

三维微极Rayleigh-Bénard对流方程在Triebel-Lizorkin空间中的正则性准则

刘 燕, 盛美婷

江西师范大学数学与统计学院, 江西 南昌

收稿日期: 2025年12月29日; 录用日期: 2026年2月3日; 发布日期: 2026年2月10日

摘 要

本文考虑三维微极Rayleigh-Bénard对流方程, 设 $(u, \omega, \theta)(t, x)$ 是方程在 $(0, T)$ 上的Leray-Hopf弱解。证

明当压力满足 $q > \frac{12}{5}$, $\int_0^T \|\pi\|_{\dot{F}^0_{q, \frac{10q}{q-5q+6}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10q}{5q-6}} d\tau < \infty$, 或者压力的梯度满足 $\frac{12}{11} < q < 4$, $\int_0^T \|\nabla \pi\|_{\dot{F}^0_{q, \frac{8q}{12-3q}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{8q}{11q-12}} d\tau < \infty$ 时,

解 (u, ω, θ) 可以延拓到 $t = T$ 。

关键词

Rayleigh-Bénard对流方程, 正则性准则, 压力, Triebel-Lizorkin空间

Regularity Criteria for the Three-Dimensional Micropolar Rayleigh-Bénard Convection Equations in Triebel-Lizorkin Spaces

Yan Liu, Meiting Sheng

School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi

Received: December 29, 2025; accepted: February 3, 2026; published: February 10, 2026

文章引用: 刘燕, 盛美婷. 三维微极 Rayleigh-Bénard 对流方程在 Triebel-Lizorkin 空间中的正则性准则[J]. 理论数学, 2026, 16(2): 173-184. DOI: 10.12677/pm.2026.162046

Abstract

This paper considers the three-dimensional micropolar Rayleigh-Bénard convection equations. We establish regularity criteria for weak solutions, based on the following conditions concerning the pressure: $q > \frac{12}{5}$, $\int_0^T \|\pi\|_{F^0, \frac{10q}{q-5q+6}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10q}{5q-6}} d\tau < \infty$, or $\frac{12}{11} < q < 4$, $\int_0^T \|\nabla \pi\|_{F^0, \frac{8q}{q-12-3q}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{8q}{11q-12}} d\tau < \infty$ then the solution can be extended beyond $t = T$.

Keywords

Rayleigh-Bénard Convection Equation, Regularity Criteria, Pressure, Triebel-Lizorkins Space

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

研究 $\mathbb{R}^3$ 上的三维微极 Rayleigh-Bénard 对流方程

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - (\nu + \kappa) \Delta u + \nabla \pi = 2\kappa \nabla \times \omega + \theta e_3, \\ \partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega - (\alpha + \beta) \nabla \nabla \cdot \omega + 4\kappa \omega - \gamma \Delta \omega = 2\kappa \nabla \times u, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta - \mu \Delta \theta = u \cdot e_3, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ (u, \omega, \theta)(x, t)|_{t=0} = (u_0, \omega_0, \theta_0)(x), \end{cases} \quad (1)$$

其中 u 是流体速度场, ω 为流体粒子旋转角速度的微旋转场, π 为标量压力, θ 为温度, ν 为牛顿运动粘度系数, κ 是微旋转粘度系数, α 和 β 为角粘度系数, μ 是热扩散系数, $e_3 = (0, 0, 1)$ 为垂直单位矢量, θe_3 项描述浮力对流体运动的作用, $u \cdot e_3$ 模拟热的无粘性流体中的 Rayleigh-Bénard 对流运动。由于 $\nu, \mu, \kappa, \alpha, \beta, \gamma$ 的具体值在本文的讨论中没有特殊作用, 为简单起见, 取 $\mu = \gamma = 1$, $\nu = \kappa = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, 则方程(1)可以化为

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \Delta u + \nabla \pi = \nabla \times \omega + \theta e_3, \\ \partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega - \nabla \nabla \cdot \omega + 2\omega - \Delta \omega = \nabla \times u, \\ \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta - \Delta \theta = u \cdot e_3, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ (u, \omega, \theta)(x, t)|_{t=0} = (u_0, \omega_0, \theta_0)(x). \end{cases} \quad (2)$$

当 $\theta = 0, \omega = 0$ 时, 方程(2)是经典的 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \Delta u + \nabla \pi = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x, t)|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \quad (3)$$

