|u^+\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + t^2 \left(s_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Kf(tu^+)u^+}{t} dx \right),$$

则当 t 足够小时, 有 $g_u(t,s_0) > 0$ 。同时, 从(2.4)中, 可得到

$$g_u(t,s_0) = t^4 \left(\frac{1}{t^2} \|u^+\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + t^4 \left(\frac{s_0^2}{t^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Kf(tu^+)u^+}{t^3} dx \right).$$

因此, 从引理 2.3 推出, 对于足够小的 t , 有 $g_u(t,s_0) < 0$ 。由于 $g_u(t,s_0)$ 是连续的, 则存在 $t_0 > 0$, 使得 $g_u(t_0,s_0) = 0$ 。现在证明 t_0 是唯一的。若不然, 存在 $0 < t_1 < t_2$, 使得 $g_u(t_1,s_0) = g_u(t_2,s_0) = 0$ 。因此,

$$\frac{1}{t_1^2} \|u^+\|^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + \frac{s_0^2}{t_1^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Kf(t_1 u^+)}{(t_1 u^+)^3} (u^+)^4 dx$$

且

$$\frac{1}{t_2^2} \|u^+\|^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + \frac{s_0^2}{t_2^2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Kf(t_2 u^+)}{(t_2 u^+)^3} (u^+)^4 dx.$$

因此,

$$\left(\frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} \right) \left(\|u^+\|^2 + s_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \right) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{Kf(t_1 u^+)}{(t_1 u^+)^3} - \frac{Kf(t_2 u^+)}{(t_2 u^+)^3} \right) (u^+)^4 dx.$$

根据(f₅)和 $0 < t_1 < t_2$, 矛盾。因此, 存在唯一的 $t_0 > 0$ 使得 $g_u(t_0,s_0) = 0$ 。设 $\varphi_1(s) = t(s)$, 其中 $t(s)$ 满足前面提到的性质, 用 s 代替 s_0 。因此, 很好地定义了映射 $\varphi_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ 。根据 $\frac{\partial H_u}{\partial t}$ 的定义, 可得

$$\frac{\partial H_u}{\partial t}(\varphi_1(s), s) = 0, \quad s \geq 0,$$

即

$$\varphi_1(s) \|u^+\|^2 + \varphi_1^3(s) \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + \varphi_1(s) s^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} Kf(\varphi_1(s)u^+)(u^+) dx, s \geq 0. \quad (2.6)$$

下面, 证明函数 φ_1 的一些性质:

(P₁) φ_1 是连续的。

事实上, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 设 $s_n \rightarrow s_0$ 。首先, 先证明 $\varphi_1(s_n)$ 是有界的。若不然, 因 $\{s_n\}$ 存在一个子序列, 仍记为 $\{s_n\}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\varphi_1(s_n) \rightarrow \infty$ 。因此, 对足够大的 n , 有 $\varphi_1(s_n) \geq s_n$ 。由(2.4), 可得

$$\frac{\|u^+\|^2}{\varphi_1^2(s_n)} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + \frac{s_n^2}{\varphi_1^2(s_n)} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} K \frac{f(\varphi_1(s_n)u^+)}{(\varphi_1(s_n)u^+)^3} (u^+)^4 dx.$$

由引理 2.3 知, 矛盾。因此, $\varphi_1(s_n)$ 是有界的。于是, 存在 $t_0 \geq 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 使得

$$\varphi_1(s_n) \rightarrow t_0. \quad (2.7)$$

在 $s = s_n$ 的情况下, 将(2.6)中的 $n \rightarrow \infty$ 传递到极限, 利用(2.7)得到

$$t_0 \|u^+\|^2 + t_0^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + t_0 s_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} Kf(t_0 u^+) u^+ dx, s \geq 0.$$

这说明 $\frac{\partial H_u}{\partial t}(t_0, s_0) = 0$ 。因此, $t_0 = \varphi_1(s_0)$ 意味着 φ_1 是连续的。

(P₂) $\varphi_1(s)$ 有下界 0。

若不然, 存在一个序列 $\{s_n\}$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\varphi_1(s_n) \rightarrow 0^+$ 。于是, 根据(2.6)和引理 2.5, 可得

$$\|u^+\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} K \frac{f(\varphi_1(s_n)u^+) u^+}{\varphi_1(s_n)} dx = 0.$$

这与 $u^+ \neq 0$ 矛盾。因此, 存在 $C_0 > 0$ 使得 $\varphi_1(s) \geq C_0$ 。

(P₃) 对足够大的 s 满足 $\varphi_1(s) \leq s$ 。

事实上, 如果存在具有 $s_n \rightarrow \infty$ 的序列 $\{s_n\}$, 使得 $\varphi_1(s_n) > s_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 成立, 则它从(2.6)推出(2.7)成立, 这与引理 2.3 相矛盾。因此, 对于足够大的 s 满足 $\varphi_1(s) \leq s$ 。类似地, 对 $h_u(t, s)$, 也可以定义映射 $\varphi_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ 为 $\varphi_2(t) = s(t)$ 满足(P₁)~(P₃)。

