

基于Bernoulli泛函的离散时间量子游荡模型

杨 扬

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年12月30日; 录用日期: 2026年2月7日; 发布日期: 2026年2月27日

摘 要

本文基于Bernoulli泛函的数学框架, 构建了一类新的离散时间量子游荡(DTQW)模型。该研究将量子概率中的Bernoulli泛函方法应用于离散时间量子游荡的构建中, 提供了一种从代数角度生成图和游荡算子的途径。

关键词

离散时间量子游荡, Bernoulli泛函, 概率分布

A Model of Discrete-Time Quantum Walk in Terms of Bernoulli Functionals

Yang Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: December 30, 2025; accepted: February 7, 2026; published: February 27, 2026

Abstract

Based on the mathematical framework of Bernoulli functionals, this paper constructs a new class of discrete-time quantum walk (DTQW) models. The study applies the Bernoulli functional method from quantum probability to the construction of discrete-time quantum walks, providing an algebraic approach to generating graphs and walk operators.

Keywords

Discrete-Time Quantum Walk, Bernoulli Functional, Probability Distribution

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

量子游荡[1]是概率论中经典随机游荡的量子类似物,如今已在量子计算、量子通信以及物理过程建模等领域获得广泛应用(见文献[2]-[5]及其参考文献)。与经典量子游荡类似,量子游荡可分为离散时间量子游荡和连续时间量子游荡。本文仅研究离散时间量子游荡,离散时间量子游荡通过位移算子和硬币算子来描述游荡者的离散时间演化过程。

从数学物理的角度看,离散时间量子游荡通常涉及两个复 Hilbert 空间:一个是位置空间,描述游荡者的位置信息;另一个是硬币空间,反映游荡者的内部自由度。它们的张量则构成了由游荡者组成的量子系统的系统空间。

Bernoulli 泛函[6]是定义在 Bernoulli 空间上的复值随机变量,也可视为 Bernoulli 过程的泛函。因其具有丰富的代数结构与拓扑结构, Bernoulli 泛函已在量子 Markov 半群的构造、随机 Schrodinger 方程以及某些图上均匀测度的生成等问题中获得重要应用(见文献[7]-[9]及其参考文献)。

在本文中,我们假设 \mathcal{H} 为无限维平方可积复值 Bernoulli 泛函空间。固定一个非负整数 L , 令 Γ_L 为 $\{0, 1, \dots, L\}$ 的幂集,王[9]利用 Bernoulli 泛函空间上的湮灭和增生算子引入了 \mathcal{H}_L 上的位移算子 $\Xi_k = \partial_k^* + \partial_k$, 从而构造了超立方体上的离散时间量子游荡模型。我们使用同样的方法,引入了一类特殊的图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_\gamma)$, 该图与超立方体图具有相同的顶点集,但具有不同的边集。在此基础上,我们以 $S_k = \Xi_k \Xi_{k+1}$ 作为位移算子,构造了一类新的离散时间量子游荡模型,并研究了该模型的概率分布性质,最后,在其谱的一个子集上建立了概率分布的显式表达式。

此外从物理的角度看,我们引入的位移算子 S_k 可视为量子自旋系统中一维量子自旋链上具有最近邻相互作用的算子。若以位移算子 S_k 构造 Hamilton 算子 $H_L = \sum_{k=0}^{L-1} \Xi_k \Xi_{k+1}$, 则 H_L 对应于一类特殊的 XY 模型,可以描述沿 x 轴方向的最近邻相互作用,继而我们可以在 Bernoulli 泛函的框架下研究 XY 模型的性质,为研究经典物理模型提供了新的方法。

2. 预备知识

Bernoulli 泛函

本节简要回顾关于 Bernoulli 泛函的一些基本概念与符号。详细内容见文献[6]-[8]及其参考文献。

本文中,记 \mathbb{R} 为实数集, \mathbb{N} 为非负整数集, Γ 为 \mathbb{N} 的有限幂集,即

$$\Gamma = \{\sigma \mid \sigma \subset \mathbb{N}, \#(\sigma) < \infty\}, \quad (2.1)$$

其中 $\#(\sigma)$ 表示集合 σ 的基数。

设 Ω 为所有函数 $\omega: \mathbb{N} \mapsto \{-1, 1\}$ 构成的集合, $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ 为 Ω 上的典则投影序列,即

$$\zeta_n(\omega) = \omega(n), \quad \omega \in \Omega. \quad (2.2)$$

设 \mathcal{F} 表示由序列 $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ 生成的 Ω 上的 σ -域, $(p_n)_{n \geq 0}$ 是给定的正数序列,其中 $0 < p_n < 1$, $n \geq 0$, 则在可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 上存在唯一的概率测度 \mathbb{P} , 使得对任意 $n_j \in \mathbb{N}$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ ($1 \leq j \leq k$), 当 $n_i \neq n_j$ ($i \neq j$), $k \geq 1$ 时, 满足

$$\mathbb{P} \circ (\zeta_{n_1}, \zeta_{n_2}, \dots, \zeta_{n_k})^{-1} \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k)\} = \prod_{j=1}^k p_{n_j}^{\frac{1+\epsilon_j}{2}} (1-p_{n_j})^{\frac{1-\epsilon_j}{2}}. \quad (2.3)$$