许多数学家对方程(3)中压力条件得到解的正则性准则。2001 年, Chae 和 Lee [1]证明当压力 π 满足

$$\pi \in L^r \left(0, T; L^s \left(\mathbb{R}^3 \right) \right), \quad \frac{2}{r} + \frac{3}{s} < 2, \quad s > \frac{3}{2}$$

时, u 是正则解。2002 年 Berselli 和 Galdi [2]证明当压力 π 满足

$$\nabla \pi \in L^r \left(0, T; L^s \left(\mathbb{R}^3 \right) \right), \quad \frac{2}{r} + \frac{3}{s} = 3, s \in \left[\frac{9}{7}, 3 \right]$$

时, u 也是正则解。2006 年 Zhou [3]证明当压力 π 满足

$$\nabla \pi \in L^r \left(0, T; L^s \left(\mathbb{R}^3 \right) \right), \quad \frac{2}{r} + \frac{3}{s} \leq 3, s \in [1, \infty]$$

时, 弱解 u 是正则的。2007 年 Chen 和 Zhang [4]证明若压力 π 满足

$$\int_0^T \|\pi\|_{B_{\infty, \infty}^0} dt < \infty,$$

则 u 在 $(0, T]$ 正则。2021 年 Wan 和 Chen [5]证明若压力 π 满足

$$\pi \in L^p \left(0, T; \dot{F}_{q, \frac{10q}{q-5q+6}}^0 \left(\mathbb{R}^3 \right) \right), \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} < \frac{7}{4}, \frac{12}{5} < q \leq \infty,$$

或

$$\nabla \pi \in L^p \left(0, T; \dot{F}_{q, \frac{8q}{q-12-3q}}^0 \left(\mathbb{R}^3 \right) \right), \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{11}{4}, \frac{12}{11} < q < 4,$$

则弱解 u 能光滑地延拓出 $t = T$ 。

当 $\theta = 0$ 时, 方程(2)变为微极流方程

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - (\nu + \kappa) \Delta u + \nabla \pi = 2\kappa \nabla \times \omega, \\ \partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega - (\alpha + \beta) \nabla \nabla \cdot \omega + 4\kappa \omega - \gamma \Delta \omega = 2\kappa \nabla \times u, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ (u, \omega)(x, t)|_{t=0} = (u_0, \omega_0)(x). \end{cases} \quad (4)$$

1996 年, Eringen [6]引入微极流方程来模拟微极流体, 最先提出有关微极流方程的理论。1997 年, Galdi 和 Rionero [7]得到微极流方程弱解的存在性。2005 年, Yamaguchi 在 [8]得到微极流方程强解的全局存在性。2010 年, Yuan [9]证明若速度 u 满足

$$u \in L^q \left(0, T; L^{p, \infty} \left(\mathbb{R}^3 \right) \right), \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{p} \leq 1, \quad 3 < p \leq \infty,$$

或

$$\nabla u \in L^q \left(0, T; L^{p, \infty} \left(\mathbb{R}^3 \right) \right), \quad \frac{2}{q} + \frac{3}{p} \leq 2, \quad \frac{3}{2} < p \leq \infty,$$

则微极流方程的强解 (u, ω) 可以光滑地延拓到 $(0, T]$, 从而得到微极流方程经典的 Serrin 型正则性准则。在此之后大量微极流方程的正则性准则的结论被证明。同年 Dong 和 Zhang [10]证明当速度 u 满足

$$u \in L^{\frac{2}{1+r}} \left(0, T; B_{\infty, \infty}^r \left(\mathbb{R}^3 \right) \right), \quad -1 < r < 1$$

时微极流方程的弱解 (u, ω) 在 $(0, T]$ 正则。2017 年 Gala [11] 证明若压力 π 满足

$$\int_0^T \frac{\|\pi(\cdot, t)\|_{\dot{B}_{\infty, \infty}^{-1}}^2}{1 + \ln(e + \|\pi(\cdot, t)\|_{L^2})} dt < \infty,$$

则三维微极流方程的弱解 (u, ω) 在 $(0, T]$ 上正则。

微极 Rayleigh-Bénard 对流方程描述的是一种特殊的热对流现象。当研究填充两个刚性表面之间区域的流体层时, 流体从下面加热, 通常会在 Boussinesq 方程的近似框架内描述这种热对流现象(见[12]-[15]), 这种现象被称作微极 Rayleigh-Bénard 对流问题。受文献[5]、[10]和[11]的启发, 考虑微极 Rayleigh-Bénard 对流方程在 Triebel-Lizorkin 空间上的正则性准则。下面给出本文的主要结论。