考虑

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_u}{\partial t} & \frac{\partial g_u}{\partial s} \\ \frac{\partial h_u}{\partial t} & \frac{\partial h_u}{\partial s} \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_u}{\partial s}(t, s) &= 2t^2 s \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx, \\ \frac{\partial h_u}{\partial t}(t, s) &= 2ts^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx, \\ \frac{\partial g_u}{\partial t}(t, s) &= 2t \|u^+\|^2 + 4t^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + 2ts^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \\ &\quad - \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(Kf'(tu^+) t (u^+)^2 + Kf(tu^+) u^+ \right) dx \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h_u}{\partial s}(t,s) = 2s \|u^-\|^2 + 4s^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \right)^2 + 2t^2 s \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx - \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left(Kf'(su^-)s(u^-)^2 + Kf(su^-)u^- \right) dx \right).$$

由(f₃)知, $f'(t)t - 3f(t) \geq 0$ 。因此, 根据 $g_u(t,s) = 0$ 知,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_u}{\partial t}(t,s) &\leq -2t \|u^+\|^2 - 2ts^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \leq 0, \\ \frac{\partial h_u}{\partial s}(t,s) &\leq -2s \|u^-\|^2 - 2t^2 s \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

于是 $\det B > 0$ 。

根据(P₃), 存在 $C_1 > 0$ 使得对 $t, s > C_1$, 满足 $\varphi_1(s) \leq s$ 且 $\varphi_2(t) \leq t$ 。令 $C_2 = \max \left\{ \max_{s \in [0, C_1]} \varphi_1(s), \max_{t \in [0, C_1]} \varphi_2(t) \right\}$ 。

设 $C = \max \{C_1, C_2\}$, 定义 $T : [0, C] \times [0, C] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为 $T(t, s) = (\varphi_1(s), \varphi_2(t))$ 。下面, 将证明对所有 $(t, s) \in [0, C] \times [0, C]$ 满足 $T(t, s) \in [0, C] \times [0, C]$ 。事实上,

$$\begin{cases} \varphi_2(t) \leq t \leq C, t > C_1, \\ \varphi_2(t) \leq \max_{t \in [0, C_1]} \varphi_2(t) \leq C_2, t \leq C_1, \end{cases}$$

因 $\varphi_2(t) \leq C$ 。类似地, 可得 $\varphi_1(s) \leq C$ 。因此, 根据 Brouwer 不动点定理, 存在 (t_+, s_-) , 使得

$$(\varphi_1(s_-), \varphi_2(t_+)) = (t_+, s_-).$$

根据 $\varphi_1, \varphi_2 > 0$, 这意味着 $t_+, s_- > 0$ 。接着, 根据定义, 可得 $\frac{\partial H_u}{\partial t}(t_+, s_-) = \frac{\partial H_u}{\partial s}(t_+, s_-) = 0$ 。

现在证明 (t_+, s_-) 的唯一性。事实上, 假设 $w \in M$, 则

$$\nabla H_w(1,1) = \left(\frac{\partial H_w}{\partial t}(1,1), \frac{\partial H_w}{\partial s}(1,1) \right) = \left(\langle I'(w^+ + w^-), w^+ \rangle, \langle I'(w^+ + w^-), w^- \rangle \right) = (0, 0).$$

因此, (1,1) 是 H_w 的一个临界点。现在证明 (1,1) 也是 H_w 的唯一正坐标临界点。假设 (t_0, s_0) 是 H_w 一个临界点, 不失一般性, 假设 $0 < t_0 \leq s_0$, 则

$$t_0^2 \|w^+\|^2 + t_0^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx \right)^2 + t_0^2 s_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} Kf(t_0 w^+) (t_0 w^+) dx \tag{2.8}$$

且

$$s_0^2 \|w^-\|^2 + s_0^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx \right)^2 + t_0^2 s_0^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} Kf(s_0 w^-) (s_0 w^-) dx. \tag{2.9}$$

因为 $0 < t_0 \leq s_0$, 由(2.9), 可得

$$s_0^2 \|w^-\|^2 + s_0^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx \right)^2 + s_0^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} Kf(s_0 w^-) (s_0 w^-) dx,$$

则

$$\frac{\|w^-\|^2}{s_0^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx \right)^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^3} K \frac{f(s_0 w^-)}{(s_0 w^-)^3} (w^-)^4 dx. \tag{2.10}$$