由此得到一个概率测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ，称为 Bernoulli 空间，该空间上的复值随机变量称为 Bernoulli 泛函。

设 $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ 是由序列 $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ 生成的 Bernoulli 泛函，即

$$Z_n = \frac{\zeta_n + q_n - p_n}{2\sqrt{p_n q_n}}, \quad n \geq 0, \quad (2.4)$$

其中 $q_n = 1 - p_n$ 。显然， $Z = (Z_n)_{n \geq 0}$ 是概率测度空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的独立随机变量序列。

设 \mathcal{H} 为平方可积复值 Bernoulli 泛函构成的 Hilbert 空间，即

$$\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \quad (2.5)$$

其内积与范数分别记作 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 。由文献[10]知， Z 具有混沌表示性质，这表明 $\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ 构成 \mathcal{H} 的一组标准正交基，其中 $Z_\emptyset = 1$ ，

$$Z_\sigma = \prod_{j \in \sigma} Z_j, \quad \sigma \in \Gamma, \sigma \neq \emptyset. \quad (2.6)$$

显然 \mathcal{H} 作为复 Hilbert 空间是无限维的，并对每个 $n \geq 0$ ， $Z_n = Z_{\{n\}}$ 是 \mathcal{H} 的典则标准正交基的一个基向量。

对于非负整数 L ，记 $\mathbb{N}_L = \{0, 1, 2, \dots, L\}$ 并定义 Γ_L 为其幂集。显然 $\Gamma_L \subset \Gamma$ 且 $\#(\Gamma_L) = 2^{L+1}$ 。令

$$\mathcal{H}_L = \text{Span}\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_L\}, \quad (2.7)$$

即 \mathcal{H}_L 是由标准正交系 $\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ 张成的 \mathcal{H} 的线性子空间。于是，通过 \mathcal{H} 中的线性运算及内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ ， \mathcal{H}_L 构成一个 2^{L+1} 维 Hilbert 空间，且 $\{Z_\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$ 是 \mathcal{H}_L 的一组标准正交基。

根据文献[11]与[12]可知，对每个 $k \in \mathbb{N}_L$ ，存在 \mathcal{H}_L 上的算子 ∂_k 使得

$$\partial_k Z_\sigma = \mathbf{1}_\sigma(k) Z_{\sigma \setminus k}, \quad \partial_k^* Z_\sigma = [1 - \mathbf{1}_\sigma(k)] Z_{\sigma \cup k}, \quad \sigma \in \Gamma_L, \quad (2.8)$$

其中 ∂_k^* 表示 ∂_k 的共轭算子， $\mathbf{1}_\sigma(k)$ 为 σ 的示性函数。

算子 ∂_k 与 ∂_k^* 分别称为 k 处的湮灭算子和增生算子，且满足如下形式的典则反交换关系(CAR):

$$\partial_j \partial_k = \partial_k \partial_j, \quad \partial_j^* \partial_k^* = \partial_k^* \partial_j^*, \quad \partial_j^* \partial_k = \partial_k \partial_j^*, \quad (j, k \in \mathbb{N}_L, j \neq k), \quad (2.9)$$

且

$$\partial_k \partial_k = \partial_k^* \partial_k^* = 0, \quad \partial_k \partial_k^* + \partial_k^* \partial_k = I_{\mathcal{H}_L}, \quad (k \in \mathbb{N}_L), \quad (2.10)$$

其中 $I_{\mathcal{H}_L}$ 表示 \mathcal{H}_L 上的单位算子。

引理 2.1. 设 $k \in \mathbb{N}_L$ ，存在 \mathcal{H}_L 上的酉对合算子 $\Xi_k = \partial_k^* + \partial_k$ ，使得

$$\Xi_k Z_\sigma = Z_{\sigma \Delta k}, \quad \sigma \in \Gamma_L, \quad (2.11)$$