定理 1.1 设 $(u_0, \omega_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$, $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot \omega_0 = 0$, 且 $(u, \omega, \theta)(t, x)$ 是方程组(2)在 $(0, T)$ 上的 Leray-hopf 弱解。若压力 π 满足

$$\int_0^T \|\pi\|_{\dot{F}_{q, \frac{10q}{5q+6}}^0(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10q}{5q-6}} d\tau < \infty, \quad q > \frac{12}{5}, \quad (5)$$

则(2)的解 (u, ω, θ) 可以延拓到 $t = T$ 。

定理 1.2 设 $(u_0, \omega_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3)$, $\nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot \omega_0 = 0$, 且 $(u, \omega, \theta)(t, x)$ 是方程组(2)在 $(0, T)$ 上的 Leray-hopf 弱解, 若 $\nabla \pi$ 满足

$$\int_0^T \|\nabla \pi\|_{\dot{F}_{q, \frac{8q}{12-3q}}^0(\mathbb{R}^3)}^{\frac{8q}{11q-12}} d\tau < \infty, \quad \frac{12}{11} < q < 4, \quad (6)$$

则(2)的解 (u, ω, θ) 可以延拓到 $t = T$ 。

注: 定理 1.1 包含了[5]中定理 1.1 的结果, 定理 1.2 包含了[5]中定理 1.2 的结果。

2. 预备知识与重要引理

本节介绍一些常用的函数空间及一些基本性质。

定义 2.1 [16] 设 $\chi, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是非负径向函数, 满足 $\text{supp} \chi \subset B = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \frac{3}{4} \right\}$ 及 $\text{supp} \varphi \subset \mathcal{C} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3} \right\}$, 使得

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(2^{-j} \xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

和

$$\chi(\xi) + \sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j} \xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$\forall j \in \mathbb{Z}$, 定义如下齐次频投算子 $\dot{\Delta}_j$ 和 $\dot{S}_j$:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_j u &= \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi(2^{-j} \xi) \hat{u}(\xi) \right) (x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\varphi(2^{-j} \cdot) \right) \star u \\ &= 2^{jn} \left(\mathcal{F}^{-1} \varphi \right) (2^j \cdot) \star u = 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{F}^{-1} \varphi \right) (2^j y) u(x-y) dy, \\ \dot{S}_j u &= \mathcal{F}^{-1} \left(\chi(2^{-j} \xi) \hat{u}(\xi) \right) (x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\chi(2^{-j} \cdot) \right) \star u \\ &= 2^{jn} \left(\mathcal{F}^{-1} \chi \right) (2^j \cdot) \star u = 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathcal{F}^{-1} \chi \right) (2^j y) u(x-y) dy. \end{aligned}$$

定义 2.2 设 $\mathcal{S}'_h$ 表示无穷远处趋于零的缓增广义函数, $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, \infty]$ 。对 $\forall f \in \mathcal{S}'_h$, 使得

$$\left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsq} |\dot{\Delta}_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p} < \infty$$

的这样的 f 的全体构成的空间称为 Triebel-Lizorkin 空间, 记为 $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 。

引理 1.3.14 设 u , π 分别是方程(2)中的速度和压力, $1 < s < \infty$ 。则存在常数 C 使得

$$\|\pi\|_{L^s} \leq C \left(\|u\|_{L^{2s}}^2 + \|\nabla^{-1} \theta\|_{L^s} \right), \quad (7)$$

$$\|\nabla \pi\|_{L^s} \leq C \|u \cdot \nabla u\|_{L^s} + \|\theta\|_{L^s}. \quad (8)$$

引理 1.3.14 的证明 用 $\nabla \cdot$ 作用于 (1.2.2)₁ 两边, 结合 $\nabla \cdot u = 0$ 得

$$\begin{aligned} \pi &= (-\Delta)^{-1} [\nabla \cdot (u \cdot \nabla u) - \nabla \cdot (\theta e_3)], \\ \nabla \pi &= \nabla (-\Delta)^{-1} \nabla \cdot (u \cdot \nabla u) - \nabla (-\Delta)^{-1} \nabla \cdot (\theta e_3). \end{aligned}$$

所以由 Riesz 变换的 L^p 有界性得到

$$\|\pi\|_{L^s} \leq C \left(\|u\|_{L^{2s}}^2 + \|\nabla^{-1} \theta\|_{L^s} \right), \quad (9)$$

$$\|\nabla \pi\|_{L^s} \leq C \|u \cdot \nabla u\|_{L^s} + \|\theta\|_{L^s}. \quad (10)$$