另一方面, 因为 $w \in M$, 所以

$$\|w^-\|^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx\right)^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} K \frac{f(w^-)}{(w^-)^3} (w^-)^4 dx. \tag{2.11}$$

由(2.10)和(2.11), 可得

$$\left(\frac{1}{s_0^2} - 1\right) \|w^-\|^2 \geq \int_{\mathbb{R}^3} K \left[\frac{f(s_0 w^-)}{(s_0 w^-)^3} - \frac{f(w^-)}{(w^-)^3} \right] (w^-)^4 dx. \tag{2.12}$$

由(2.12)和(f₅)可得 $0 < t_0 \leq s_0 \leq 1$. 现证明 $t_0 \geq 1$. 事实上, 由(2.8)和 $0 < t_0 \leq s_0$, 可得

$$\frac{\|w^+\|^2}{t_0^2} + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx\right)^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} K \frac{f(t_0 w^+)}{(t_0 w^+)^3} (w^+)^4 dx. \tag{2.13}$$

另外,

$$\|w^+\|^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx\right)^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^-|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla w^+|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^3} K \frac{f(w^+)}{(w^+)^3} (w^+)^4 dx. \tag{2.14}$$

由(2.13)和(2.14), 可得

$$\left(\frac{1}{t_0^2} - 1\right) \|w^+\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} K \left[\frac{f(t_0 w^+)}{(t_0 w^+)^3} - \frac{f(w^+)}{(w^+)^3} \right] (w^+)^4 dx. \tag{2.15}$$

若 $t_0 < 1$, (2.15)的左边是正的. 然而, 根据(f₅), (2.15)的右边是负的. 因此, 可以证明 $t_0 \geq 1$. 于是, $t_0 = s_0 = 1$. 从而, (1,1)是 H_u 具有正坐标的唯一临界点.

现在证明 $u \in E$, $u^\pm \neq 0$ 且 (t_1, s_1) , (t_2, s_2) 是具有正坐标的 H_u 的临界点. 由(i), 可得

$$w_1 = t_1 u^+ + s_1 u^- \in M, w_2 = t_2 u^+ + s_2 u^- \in M.$$

因此,

$$w_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} t_1 u^+ + \begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} s_1 u^- = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} w_1^+ + \begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} w_1^- \in M.$$

因为 $w_1 \in E$ 且 $w_1^\pm \neq 0$, 则可得 $\begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$ 是具有正坐标的 H_{w_1} 的一个临界点. 因为 $w_1 \in M$, 所以

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{s_2}{s_1} = 1, \text{ 这意味着 } t_1 = t_2 \text{ 和 } s_1 = s_2.$$

最后, 证明唯一临界点是 H_u 的唯一极大值. 根据 $H_u(t, s)$ 的定义和引理 2.4, 可得当 $|(t, s)| \rightarrow \infty$ 时, $|H_u(t, s)| \rightarrow -\infty$, 即 $H_u(t, s)$ 有一个极大值点. 下面, 将证明其在 \mathbb{R}_+^2 的边界上不能达到极大值. 不失一般性, 只需证明 $(l, 0)$ 不是 H_u 的一个极大值点. 事实上, 因为

$$\begin{aligned} H_u(l, s) &= I(lu^+ + su^-) \\ &= \frac{l^2}{2} \|u^+\|^2 + \frac{l^4}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} KF(lu^+) dx \\ &\quad + \frac{l^2 s^2}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx + \frac{s^2}{2} \|u^-\|^2 \\ &\quad + \frac{s^4}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx\right)^2 - \int_{\mathbb{R}^3} KF(su^-) dx. \end{aligned}$$

根据引理 2.5, 由于 s 足够小, 因此, 它是关于 s 的增函数, 即 $(l, 0)$ 不是 H_u 在 \mathbb{R}_+^2 的极大值点。于是, H_u 在某一点 (t_0, s_0) 有极大值, 这是 H_u 的临界点。证毕。

引理 2.7 假设 $(V, K) \in \kappa$ 且 f 满足 $(f_1) \sim (f_5)$ 。若 $u \in E$ 且 $u^\pm \neq 0$, 使得 $g_u(1, 1) \leq 0$ 且 $h_u(1, 1) \leq 0$, 其中 $g_u(t, s)$ 和 $h_u(t, s)$ 在(2.4)和(2.5)给出, 则引理 2.6 中得到的 (t_+, s_-) 满足 $0 < t_+, s_- \leq 1$ 。

证明: 不失一般性, 假设 $t_+ \geq s_- > 0$ 。因为 $t_+ u^+ + s_- u^- \in M$, 所以

$$\begin{aligned} & t_+^2 \|u^+\|^2 + t_+^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 \\ & + t_+^4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \\ & \geq t_+^2 \|u^+\|^2 + t_+^4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right) \\ & + t_+^2 s_-^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} Kf(t_+ u^+) (t_+ u^+) dx. \end{aligned} \tag{2.16}$$