其中 $\sigma \Delta k = \sigma \Delta \{k\}$ 。

$\{\Xi_k \mid k \in \mathbb{N}_L\}$ 中任意两个算子都是可交换的，即下列交换关系成立:

$$\Xi_j \Xi_k = \Xi_k \Xi_j, \quad j, k \in \mathbb{N}_L. \quad (2.12)$$

3. 离散时间量子游荡模型

在本节中，我们将介绍一种基于 Bernoulli 的离散时间量子游荡模型。在下文中，我们假设 $L \geq 0$ 是

一个给定的非负整数，并继续使用第 2 节中的假设与符号。

3.1. 位移算子

根据算子族 $\{\Xi_k \mid k \in \mathbb{N}_L\}$ ，我们在 \mathcal{H}_L 上引入一个算子 S_k ：

$$S_k = \Xi_k \Xi_{k+1}. \tag{3.1}$$

显然， S_k 是 \mathcal{H}_L 上的自伴酉算子。

回顾一下， Γ_L 是 $\mathbb{N}_L = \{0, 1, \dots, L\}$ 的幂集，我们在 Γ_L 中引入如下所述的邻接关系。

若存在 $k \in \mathbb{N}_{L-1}$ ，使得 $\sigma_{\Delta\tau} = \{k, k+1\}$ ，则称两个元素 $\sigma, \tau \in \Gamma_L$ 是相邻的，记作 $\sigma \sim \tau$ 。通过上述邻接关系， Γ_L 形成一个图，其边集具有如下形式

$$\mathcal{E}_Y = \{\{\sigma, \sigma_{\Delta k}(k+1)\} \mid \sigma \in \Gamma_L, k \in \mathbb{N}_{L-1}\}.$$

图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_Y)$ 通常不连通。

注记 3.1. $(L+1)$ -维超立方体[9]与图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_Y)$ 具有相同的顶点集，但其边集由下式给出：

$$\mathcal{E}_W = \{\{\sigma, \sigma_{\Delta k}\} \mid \sigma \in \Gamma_L, k \in \mathbb{N}_L\},$$

这与 \mathcal{E}_Y 存在本质差异。因此，本文所研究的图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_Y)$ 与 $(L+1)$ -维超立方体 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_W)$ 具有显著不同的图谱结构。下图 1 进一步展示了当 $L=1$ 时， $(L+1)$ -维超立方体 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_W)$ 与图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_Y)$ 的结构差异。

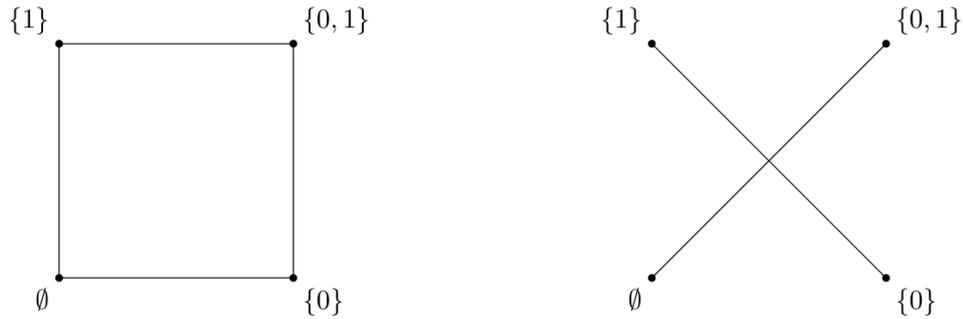


Figure 1. When $L=1$, the graphs of $(\Gamma_L, \mathcal{E}_W)$ and $(\Gamma_L, \mathcal{E}_Y)$

图 1. $L=1$ 时， $(\Gamma_L, \mathcal{E}_W)$ 与 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_Y)$ 的图像

根据上述图论解释，我们可以得到以下定理。

定理 3.1. 两个顶点 $\sigma, \tau \in \Gamma_L$ 相邻，当且仅当存在唯一的 $k \in \mathbb{N}_{L-1}$ ，使得

$$S_k Z_\sigma = Z_{\sigma_{\Delta k}(k+1)} = Z_\tau. \tag{3.2}$$

证明. 设 $\sigma \sim \tau$ ，则存在唯一的 $k \in \mathbb{N}_{L-1}$ ，使得 $\sigma_{\Delta\tau} = \{k, k+1\}$ ，即 $\tau = \sigma_{\Delta k}(k+1)$ 。根据 S_k 的定义，可得

$$S_k Z_\sigma = (\partial_k^* + \partial_k) Z_{\sigma_{\Delta}(k+1)} = Z_{\sigma_{\Delta k}(k+1)}, \tag{3.3}$$