即完成了引理 1.3.14 的证明。

Riesz 位势算子 $I_s f(x) = (-\Delta)^{-\frac{s}{2}} f(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-s}) \star f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-s}} dy$, 它是从 L^p 到 L^q 有界的。

引理 1.3.15 [17] 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < s < n$ 。则存在 $C = C(p, q, n, s) > 0$, 使得

$$\|I_s f\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq C(p, q, n, s) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

其中 p, q 满足 $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{s}{n}$ 。

3. Triebel-Lizorkin 空间中的正则性准则的证明

本节将给出三维微极 Rayleigh-Bénard 对流方程在 Triebel-Lizorkin 空间中的正则性准则的证明。

3.1. 定理 1.1 的证明

第一步: L^2 -能量估计

将方程(2)₁, (2)₂ 和(2)₃ 分别与 u, ω 和 θ 做 L^2 内积后将三式相加, 再利用 $\nabla \cdot u = 0$ 、Hölder 不等式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(\omega, u, \theta)\|_2^2 + \|(\nabla u, \nabla \omega, \nabla \theta)\|_2^2 + \|\nabla \cdot \omega\|_2^2 + 2\|\omega\|_2^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \omega \cdot u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times u \cdot \omega dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta e_3 \cdot u dx + \int_{\mathbb{R}^3} u e_3 \cdot \theta dx \\ &= 2 \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times u \cdot \omega dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta e_3 \cdot u dx \right) \\ &\leq 2\|\nabla u\|_2 \|\omega\|_2 + 2\|\theta\|_2 \|u\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + 2\|\omega\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

整理得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(u, \omega, \theta)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|(\nabla u, \nabla \omega, \nabla \theta)\|_2^2 + \|\nabla \cdot \omega\|_2^2 \leq \|\theta\|_2^2 + \|u\|_2^2.$$

从而有

$$\frac{d}{dt} \|(u, \omega, \theta)\|_2^2 + \|(\nabla u, \nabla \omega, \nabla \theta)\|_2^2 \leq C \|(u, \omega, \theta)\|_2^2. \quad (11)$$

对(11)式利用 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned} & \|u\|_2^2 + \|\omega\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \int_0^t \|(\nabla u, \nabla \omega, \nabla \theta)\|_2^2 d\tau \\ & \leq C \left(\|u_0\|_2^2 + \|\omega_0\|_2^2 + \|\theta_0\|_2^2 \right) \leq C. \end{aligned}$$

于是可以得出

$$u, \omega, \theta \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1). \quad (12)$$

第二步: L^4 -能量估计

方程(2)₁ 两边乘以 $|u|^2 u$ 并在 $\mathbb{R}^3$ 上积分可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u\|_4^4 + \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) u \cdot |u|^2 u dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot |u|^2 u dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \omega \cdot |u|^2 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta e_3 \cdot |u|^2 u dx. \end{aligned} \quad (13)$$

由分部积分可以得出

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot |u|^2 u dx &= \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k^2 u_i |u|^2 u_i dx = - \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k u_i \cdot \partial_k (|u|^2 u_i) dx \\ &= - \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k u_i \cdot \partial_k (|u|^2) u_i dx - \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \partial_k u_i \cdot |u|^2 \cdot \partial_k u_i dx \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k |u|^2)^2 dx - \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u_i)^2 |u|^2 dx. \end{aligned}$$

由分部积分和 $\nabla \cdot u = 0$ 得

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \pi \nabla \cdot (|u|^2 u) dx = - \int_{\mathbb{R}^3} \pi u \cdot \nabla |u|^2 dx$$

以及

$$\int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla) u \cdot |u|^2 u dx = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla |u|^4 dx = - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot u \cdot |u|^4 dx = 0.$$

因此(13)式可化简为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u\|_4^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u|^2|^2 dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^3} \pi u \cdot \nabla |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \omega \cdot |u|^2 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta e_3 \cdot |u|^2 u dx \\ & := J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (14)$$

接下来先估计 J_2 利用 Hölder 不等式和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \omega \cdot |u|^2 u \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \omega \nabla \times (|u|^2 u) \, dx \\
&\leq 3 \int_{\mathbb{R}^3} |\omega| |u|^2 |\nabla u| \, dx \\
&= 3 \int_{\mathbb{R}^3} (\omega |u|) (|u| |\nabla u|) \, dx \\
&\leq 3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\omega|^2 |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 3 \left(C \int_{\mathbb{R}^3} |\omega|^2 |u|^2 \, dx + \frac{1}{24} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 |\nabla u|^2 \, dx \right) \\
&\leq C \|\omega\|_4^2 \|u\|_4^2 + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 |\nabla u|^2 \, dx \\
&\leq \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 |\nabla u|^2 \, dx + C \|\omega\|_4^4 + C \|u\|_4^4.
\end{aligned} \tag{15}$$