另一方面, 因为 $g_u(1, 1) \leq 0$, 所以

$$\|u^+\|^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} Kf(u^+) u^+ dx. \tag{2.17}$$

于是, 由(2.16)和(2.17), 可得

$$\left(\frac{1}{t_+^2} - 1 \right) \|u^+\|^2 \geq \int_{\mathbb{R}^3} K \left(\frac{f(t_+ u^+)}{(t_+ u^+)^3} - \frac{f(u^+)}{(u^+)^3} \right) (u^+)^4 dx. \tag{2.18}$$

若 $t_+ > 1$, 则(2.18)式左边为负的, 然而根据条件 (f_5) , (2.18)右边为正的, 矛盾。因此, $t_+ \leq 1$ 。证毕。根据引理 2.6, 定义

$$m = \inf \{ I(u) : u \in M \}. \tag{2.19}$$

引理 2.8 假设 $(V, K) \in \kappa$ 且 f 满足 $(f_1) \sim (f_5)$, 则 $m > 0$ 是可取得的。

证明: 首先, 假设 (H_3) 是成立的。则根据 (f_1) 和 (f_3) , 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$|f(t)| \leq \varepsilon |t| + C_\varepsilon |t|^5, \quad t \in \mathbb{R}.$$

因此,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} Kf(u) u dx \right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} K u^2 dx + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} K u^6 dx \leq \varepsilon \|K/V\|_\infty \|u\|^2 + C_\varepsilon \|K\|_\infty S_6^{-3} \|u\|^6. \tag{2.20}$$

则根据(2.20)和 $u \in M$, 有

$$\begin{aligned} \|u\|^2 & \leq \int_{\mathbb{R}^3} (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx + \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \right)^2 \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} Kf(u) u dx \leq \varepsilon \|K/V\|_\infty \|u\|^2 + C_\varepsilon \|K\|_\infty S_6^{-3} \|u\|^6. \end{aligned}$$

取定 $\varepsilon < \frac{1}{\|K/V\|_\infty}$, 由(2.19), 存在 $a_1 > 0$ 满足 $\|u\|^2 \geq a$ 。

下面, 假设 (H_4) 成立。由[30]知, 存在 $C_p > 0$, 对任意 $\varepsilon \in (0, C_p)$, 存在足够大的 $R > 0$, 满足

$$\int_{|x| \geq R} K |u|^p dx \leq \varepsilon \int_{|x| \geq R} (V(x)u^2 + u^6) dx, \quad u \in E. \tag{2.22}$$

由 (f_2) 和 (f_3) , 存在 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$|f(t)| \leq C_1 |t|^{p-1} + C_2 |t|^5, \quad t \in \mathbb{R}.$$

于是, 根据(2.22)和 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^3} Kf(u)u \, dx \right| &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^3} K|u|^p \, dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^3} Ku^6 \, dx \\ &\leq C_1 \varepsilon \int_{|x| \geq R} (V(x)u^2 + u^6) \, dx + C_2 \|K\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^6 \, dx \\ &\quad + C_1 \left(\int_{|x| < R} |K|^{6/6-p} \, dx \right)^{\frac{6-p}{6}} \left(\int_{|x| < R} |u|^6 \, dx \right)^{\frac{p}{6}} \\ &\leq C_1 \varepsilon \|u\|^2 + C_1 S_6^{-3} (\varepsilon + C_2 \|K\|_{\infty}) \|u\|^6 \\ &\quad + \|K\|_{\frac{6}{6-p}(B_R(0))} S_6^{-\frac{p}{2}} \|u\|^p. \end{aligned} \quad (2.23)$$

因此, 取 $\varepsilon < 1/C_1$, 根据(2.23)可知, 存在 $a_2 > 0$ 使得 $\|u\|^2 \geq a_2$ 。于是, 存在 $a = \max\{a_1, a_2\} > 0$ 使得 $\|u\|^2 \geq a$ 。根据条件 (f_5) 知, 可得

$$f'(t)t^2 - 3f(t)t \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

因此,

$$G(t) := f(t)t - 4F(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.25)$$

并且, 当 $t > 0$ 时, G 递增; 当 $t < 0$ 时, G 递减。于是,

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{4} \langle I'(u), u \rangle = \frac{1}{4} \|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(f(u)u - 4F(u)) \, dx \geq \frac{1}{4} a.$$