结合 $\tau = \sigma_{\Delta k}(k+1)$ ，得到式(3.2)。

假设存在唯一的 $k \in \mathbb{N}_{L-1}$ 使得式(3.2)成立，通过式(3.3)，可得

$$Z_\tau = Z_{\sigma_{\Delta k}(k+1)},$$

表明 $\tau = \sigma_{\Delta k}(k+1)$ ，即 $\sigma \sim \tau$ 。

注记 3.2. 根据文献[9], Ξ_k 作为自伴酉算子, 可以解释为 $(L+1)$ -维超立方体 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_W)$ 上的位移算子。本文定义了 $S_k = \Xi_k \Xi_{k+1}$, 因此, 结合图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_V)$ 及定理 3.1, 我们可以将 S_k 解释为图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_V)$ 上的位移算子。

3.2. 离散时间量子游荡模型

我们固定一个非负整数 d , $d \geq L$ 。将 \mathbb{C}^d 作为我们的离散时间量子游荡模型的硬币空间, 分别用 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^d}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^d}$ 表示 \mathbb{C}^d 中的内积和范数, 并用 $\{e_j | 0 \leq j \leq d-1\}$ 表示 \mathbb{C}^d 的标准正交基。

定义 3.1. 令 \mathbb{C}^d 上的算子系 $\mathfrak{R} = \{C_k | k \in \mathbb{N}_{L-1}\}$ 为硬币算子系, 则它满足以下条件:

- (1) 和算子 $U = \sum_{k=0}^{L-1} C_k$ 是一个作用于 \mathbb{C}^d 上的酉算子;
- (2) $C_j^* C_k = C_j C_k^* = 0$, $j, k \in \mathbb{N}_{L-1}$, $j \neq k$, 其中 C_j^* 是 C_j 的伴随算子。

对于 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$, 使用示性函数 $\mathbf{1}_\sigma(\cdot)$ 定义 \mathbb{N}_{L-1} 上的函数 $\mathcal{E}_\sigma(\cdot)$:

$$\mathcal{E}_\sigma(k) = 2 \times \mathbf{1}_\sigma(k) - 1, \quad k \in \mathbb{N}_{L-1}. \tag{3.4}$$

显然, 函数 $\mathcal{E}_\sigma(\cdot)$ 的取值为 $\{-1, 1\}$ 。因此, 对于所有的 $k \in \mathbb{N}_{L-1}$, 有 $(\mathcal{E}_\sigma(k))^2 = 1$ 。

下述引理最初在文献[9]中被证明(具体内容见文献[9]的命题 3.5 及其证明)。

引理 3.1. 假设 $\mathfrak{R} = \{C_k | k \in \mathbb{N}_{L-1}\}$ 是 \mathbb{C}^d 上的一个硬币算子系。那么, 对于每个 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$, 由 \mathfrak{R} 给出的 \mathcal{E}_σ -加权和 $U^{(\mathfrak{R})}$ 表示为

$$U^{(\mathfrak{R})} = \sum_{k=0}^{L-1} \mathcal{E}_\sigma(k) C_k, \tag{3.5}$$

这是一个作用在 \mathbb{C}^d 上的酉算子。

\mathcal{H}_L 可以作为图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_V)$ 上量子游荡的位置空间。在这种情况下, 张量积空间 $\mathcal{H}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 充当我们的离散时间量子游荡的状态空间。我们使用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 $\mathcal{H}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 中的内积和范数。

定理 3.2. 给定 \mathbb{C}^d 上的硬币算子系 $\mathfrak{R} = \{C_k | k \in \mathbb{N}_{L-1}\}$, 则算子

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{R}} = \sum_{k=0}^{L-1} S_k \otimes C_k \tag{3.6}$$

是 $\mathcal{H}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 上的酉算子。

证明. 对于每个 $k \in \mathbb{N}_{L-1}$, 根据引理 2.1 可得, $(S_k)^* = S_k$ 和 $(S_k)^2 = I_{\mathcal{H}_L}$ 。因此, 根据硬币算子系 \mathfrak{R} 的性质得

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_{\mathfrak{R}})^* \mathcal{W}_{\mathfrak{R}} &= \left(\sum_{k=0}^{L-1} S_k \otimes C_k^* \right) \left(\sum_{k=0}^{L-1} S_k \otimes C_k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} (S_k)^2 \otimes C_k^* C_k \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} I_{\mathcal{H}_L} \otimes C_k^* C_k \\ &= I_{\mathcal{H}_L} \otimes I_{\mathbb{C}^d} \\ &= I, \end{aligned}$$

其中 $I_{\mathbb{C}^d}$ 表示 \mathbb{C}^d 上的单位算子, I 表示 $\mathcal{H}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 上的单位算子。同样地, 我们可以验证 $\mathcal{W}_{\mathfrak{R}} (\mathcal{W}_{\mathfrak{R}})^* = I$ 。