下面估计 J_3 利用 Hölder 不等式和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{\mathbb{R}^3} \theta e_3 \cdot |u|^2 u \, dx \\
&\leq \|\theta\|_4 \|u\|_4^3 \\
&\leq C \|\theta\|_4^4 + C \|u\|_4^4.
\end{aligned} \tag{16}$$

最后估计 J_1 根据 Littlewood-Paley 分解, 将 π 分解为

$$\pi = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \dot{\Delta}_j \pi = \sum_{j < -N} \dot{\Delta}_j \pi + \sum_{j=-N}^N \dot{\Delta}_j \pi + \sum_{j > N} \dot{\Delta}_j \pi, \tag{17}$$

其中 N 是待定的正整数。根据(17)式可得

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \pi u \cdot \nabla |u|^2 \, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j < -N} |\dot{\Delta}_j \pi| |u| |\nabla |u|^2| \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=-N}^N |\dot{\Delta}_j \pi| |u| |\nabla |u|^2| \, dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j > N} |\dot{\Delta}_j \pi| |u| |\nabla |u|^2| \, dx \\
&:= J_{11} + J_{12} + J_{13}.
\end{aligned} \tag{18}$$

下面对 J_{11} 进行估计。利用 Hölder 不等式, Bernstein 不等式, Gagliardo-Nirenberg 不等式, 引理 1.3.14, 引理 1.3.15 和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j < -N} |\dot{\Delta}_j \pi| |u| |\nabla |u|^2| \, dx \\
&\leq C \sum_{j < -N} \|\dot{\Delta}_j \pi\|_8 \|u\|_{\frac{8}{3}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\
&\leq C \sum_{j < -N} 2^{\frac{j}{8}} \|\dot{\Delta}_j \pi\|_6 \|u\|_2^{\frac{1}{2}} \|u\|_4^{\frac{1}{2}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\
&\leq C 2^{-\frac{N}{8}} \|\pi\|_6 \|u\|_4^{\frac{1}{2}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\
&\leq C 2^{-\frac{N}{8}} \left(\|u\|_{12}^2 + \|\nabla^{-1} \theta\|_6 \right) \|u\|_4^{\frac{1}{2}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\
&\leq C 2^{-\frac{N}{8}} \|u\|_4^{\frac{1}{2}} \|\nabla |u|^2\|_2^2 + 2^{-\frac{N}{8}} \|\theta\|_2 \|u\|_4^{\frac{1}{2}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\
&\leq C 2^{-\frac{N}{8}} \|u\|_4^{\frac{1}{2}} \|\nabla |u|^2\|_2^2 + \frac{1}{16} \|\nabla |u|^2\|_2^2 + C 2^{-\frac{N}{4}} \|u\|_4,
\end{aligned} \tag{19}$$

其中利用了不等式

$$\begin{aligned}\|u\|_8 &\leq C \|u\|_2^{\frac{1}{2}} \|u\|_4^{\frac{1}{2}}, \quad \|\pi\|_6 \leq C \left(\|u\|_{12}^2 + \|\nabla^{-1}\theta\|_6 \right), \\ \|\nabla^{-1}\theta\|_6 &\leq C \|\theta\|_2.\end{aligned}$$

对于 J_{12} 利用 Hölder 不等式, Gagliardo-Nirenberg 不等式, Sobolev 嵌入, (12)式以及 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}J_{12} &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=-N}^N |\dot{\Delta}_j \pi| |u| |\nabla |u|^2| \, dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^3} N^{\frac{5q-6}{10q}} \left(\sum_{j=-N}^N |\dot{\Delta}_j \pi|^{\frac{10q}{5q+6}} \right)^{\frac{5q+6}{10q}} |u| |\nabla |u|^2| \, dx \\ &\leq C N^{\frac{5q-6}{10q}} \|\pi\|_{\dot{F}^0_{q, \frac{10q}{5q+6}}(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{\frac{2q}{q-2}}^{\frac{12}{5q}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\ &\leq C N^{\frac{5q-6}{10q}} \|\pi\|_{\dot{F}^0_{q, \frac{10q}{5q+6}}(\mathbb{R}^3)} \|u\|_2^{1-\frac{12}{5q}} \|u\|_{12}^{\frac{12}{5q}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\ &\leq C N^{\frac{5q-6}{10q}} \|\pi\|_{\dot{F}^0_{q, \frac{10q}{5q+6}}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla |u|^2\|_2^{1+\frac{6}{5q}} \\ &\leq C N \|\pi\|_{\dot{F}^0_{q, \frac{10q}{5q+6}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10q}{5q-6}} + \frac{1}{16} \|\nabla |u|^2\|_2^2,\end{aligned}\tag{20}$$