这也说明了 $m \geq \frac{1}{4} a > 0$ 。

令 $\{u_n\} \subset M$ 使得 $I(u_n) \rightarrow m$, 则 $\|u_n\| \leq C$ 。因此, 存在 $u \in E$ 使得 $u_n \rightharpoonup u$ 且 $u_n^{\pm} \rightharpoonup u^{\pm}$ 。另一方面, 根据 $\{u_n\} \subset M$, 则有 $\langle I'(u_n), u_n^{\pm} \rangle = 0$ 。于是

$$\|u_n^{\pm}\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n^{\pm}|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} Kf(u_n^{\pm})u_n^{\pm} \, dx.$$

由引理 2.2 知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$0 < a \leq \|u_n^{\pm}\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n^{\pm}|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} Kf(u_n^{\pm})u_n^{\pm} \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} Kf(u^{\pm})u^{\pm} \, dx + o(1).$$

于是, $u^{\pm} \neq 0$ 。另一方面, 根据范数弱收敛和 Fatou 引理, 可得

$$\|u^{\pm}\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^{\pm}|^2 \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\|u_n^{\pm}\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u_n^{\pm}|^2 \, dx \right).$$

由引理 2.2, 可得

$$\|u^{\pm}\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^{\pm}|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} Kf(u^{\pm})u^{\pm} \, dx. \quad (2.26)$$

因此, 由(2.26)和引理 2.6 和 2.7 知, 存在 $(\bar{t}, \bar{s}) \in (0, 1] \times (0, 1]$ 使得

$$\bar{u} = \bar{t}u^+ + \bar{s}u^- \in M.$$

由(2.25)知,

$$\begin{aligned}
 m &\leq I(\bar{u}) - \frac{1}{4} \langle I'(\bar{u}), \bar{u} \rangle \\
 &= \frac{1}{4} \|\bar{u}\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(f(\bar{u})\bar{u} - 4F(\bar{u})) \, dx \\
 &= \frac{1}{4} (\|\bar{t}u^+\|^2 + \|\bar{s}u^-\|^2) + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(f(\bar{t}u^+)\bar{t}u^+ - 4F(\bar{t}u^+)) \, dx \\
 &\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(f(\bar{s}u^-\bar{s}u^- - 4F(\bar{s}u^-)) \, dx \\
 &\leq \frac{1}{4} \|u\|^2 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} K(f(u)u - 4F(u)) \, dx \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(I(u_n) - \frac{1}{4} \langle I'(u_n), u_n \rangle \right) = m.
 \end{aligned}$$

这意味着 $\bar{t} = \bar{s} = 1$ 。则 $\bar{u} = u$ 且 $I(u) = m$ 。证毕。

3. 结论证明

在这一节中，将利用[36]中的定量引理证明(2.19)的极小元 u 确实是问题(1.1)的变号解。

定理 1.1 的证明： 因为 $u \in M$ ，所以 $\langle I'(u), u^+ \rangle = 0 = \langle I'(u), u^- \rangle$ 。对 $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$ 和 $(t, s) \neq (1, 1)$ 。由引理 2.6，则

$$I(tu^+ + su^-) < I(u^+ + u^-) = m. \tag{3.1}$$

令 $\alpha = \|u^+\|_6$ ， $\beta = \|u^-\|_6$ 和 $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$ 。假设 $I'(u) \neq 0$ ，则存在 $\rho, r > 0$ 使得

$$\|I'(v)\| \geq \lambda, \quad \|v - u\| \leq \rho. \tag{3.2}$$

取 $\delta \in (0, \min\{1/2, \delta/(\sqrt{2}\|u\|)\})$ 。令 $D = (1 - \sigma, 1 + \sigma) \times (1 - \sigma, 1 + \sigma)$ 且 $\psi(t, s) = tu^+ + su^-$ ， $(t, s) \in D$ ，则根据(3.1)，有

$$\bar{m} = \max_{\partial D} I \circ \psi < m. \tag{3.3}$$

令 $0 < \varepsilon < \min\{(m - \bar{m})/2, \lambda\delta/8\}$ 且 $S = \{v \in E, \|v - u\| \leq \delta\}$ 。因此，由(3.2)知，有

$$\|I'(v)\| \geq 8\varepsilon/\delta, \quad \forall v \in I^-\left([m - 2\varepsilon, m + 2\varepsilon]\right) \cap S_{2\delta}. \tag{3.4}$$

利用(3.4)和[36]中的引理 2.3，存在 $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ 使得

- (i) 若 $u \notin I^-\left([m - 2\varepsilon, m + 2\varepsilon]\right) \cap S_{2\delta}$ ，则 $\eta(1, u) = u$ ；
- (ii) $\eta(1, I^{m+\varepsilon} \cap S) \subset I^{m-\varepsilon}$ ；
- (iii) 对所有 $u \in E$ ，有 $\|\eta(1, u) - u\| \leq \delta$ ；