现给出图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_V)$ 上的离散时间量子游荡模型的精确描述。在本文的其余部分, 除非另有说明, 我们固定 \mathbb{C}^d 上的一个硬币算子系 $\mathfrak{R} = \{C_k | 0 \leq k \leq L-1\}$ 。我们通过式(3.6)定义了由硬币算子系 \mathfrak{R} 生成的

$\mathcal{H}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 上的酉算子。

定义 3.2. 在图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_V)$ 上以 \mathcal{W}_R 为演化算子的离散时间量子游荡为

$$\Phi_{t+1} = \mathcal{W}_R \Phi_t, \quad t \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

其中, Φ_t 表示在 t 时刻游荡的状态。

为简洁起见, 我们称该定义中的图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_V)$ 上离散时间量子游荡为游荡 \mathcal{W}_R 或简称为游荡。

因此, 对于游荡 \mathcal{W}_R , 其状态空间是 $\mathcal{H}_L \otimes \mathbb{C}^d$, 其状态由 $\mathcal{H}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 中的单位向量描述。当 $t \in \mathbb{N}$ 时, 在顶点 $\sigma \in \Gamma_L$ 找到游荡者的概率为

$$P_t(\sigma | \Phi_0) = \sum_{j=0}^{d-1} \left| \langle Z_\sigma \otimes e_j, \Phi_t \rangle \right|^2, \tag{3.8}$$

其中, Φ_0 表示游荡的初始状态, Φ_t 表示 t 时刻的状态。按照惯例, 我们称函数 $P_t(\cdot | \Phi_0)$ 为 $t \in \mathbb{N}$ 时刻游荡 \mathcal{W}_R 的概率分布。

4. 概率分布

本节我们将考虑游荡 \mathcal{W}_R 的概率分布及其相关性质。继续使用前几节中建立的符号和假设。

为方便起见, 我们设 $\Xi_\emptyset = I_{\mathcal{H}_L}$, 对于 $\sigma \in \Gamma_L$ 且 $\sigma \neq \emptyset$, 定义 Ξ_σ 为 $\Xi_\sigma = \prod_{k \in \sigma} \Xi_k$ 。此外, 对于 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$,

定义 $\sigma+1 = \{k+1 | k \in \sigma\}$ 。可以证明映射 $\sigma \mapsto \sigma_\Delta(\sigma+1)$ 是从 Γ_{L-1} 到 Γ_L 的单射, 这意味着标准正交系 $\{Z_{\sigma_\Delta(\sigma+1)} | \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 在 \mathcal{H}_L 中是正交归一化的。

我们首先做一些准备工作。考虑在式(3.1)中引入的酉算子系 $\{S_k | k \in \mathbb{N}_{L-1}\}$, 我们在 \mathcal{H}_L 上定义一个新的算子系:

$$\hat{S}_\sigma = \prod_{k=0}^{L-1} (I_{\mathcal{H}_L} + \mathcal{E}_\sigma(k) S_k), \quad \sigma \in \Gamma_{L-1}, \tag{4.1}$$

每个 \hat{S}_σ 都是 \mathcal{H}_L 上的自伴算子。

命题 4.1. 对于每个 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$ 和任意的 $k \in \mathbb{N}_{L-1}$, 有

$$S_k \hat{S}_\sigma = \mathcal{E}_\sigma(k) \hat{S}_\sigma. \tag{4.2}$$

证明. 假设给定 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$ 和 $k \in \mathbb{N}_{L-1}$ 。由于 S_k 是一个自伴酉算子, 有

$$S_k (I_{\mathcal{H}_L} + \mathcal{E}_\sigma(k) S_k) = S_k + \mathcal{E}_\sigma(k) I_{\mathcal{H}_L} = \mathcal{E}_\sigma(k) (I_{\mathcal{H}_L} + \mathcal{E}_\sigma(k) S_k).$$

算子系中的任意两个算子 $\{I_{\mathcal{H}_L} + \mathcal{E}_\sigma(k) S_k | k \in \mathbb{N}_{L-1}\}$ 都是可交换的。因此

$$\begin{aligned} S_k \hat{S}_\sigma &= S_k (I_{\mathcal{H}_L} + \mathcal{E}_\sigma(k) S_k) \prod_{j \neq k} (I_{\mathcal{H}_L} + \mathcal{E}_\sigma(j) S_j) \\ &= \mathcal{E}_\sigma(k) (I_{\mathcal{H}_L} + \mathcal{E}_\sigma(k) S_k) \prod_{j \neq k} (I_{\mathcal{H}_L} + \mathcal{E}_\sigma(j) S_j) \\ &= \mathcal{E}_\sigma(k) \prod_j (I_{\mathcal{H}_L} + \mathcal{E}_\sigma(j) S_j) \\ &= \mathcal{E}_\sigma(k) \hat{S}_\sigma, \end{aligned}$$