其中利用了不等式

$$\|u\|_{\frac{2q}{q-2}} \leq C \|u\|_2^{1-\frac{12}{5q}} \|u\|_{12}^{\frac{12}{5q}}, \quad q > \frac{12}{5}.$$

对于 J_{13} 利用 Hölder 不等式, Bernstein 不等式, Gagliardo-Nirenberg 不等式, 引理 1.3.14 和 Young 不等式得

$$\begin{aligned}J_{13} &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j>N} |\dot{\Delta}_j \pi| |u| |\nabla |u|^2| \, dx \\ &\leq \sum_{j>N} \|\dot{\Delta}_j \pi\|_5 \|u\|_{\frac{10}{3}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\ &\leq \sum_{j>N} 2^{-j} \|\dot{\Delta}_j \nabla \pi\|_5 \|u\|_2^{\frac{1}{5}} \|u\|_4^{\frac{4}{5}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\ &\leq C \sum_{j>N} 2^{-\frac{j}{10}} \|\dot{\Delta}_j \nabla \pi\|_2 \|u\|_4^{\frac{4}{5}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\ &\leq C 2^{-\frac{N}{10}} \|\nabla \pi\|_2 \|u\|_4^{\frac{4}{5}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\ &\leq C 2^{-\frac{N}{10}} \left(\|u \cdot \nabla u\|_2 + \|\theta\|_2 \right) \|u\|_4^{\frac{4}{5}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\ &\leq C 2^{-\frac{N}{10}} \|u\|_4^{\frac{4}{5}} \|u\|_2 \|\nabla u\|_2^2 + C 2^{-\frac{N}{10}} \|\theta\|_2 \|u\|_4^{\frac{4}{5}} \|\nabla |u|^2\|_2 \\ &\leq C 2^{-\frac{N}{10}} \|u\|_4^{\frac{4}{5}} \|u\|_2 \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{16} \|\nabla |u|^2\|_2^2 + C 2^{-\frac{N}{5}} \|u\|_4^{\frac{8}{5}},\end{aligned}\tag{21}$$

其中利用了不等式

$$\|u\|_{\frac{10}{3}} \leq C \|u\|_2^{\frac{1}{5}} \|u\|_4^{\frac{4}{5}}.$$

类似地, 将(2)₂式两边乘以 $|\omega|^2 \omega$ 后在 $\mathbb{R}^3$ 上积分, 利用分部积分和 $\nabla \cdot u = 0$ 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\omega\|_4^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \omega|^2 |\omega|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\omega|^2|^2 dx + 2 \|\omega\|_4^4 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \nabla \cdot \omega |\omega|^2 \omega dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times u \cdot |\omega|^2 \omega dx. \end{aligned} \quad (22)$$

通过分布积分再利用 Hölder 不等式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\omega\|_4^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \omega|^2 |\omega|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\omega|^2|^2 dx + 2 \|\omega\|_4^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \cdot \omega|^2 |\omega|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times u \cdot |\omega|^2 \omega dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \omega \omega \cdot \nabla |\omega|^2 dx \\ &\leq \frac{3}{4} \|\omega\|_2 \|\nabla \omega\|_2^2 + C \|u\|_4^2 \|\omega\|_4^2 + \frac{1}{8} \|\nabla |\omega|^2\|_2^2 + \|\nabla \cdot \omega\|_2^2 + \frac{1}{4} \|\nabla |\omega|^2\|_2^2 \\ &\leq \frac{3}{4} \|\omega\|_2 \|\nabla \omega\|_2^2 + C \|u\|_4^4 + 2 \|\omega\|_4^4 + \frac{1}{8} \|\nabla |\omega|^2\|_2^2 + \|\nabla \cdot \omega\|_2^2 + \frac{1}{4} \|\nabla |\omega|^2\|_2^2. \end{aligned}$$

即可得到

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\omega\|_4^4 + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \omega|^2 |\omega|^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\omega|^2|^2 dx \leq C \|u\|_4^4 \quad (23)$$