下面，首先证明

$$\max_{(t,s) \in \bar{D}} I(\eta(1, \psi(t, s))) < m. \tag{3.5}$$

事实上，根据引理 2.6，有 $I(\psi(t, s)) \leq m < m + \varepsilon$ ，即 $\psi(t, s) \in I^{m+\varepsilon}$ 。更进一步地，

$$\|\psi(t, s) - u\|^2 \leq 2\left((t-1)^2 \|u^+\|^2 + (s-1)^2 \|u^-\|^2\right) \leq 2\sigma^2 \|u\|^2 < \delta^2.$$

这说明确实对 $(s, t) \in \bar{D}$ ，有 $\psi(t, s) \in S$ 。于是，由(ii)知， $I(\eta(1, \psi(t, s))) < m - \varepsilon$ 。从而，(3.5)得证。

下面，证明

$$\eta(1, \psi(D)) \cap M \neq \emptyset. \quad (3.6)$$

事实上, 定义

$$\gamma(t, s) = \eta(1, \psi(t, s)),$$

$$\Psi_0(t, s) = \left(\langle I'(\psi(t, s)), tu^+ \rangle, \langle I'(\psi(t, s)), su^- \rangle \right) = \left(\langle I'(tu^+ + su^-), tu^+ \rangle, \langle I'(tu^+ + su^-), su^- \rangle \right),$$

和

$$\Psi_1(t, s) = \left(\langle I'(\gamma(t, s)), (\gamma(t, s))^+ \rangle, \langle I'(\gamma(t, s)), (\gamma(t, s))^- \rangle \right).$$

由(2.4)和(2.5), 可知

$$\frac{\partial \mathbf{g}_u}{\partial t}(1, 1) = \|u^+\|^2 + 3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} Kf'(u^+)(u^+)^2 dx,$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_u}{\partial s}(1, 1) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx,$$

$$\frac{\partial h_u}{\partial t}(1, 1) = 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx,$$

和

$$\frac{\partial h_u}{\partial s}(1, 1) = \|u^-\|^2 + 3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \right)^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} Kf'(u^-)(u^-)^2 dx.$$

设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_u}{\partial t}(1, 1) & \frac{\partial \mathbf{g}_u}{\partial s}(1, 1) \\ \frac{\partial h_u}{\partial t}(1, 1) & \frac{\partial h_u}{\partial s}(1, 1) \end{bmatrix}.$$

由(2.24), 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_u}{\partial t}(1, 1) &= \|u^+\|^2 + 3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} Kf'(u^+)(u^+)^2 dx \\ &\leq \|u^+\|^2 + 3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \right)^2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx - 3 \int_{\mathbb{R}^3} Kf(u^+)u^+ dx \\ &= -2 \|u^+\|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

类似地, 也有

$$\frac{\partial h_u}{\partial s}(1, 1) \leq -2 \|u^-\|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx.$$

于是, 可得

$$\begin{aligned} \det A &\geq 4 \left(\|u^+\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \right) \times \left(\|u^-\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \right) \\ &\quad - 4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^+|^2 dx \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u^-|^2 dx \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

另一方面, Ψ_0 是 C^1 的且 $(1,1)$ 是 Ψ_0 的唯一孤立零点, 则可得

$$\deg(\Psi_0, D, 0) = \text{ind}(\Psi_0, (1,1)) = \text{sgn } I_{\Psi_0}(1,1) = 1.$$

由(3.3), (i)和 $\bar{m} < m - 2\varepsilon$, 则在 ∂D 中有 $\psi = \gamma$ 。因此, $\deg(\Psi_0, D, 0) = \deg(\Psi_1, D, 0) = 1$, 则存在 $(t_0, s_0) \in D$ 使得 $\Psi_1(t_0, s_0) = 0$ 。因为 $\|u^\pm\|_6 \geq \alpha$ 且 $(t_0, s_0) \in D$, 所以 $\|(\psi(t_0, s_0))^+\|_6 = t_0 \|u^+\|_6 \geq \frac{\alpha}{2}$ 且 $\|(\psi(t_0, s_0))^- \|_6 = t_0 \|u^-\|_6 \geq \frac{\alpha}{2}$ 。由(iii)知, $\|\gamma(t_0, s_0) - \psi(t_0, s_0)\|_6 \leq S_6 \|\gamma(t_0, s_0) - \psi(t_0, s_0)\| \leq S_6 \delta$, 这意味着 $\|\gamma(t_0, s_0)^\pm - \psi(t_0, s_0)^\pm\|_6 \leq \|\gamma(t_0, s_0) - \psi(t_0, s_0)\| \leq S_6 \delta$ 。于是, 可得

$$\|(\gamma(t_0, s_0))^\pm\|_6 \geq \|(\psi(t_0, s_0))^\pm\|_6 - S_6 \delta \geq \frac{\alpha}{2} - S_6 \delta > 0.$$