其中 \prod 为 $\prod_{j \neq k}^{L-1}$, 并且 \prod 为 $\prod_{j=0}^{L-1}$ 。

定理 4.2. 在 \mathcal{H}_L 中存在一个标准正交系 $\{\zeta_\sigma | \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$, 使得

$$S_k \zeta_\sigma = \mathcal{E}_\sigma(k) \zeta_\sigma, \quad \sigma \in \Gamma_{L-1}. \tag{4.3}$$

证明. 根据式(4.1)得

$$\hat{S}_\sigma = \prod_{k=0}^{L-1} (I + \mathcal{E}_\sigma(k) S_k), \quad \sigma \in \Gamma_{L-1}.$$

与定理 3.1 类似, 假设 $\sigma, \tau \in \Gamma_{L-1}$ 且 $\sigma \neq \tau$, 则 $\hat{S}_\sigma \hat{S}_\tau = 0$, 并且对于 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$, \hat{S}_σ 具有以下展开形式

$$\hat{S}_\sigma = \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} (-1)^{\#(\tau \setminus \sigma)} S_\tau.$$

向量系 $\{\hat{S}_\sigma Z_\emptyset \mid \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 在 \mathcal{H}_L 中是正交的, 且

$$\begin{aligned} \|\hat{S}_\sigma Z_\emptyset\|^2 &= \left\| \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} (-1)^{\#(\tau \setminus \sigma)} Z_{\tau \Delta(\tau+1)} \right\|^2 \\ &= \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} 1 \\ &= 2^L, \quad \sigma \in \Gamma_{L-1}. \end{aligned}$$

现令 $\zeta_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2^L}} \hat{S}_\sigma Z_\emptyset$, 对于每个 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$, 我们得到 \mathcal{H}_L 中的一个标准正交系 $\{\zeta_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$. 根据命题 4.1 得 $S_k \hat{S}_\sigma = \mathcal{E}_\sigma(k) \hat{S}_\sigma$, $\sigma \in \Gamma_{L-1}$. 因此, 对于 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$, 我们最终得到

$$S_k \zeta_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2^L}} S_k \hat{S}_\sigma Z_\emptyset = \frac{1}{\sqrt{2^L}} \mathcal{E}_\sigma(k) \hat{S}_\sigma Z_\emptyset = \mathcal{E}_\sigma(k) \zeta_\sigma,$$

证得式(4.3)。

注记 4.1. 定理 4.2 表明, 对任意的 $k \in \mathbb{N}_{L-1}$ 及 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$, ζ_σ 是算子 S_k 的一个特征向量, 且 $\mathcal{E}_\sigma(k)$ 为对应的特征值。

我们假设 \mathcal{D}_L 是由 $\{Z_{\sigma \Delta(\sigma+1)} \mid \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 张成的 \mathcal{H}_L 的线性子空间, 即 $\mathcal{D}_L = \text{sapn}\{Z_{\sigma \Delta(\sigma+1)} \mid \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$, $\dim \mathcal{D}_L = 2^L$. 同样的, 我们用 \mathcal{D}_L^\perp 表示 \mathcal{D}_L 在 \mathcal{H}_L 中的正交补空间。

定理 4.3. $\{\zeta_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 构成 \mathcal{D}_L 的标准正交基。

证明. 对于 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$, 根据 \mathcal{D}_L 的定义, 我们有

$$\zeta_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2^L}} \hat{S}_\sigma Z_\emptyset = \frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} (-1)^{\#(\tau \setminus \sigma)} Z_{\tau \Delta(\tau+1)}, \quad (4.4)$$

它属于 \mathcal{D}_L . 因此 $\{\zeta_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 是 \mathcal{D}_L 中的一个标准正交系, $\#\{\zeta_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_{L-1}\} = 2^L = \dim \mathcal{D}_L$. 因此 $\{\zeta_\sigma \mid \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 构成了 \mathcal{D}_L 的一个标准正交基。

命题 4.4. 对于 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$ 和 $\tau \in \Gamma_{L-1}$, 有以下关系成立

$$\langle \zeta_\tau, Z_{\sigma \Delta(\sigma+1)} \rangle_{\mathcal{D}_L} = \langle Z_{\sigma \Delta(\sigma+1)}, \zeta_\tau \rangle_{\mathcal{D}_L} = \frac{1}{\sqrt{2^L}} (-1)^{\#(\sigma \setminus \tau)}. \quad (4.5)$$

证明. 根据式(4.4), 我们有

$$\zeta_\tau = \frac{1}{\sqrt{2^L}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{L-1}} (-1)^{\#(\gamma \setminus \tau)} Z_{\gamma \Delta(\gamma+1)},$$