同样地对(2)₃式两边乘以 $|\theta|^2 \theta$ 后在 $\mathbb{R}^3$ 上积分, 利用分部积分, Hölder 不等式, Young 不等式和 $\nabla \cdot u = 0$ 得出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\theta\|_4^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \theta|^2 |\theta|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\theta|^2|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot e_3 |\theta|^2 \theta dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |u| \cdot |\theta|^3 dx \\ &\leq \|u\|_4 \|\theta\|_4^3 \\ &\leq C (\|u\|_4^4 + \|\theta\|_4^4). \end{aligned} \quad (24)$$

综合(19)式, (20)式, (21)式, (23)式和(24)式可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|(u, \omega, \theta)\|_4^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 |u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \omega|^2 |\omega|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \theta|^2 |\theta|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u|^2|^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\omega|^2|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\theta|^2|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 |\nabla u|^2 dx + C (\|\omega\|_4^4 + \|u\|_4^4 + \|\theta\|_4^4) + C 2^{-\frac{N}{8}} \|u\|_4^{\frac{1}{2}} \|\nabla |u|^2\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{16} \|\nabla |u|^2\|_2^2 + C 2^{-\frac{N}{4}} \|u\|_4 + CN \|\pi\|_{F_{\frac{10q}{5q+6}}^0}^{\frac{10q}{5q-6}} + \frac{1}{16} \|\nabla |u|^2\|_2^2 \\ &+ C 2^{-\frac{N}{10}} \|u\|_4^{\frac{4}{5}} \|u\| \cdot \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{16} \|\nabla |u|^2\|_2^2 + C 2^{-\frac{N}{5}} \|u\|_4^{\frac{8}{5}}. \end{aligned} \quad (25)$$

选取(25)式中的 N 使得

$$C \left(2^{-\frac{N}{8}} \|u\|_4 \right)^{\frac{4}{5}} \leq \frac{1}{16},$$

具体地说

$$N \geq 8 \left(\frac{\log(C \|u\|_4)}{\log 2} + 4 \right)$$

另一方面易得

$$C \left(2^{-\frac{N}{5}} \|u\|_4 \right)^{\frac{4}{5}} \leq C \left(2^{-\frac{N}{8}} \|u\|_4 \right)^{\frac{4}{5}} \leq \frac{1}{16}.$$

则有

$$C 2^{-\frac{N}{8}} \|u\|_4^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4}.$$

同时还得到

$$C 2^{-\frac{N}{4}} \|u\|_4 \leq C, \quad C 2^{-\frac{N}{5}} \|u\|_4^{\frac{8}{5}} \leq C.$$

因此(25)式变成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|(u, \omega, \theta)\|_4^4 + \frac{7}{8} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 |u|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \omega|^2 |\omega|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \theta|^2 |\theta|^2 dx \\ & + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u|^2|^2 dx + \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\omega|^2|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |\theta|^2|^2 dx \\ & \leq C \left(\|\omega\|_4^4 + \|u\|_4^4 + \|\theta\|_4^4 \right) + C \|\pi\|_{\dot{F}^0, \frac{10q}{q-5q+6}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10q}{5q-6}} \log(\|u\|_4 + e) + C, \end{aligned}$$

于是我们有

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|(u, \omega, \theta)\|_4^4 \leq C \|(u, \omega, \theta)\|_4^4 + C \|\pi\|_{\dot{F}^0, \frac{10q}{q-5q+6}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10q}{5q-6}} \log(\|(u, \omega, \theta)\|_4 + e). \quad (26)$$

因此对(26)式利用 Gronwall 不等式可得

$$\begin{aligned} \|(u, \omega, \theta)\|_4^4 & \leq C \|(u_0, \omega_0, \theta_0)\|_4^4 + \int_0^T \|\pi\|_{\dot{F}^0, \frac{10q}{q-5q+6}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10q}{5q-6}} \log(\|(u, \omega, \theta)\|_4 + e) d\tau \\ & \leq C \|(u_0, \omega_0, \theta_0)\|_4^4 + \int_0^T \|\pi\|_{\dot{F}^0, \frac{10q}{q-5q+6}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10q}{5q-6}} \left(\|(u, \omega, \theta)\|_4^4 + e \right) d\tau. \end{aligned}$$

令 $M = \|(u_0, \omega_0, \theta_0)\|_4^4 + e$, 再次利用 Gronwall 不等式可得

$$\|(u, \omega, \theta)\|_4^4 + e \leq CM \exp \int_0^T \|\pi\|_{\dot{F}^0, \frac{10q}{q-5q+6}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{10q}{5q-6}} d\tau.$$