也就是说, $(\gamma(t_0, s_0))^\pm \neq 0$ 。因此, $\eta(1, \psi(t_0, s_0)) = \gamma(t_0, s_0) \in M$, 这与(3.5)矛盾。于是, u 是 I 的一个临界点, 即问题(1.1)存在一个变号解。证毕。

参考文献

- [1] Li, Q. and Han, Y. (2023) Existence and Uniqueness of Solution to a Fourth-Order Kirchhoff Type Elliptic Equation with Strong Singularity. *Annales Polonici Mathematici*, **130**, 253-269. <https://doi.org/10.4064/ap220727-1-3>
- [2] Montenegro, M. (2021) Existence of Solution for Kirchhoff Model Problems with Singular Nonlinearity. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 82, 1-13. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2021.1.82>
- [3] Wang, J. and Wang, D. (2020) Existence Results of Positive Solutions for Kirchhoff Type Biharmonic Equation via Bifurcation Methods. *Turkish Journal of Mathematics*, **44**, 1824-1834. <https://doi.org/10.3906/mat-2001-50>
- [4] Zhang, Q. and Han, Y.Z. (2024) Existence of Nontrivial Solutions to a Critical Fourth-Order Kirchhoff Type Elliptic Equation. *Acta Applicandae Mathematicae*, **192**, Article No. 5. <https://doi.org/10.1007/s10440-024-00668-9>
- [5] Berger, H.M. (1955) A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **22**, 465-472. <https://doi.org/10.1115/1.4011138>
- [6] Ball, J.M. (1973) Initial-Boundary Value Problems for an Extensible Beam. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **42**, 61-90. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(73\)90121-2](https://doi.org/10.1016/0022-247x(73)90121-2)
- [7] Ma, T. (2007) Positive Solutions for a Nonlocal Fourth Order Equation of Kirchhoff Type. *Discrete and Continuous Dynamical*, **2007**, 694-703.
- [8] Ferrara, M., Khademloo, S. and Heidarkhani, S. (2014) Multiplicity Results for Perturbed Fourth-Order Kirchhoff Type Elliptic Problems. *Applied Mathematics and Computation*, **234**, 316-325. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.02.041>
- [9] Silva, E.D., de Albuquerque, J.C. and Cavalcante, T.R. (2021) Fourth-Order Nonlocal Type Elliptic Problems with Indefinite Nonlinearities. *Partial Differential Equations and Applications*, **2**, Article No. 21. <https://doi.org/10.1007/s42985-021-00078-8>
- [10] Wang, F., Avci, M. and An, Y. (2014) Existence of Solutions for Fourth Order Elliptic Equations of Kirchhoff Type. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **409**, 140-146. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.003>
- [11] Xu, L. and Chen, H. (2015) Multiplicity Results for Fourth Order Elliptic Equations of Kirchhoff-Type. *Acta Mathematica Scientia*, **35**, 1067-1076. [https://doi.org/10.1016/s0252-9602\(15\)30040-0](https://doi.org/10.1016/s0252-9602(15)30040-0)
- [12] Almualemi, B., Chen, H.B. and Khoutir, S. (2020) Infinitely Many High Energy Solutions for a Fourth-Order Equations of Kirchhoff Type in \mathbb{R}^N . *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **51**, 121-133. <https://doi.org/10.1007/s13226-020-0388-6>
- [13] Guan, W. and Zhang, H.B. (2021) Sign-Changing Solutions for Schrödinger-Kirchhoff-Type Fourth-Order Equation with Potential Vanishing at Infinity. *Journal of Inequalities and Applications*, **2021**, Article No. 27. <https://doi.org/10.1186/s13660-021-02552-8>
- [14] Huang, J.P. and Zhang, Q. (2020) Existence of Nonnegative Solutions for Fourth Order Elliptic Equations of Kirchhoff Type with General Subcritical Growth. *Taiwanese Journal of Mathematics*, **24**, 81-96. <https://doi.org/10.11650/tjm/190202>
- [15] Jiang, R.T., Feng, H.X. and Zhai, C.B. (2022) Infinitely Many High Energy Solutions for Nonlocal Fourth-Order Equation with Sign-Changing Potential. *Applicable Analysis*, **102**, 4350-4358.