结合 $\{Z_{\gamma \Delta(\gamma+1)} \mid \gamma \in \Gamma_{L-1}\}$ 是 \mathcal{D}_L 的标准正交基, 得到式(4.5)。

命题 4.5. 设游荡 \mathcal{W}_R 的初始状态 Φ_0 满足 $\Phi_0 \in \mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$. 那么, 其轨迹完全包含在 $\mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 中, 即

$\{\Phi_t | t \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 。特别地，在 $t \in \mathbb{N}$ 时，其概率分布 $P_t(\cdot | \Phi_0)$ 支撑在子集 $\{\sigma_\Delta(\sigma+1) | \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 中。

证明. 假设给定 $t \in \mathbb{N}$ 。根据定义 3.2，有 $\Phi_{t+1} = \mathcal{W}_{\mathbb{R}} \Phi_t$ ，可得 $\Phi_t \in \mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 。假设给定 $\tau \in \Gamma_L \setminus \{\sigma_\Delta(\sigma+1) | \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 。对于所有 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$ ，有 $\langle Z_\tau, Z_{\sigma_\Delta(\sigma+1)} \rangle = 0$ ，表明 $Z_\tau \in \mathcal{D}_L^\perp$ 。因此，考虑到 $\Phi_t \in \mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$ ，我们发现

$$P_t(\tau | \Phi_0) = \left| \langle Z_\tau \otimes e_j, \Phi_t \rangle \right|^2 = 0.$$

这表明作为 Γ_L 上的概率分布， $P_t(\cdot | \Phi_0)$ 支撑在子集 $\{\sigma_\Delta(\sigma+1) | \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 中。

回顾一下，对于 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$ ， \mathcal{E}_σ -加权和 $\mathbf{U}_\sigma^{(\mathbb{R})}$ 是硬币空间 \mathbb{C}^d 上的酉算子。下一个定理展示了这样一个算子与演化算子 $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ 之间的密切关系。

定理 4.6. 对于 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$ ， $u \in \mathbb{C}^d$ ，有 $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}(\zeta_\sigma \otimes u) = \zeta_\sigma \otimes (\mathbf{U}_\sigma^{(\mathbb{R})} u)$ 。

证明. 设给定 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$ ， $u \in \mathbb{C}^d$ 。根据 $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathbf{U}_\sigma^{(\mathbb{R})}$ 的定义以及定理 4.2，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mathbb{R}}(\zeta_\sigma \otimes u) &= \sum_{j=0}^{L-1} (S_j \otimes C_j)(\zeta_\sigma \otimes u) \\ &= \sum_{j=0}^{L-1} (\mathcal{E}_\sigma(j) \zeta_\sigma) \otimes (C_j u) \\ &= \zeta_\sigma \otimes \left(\sum_{j=0}^{L-1} \mathcal{E}_\sigma(j) C_j \right) u \\ &= \zeta_\sigma \otimes (\mathbf{U}_\sigma^{(\mathbb{R})} u). \end{aligned}$$

注记 4.2. 根据定理 4.3 及 4.5 可知， $\{\zeta_\sigma \otimes e_j | \sigma \in \Gamma_{L-1}, 0 \leq j \leq d-1\}$ 是张量积空间 $\mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 的标准正交基。因此，每个 $\Psi \in \mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 都可以展开成如下形式：

$$\Phi_0 = \sum_{\sigma \in \Gamma_{L-1}} \zeta_\sigma \otimes u_\sigma, \tag{4.6}$$

其中， $u_\sigma = \sum_{j=0}^{d-1} \langle \zeta_\sigma \otimes e_j, \Phi_0 \rangle e_j$ ，称其为 Φ_0 相对于 $\{\zeta_\sigma | \sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 的第 σ 个 \mathbb{C}^d -分量。

下述定理是本文的主要结果之一，它建立了一个用于确定游荡 $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ 的概率分布的公式。

定理 4.7. 设 $\Phi_0 \in \mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 是一个单位向量。当 $t \in \mathbb{N}$ 时，以 Φ_0 为初始状态的游荡 $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ 具有如下形式的概率分布：

$$P_t(\sigma_\Delta(\sigma+1) | \Phi_0) = \frac{1}{2^L} \left\| \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} (-1)^{\#(\sigma \setminus \tau)} (\mathbf{U}_\tau^{(\mathbb{R})})^t u_\tau \right\|_{\mathbb{C}^d}^2, \quad \sigma \in \Gamma_{L-1}. \tag{4.7}$$