即完成定理 1.1 的证明。

3.2. 定理 1.2 的证明

类似定理 1.1, 考虑如下 L^4 能量估计

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u\|_4^4 + \int_{\mathbb{R}^3} u \cdot \nabla u \cdot |u|^2 u dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u \cdot |u|^2 u dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \omega \cdot |u|^2 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta e_3 \cdot |u|^2 u dx \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k |u|^2)^2 dx - \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_k u_i)^2 |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \omega \cdot |u|^2 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta e_3 \cdot |u|^2 u dx.
 \end{aligned} \tag{27}$$

由(27)式即可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|u\|_4^4 + \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u|^2|^2 dx \\
 &\leq -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \pi \cdot |u|^2 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times \omega \cdot |u|^2 u dx + \int_{\mathbb{R}^3} \theta e_3 \cdot |u|^2 u dx \\
 &:= K_1 + K_2 + K_3.
 \end{aligned}$$

综合文献[5]和定理 1.1 的证明过程即可证得定理 1.2。

基金项目

江西省自然科学基金(20232BAB201014)。

参考文献

- [1] Chae, D. and Lee, J. (2001) Regularity Criterion in Terms of Pressure for the Navier-Stokes Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **46**, 727-735. [https://doi.org/10.1016/s0362-546x\(00\)00163-2](https://doi.org/10.1016/s0362-546x(00)00163-2)
- [2] Berselli, L.C. and Galdi, G.P. (2002) Regularity Criteria Involving the Pressure for the Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **130**, 3585-3595. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-02-06697-2>
- [3] Zhou, Y. (2005) On Regularity Criteria in Terms of Pressure for the Navier-Stokes Equations in $\mathbb{R}^3$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **134**, 149-156. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-05-08312-7>
- [4] Qionglei, C. and Zhifei, Z. (2006) Regularity Criterion via the Pressure on Weak Solutions to the 3D Navier-Stokes Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**, 1829-1837. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-06-08663-1>
- [5] Wan, Y. and Chen, X. (2022) Regularity Criterion for 3D Incompressible Navier-Stokes Equations via the Pressure in Triebel-Lizorkin Spaces. *Acta Mathematica Scientia*, **42**, 1437-1481.
- [6] Eringen, A. (1966) Theory of Micropolar Fluids. *Indiana University Mathematics Journal*, **16**, 1-18. <https://doi.org/10.1512/iumj.1967.16.16001>
- [7] Galdi, G.P. and Rionero, S. (1977) A Note on the Existence and Uniqueness of Solutions of the Micropolar Fluid Equations. *International Journal of Engineering Science*, **15**, 105-108. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(77\)90025-8](https://doi.org/10.1016/0020-7225(77)90025-8)
- [8] Yamaguchi, N. (2005) Existence of Global Strong Solution to the Micropolar Fluid System in a Bounded Domain. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **28**, 1507-1526. <https://doi.org/10.1002/mma.617>
- [9] Yuan, B. (2010) On Regularity Criteria for Weak Solutions to the Micropolar Fluid Equations in Lorentz Space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **138**, 2025-2036. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-10-10232-9>
- [10] Dong, B. and Zhang, W. (2010) On the Regularity Criterion for Three-Dimensional Micropolar Fluid Flows in Besov Spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **73**, 2334-2341. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.06.029>
- [11] Gala, S. (2011) A Remark on the Logarithmically Improved Regularity Criterion for the Micropolar Fluid Equations in Terms of the Pressure. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **34**, 1945-1953. <https://doi.org/10.1002/mma.1488>
- [12] Frazier, M., Jawerth, B. and Weiss, G. (1991) Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/cbms/079>

-
- [13] Kalita, P., Langa, J.A. and Łukaszewicz, G. (2019) Micropolar Meets Newtonian. the Rayleigh-Bénard Problem. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **392**, 57-80. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2018.12.004>
 - [14] Tarasińska, A. (2006) Global Attractor for Heat Convection Problem in a Micropolar Fluid. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **29**, 1215-1236. <https://doi.org/10.1002/mma.720>
 - [15] Xu, F. and Chi, M. (2020) Global Regularity for the 2D Micropolar Rayleigh-Bénard Convection System with the Zero Diffusivity. *Applied Mathematics Letters*, **108**, Article ID: 106508. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106508>
 - [16] Bahouri, H., Chemin, J. and Danchin, R. (2011) Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. In: Chenciner, A. and Varadhan, S.R.S., Eds., *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer, 59-62.
 - [17] Grafakos, L. (2014) Modern Fourier Analysis. Springer, 1-6.