- <https://doi.org/10.1080/00036811.2022.2107918>
- [16] Wu, D.L. and Li, F.Y. (2020) Solutions for Fourth-Order Kirchhoff Type Elliptic Equations Involving Concave-Convex Nonlinearities in \mathbb{R}^N . *Computers & Mathematics with Applications*, **79**, 489-499. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.07.007>
- [17] Wang, R. and Liu, Z.S. (2024) Existence, Uniqueness, and Asymptotic Behaviors of Ground State Solutions of Kirchhoff-Type Equation with Fourth-Order Dispersion. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **47**, 13753-13771. <https://doi.org/10.1002/mma.10219>
- [18] Xiao, T., Gan, C.L. and Zhang, Q.F. (2020) Existence of Infinitely Many High Energy Solutions for a Fourth-Order Kirchhoff Type Elliptic Equation in \mathbb{R}^3 . *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **8**, 1550-1559. <https://doi.org/10.4236/jamp.2020.88120>
- [19] Zuo, J.B., An, T.Q., Ru, Y.F. and Zhao, D.F. (2019) Existence and Multiplicity of Solutions for Nonhomogeneous Schrödinger-Kirchhoff-Type Fourth-Order Elliptic Equations in \mathbb{R}^N . *Mediterranean Journal of Mathematics*, **16**, Article No. 123. <https://doi.org/10.1007/s00009-019-1402-2>
- [20] Zhang, H.B. and Guan, W. (2020) Least Energy Sign-Changing Solutions for Fourth-Order Kirchhoff-Type Equation with Potential Vanishing at Infinity. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **64**, 157-177. <https://doi.org/10.1007/s12190-020-01349-0>
- [21] Liu, J., Chen, S.X. and Wu, X. (2012) Existence and Multiplicity of Solutions for a Class of Fourth-Order Elliptic Equations in \mathbb{R}^N . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **395**, 608-615. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.05.063>
- [22] Silva, E.D., Carvalho, M.L.M. and Goulart, C. (2022) Periodic and Asymptotically Periodic Fourth-Order Schrödinger Equations with Critical and Subcritical Growth. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, **42**, 1039-1065. <https://doi.org/10.3934/dcds.2021146>
- [23] Wu, Z.J. and Chen, H.B. (2021) A Class of Fourth-Order Elliptic Equations with Concave and Convex Nonlinearities in \mathbb{R}^N . *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 71, 1-16. <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2021.1.71>
- [24] Wu, Z.J. and Chen, H.B. (2023) Fourth Order Elliptic Equation Involving Sign-Changing Weight Function in \mathbb{R}^N . *Journal of Dynamical and Control Systems*, **29**, 1509-1524. <https://doi.org/10.1007/s10883-023-09647-z>
- [25] Ye, Y.W. and Tang, C.L. (2013) Existence and Multiplicity of Solutions for Fourth-Order Elliptic Equations in \mathbb{R}^N . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **406**, 335-351. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.04.079>
- [26] Yin, Y.L. and Wu, X. (2011) High Energy Solutions and Nontrivial Solutions for Fourth-Order Elliptic Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **375**, 699-705. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.10.019>
- [27] Zhang, W., Tang, X. and Zhang, J. (2013) Infinitely Many Solutions for Fourth-Order Elliptic Equations with General Potentials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **407**, 359-368. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.05.044>
- [28] Ambrosetti, A., Felli, V. and Malchiodi, A. (2005) Ground States of Nonlinear Schrödinger Equations with Potentials Vanishing at Infinity. *Journal of the European Mathematical Society*, **7**, 117-144. <https://doi.org/10.4171/jems/24>
- [29] Ambrosetti, A. and Wang, Z.Q. (2005) Nonlinear Schrödinger Equations with Vanishing and Decaying Potentials. *Differential and Integral Equations*, **18**, 1321-1332. <https://doi.org/10.57262/die/1356059712>
- [30] Alves, C.O. and Souto, M.A.S. (2013) Existence of Solutions for a Class of Nonlinear Schrödinger Equations with Potential Vanishing at Infinity. *Journal of Differential Equations*, **254**, 1977-1991. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.11.013>
- [31] Liang, Z.P., Xu, J. and Zhu, X.L. (2016) Revisit to Sign-Changing Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Poisson System in \mathbb{R}^3 . *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **435**, 783-799. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.10.076>
- [32] Shi, H.X. and Chen, H.B. (2016) Positive Solutions for Generalized Quasilinear Schrödinger Equations with Potential Vanishing at Infinity. *Applied Mathematics Letters*, **61**, 137-142. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.06.004>
- [33] Sun, J.T., Chen, H.B. and Yang, L. (2011) Positive Solutions of Asymptotically Linear Schrödinger-Poisson Systems with a Radial Potential Vanishing at Infinity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **74**, 413-423. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.08.052>
- [34] Wang, Z.P. and Zhou, H.S. (2014) Sign-Changing Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Poisson System in \mathbb{R}^3 . *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **52**, 927-943. <https://doi.org/10.1007/s00526-014-0738-5>
- [35] Shuai, W. (2015) Sign-Changing Solutions for a Class of Kirchhoff-Type Problem in Bounded Domains. *Journal of Differential Equations*, **259**, 1256-1274. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.02.040>
- [36] Willem, M. (1996) *Minimax Theorems*. Birkhäuser.