其中， $u_\tau = \sum_{j=0}^{d-1} \langle \zeta_\tau \otimes e_j, \Phi_0 \rangle e_j$ ，称其为 Φ_0 相对于 $\{\zeta_\tau | \tau \in \Gamma_{L-1}\}$ 的第 τ 个 \mathbb{C}^d -分量。

证明. 根据注记 4.2，初始状态 Φ_0 具有以下展开：

$$\Phi_0 = \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} \zeta_\tau \otimes u_\tau,$$

其中 $u_\tau = \sum_{j=0}^{d-1} \langle \zeta_\tau \otimes e_j, \Phi_0 \rangle e_j$ 。根据定理 4.6，我们有

$$\Phi_t = (\mathcal{W}_{\mathbb{R}})^t \Phi_0 = \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} \zeta_\tau \otimes (\mathbf{U}_\tau^{(\mathbb{R})})^t u_\tau.$$

假设 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$ ，然后根据上述表达式可得

$$\begin{aligned}
 P_t(\sigma_\Delta(\sigma+1)|\Phi_0) &= \sum_{j=0}^{d-1} \left| \left\langle Z_{\sigma_\Delta(\sigma+1)} \otimes e_j, \Phi_t \right\rangle \right|^2 \\
 &= \sum_{j=0}^{d-1} \left| \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} \left\langle Z_{\sigma_\Delta(\sigma+1)} \otimes e_j, \zeta_\tau \otimes (\mathbf{U}_\tau^{(\mathbb{R})})^t u_\tau \right\rangle \right|^2 \\
 &= \sum_{j=0}^{d-1} \left| \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} \left\langle Z_{\sigma_\Delta(\sigma+1)}, \zeta_\tau \right\rangle_{\mathcal{D}_L} \left\langle e_j, (\mathbf{U}_\tau^{(\mathbb{R})})^t u_\tau \right\rangle_{\mathbb{C}^d} \right|^2 \\
 &= \sum_{j=0}^{d-1} \left| \left\langle e_j, \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} \left\langle Z_{\sigma_\Delta(\sigma+1)}, \zeta_\tau \right\rangle_{\mathcal{D}_L} (\mathbf{U}_\tau^{(\mathbb{R})})^t u_\tau \right\rangle_{\mathbb{C}^d} \right|^2 \\
 &= \left\| \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} \left\langle Z_{\sigma_\Delta(\sigma+1)}, \zeta_\tau \right\rangle_{\mathcal{D}_L} (\mathbf{U}_\tau^{(\mathbb{R})})^t u_\tau \right\|_{\mathbb{C}^d}^2,
 \end{aligned}$$

结合命题 4.4 可得

$$P_t(\sigma_\Delta(\sigma+1)|\Phi_0) = \frac{1}{2^L} \left\| \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} (-1)^{\#\sigma \setminus \tau} (\mathbf{U}_\tau^{(\mathbb{R})})^t u_\tau \right\|_{\mathbb{C}^d}^2.$$

因此, 式(4.7)成立。

对于 $T \geq 1$ 时, 我们定义游荡 $\mathcal{W}_\mathbb{R}$ 的 T -平均概率分布为

$$\bar{P}_T(\sigma|\Phi_0) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} P_t(\sigma|\Phi_0), \quad \sigma \in \Gamma_L, \tag{4.8}$$

其中, $P_t(\sigma|\Phi_0)$ 是 t 时刻游荡 $\mathcal{W}_\mathbb{R}$ 的概率分布, 而 Φ_0 是初始状态。根据命题 4.5, 在 $\Phi_0 \in \mathcal{D}_L$ 时, $\bar{P}_T(\cdot|\Phi_0)$ 支撑在子集 $\{\sigma_\Delta(\sigma+1)|\sigma \in \Gamma_{L-1}\}$ 上。

定理 4.8. 设 $\Phi_0 \in \mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 是一个单位向量。对于每个 $\tau \in \Gamma_{L-1}$, u_τ 是 $\mathbf{U}_\tau^{(\mathbb{R})}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ_τ , 那么对于初始状态为 Φ_0 的游荡 $\mathcal{W}_\mathbb{R}$, 以下结论成立:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{P}_T(\sigma_\Delta(\sigma+1)|\Phi_0) = \frac{1}{2^L} \left[1 + \sum_{(\tau_1, \tau_2)} (-1)^{\#\sigma \setminus \tau_1 + \#\sigma \setminus \tau_2} \left\langle u_{\tau_1}, u_{\tau_2} \right\rangle_{\mathbb{C}^d} \right], \quad \sigma \in \Gamma_{L-1}, \tag{4.9}$$

其中, \sum 表示对集合 $\{(\tau_1, \tau_2) \in \Gamma_{L-1} \times \Gamma_{L-1} | \tau_1 \neq \tau_2, \lambda_{\tau_1} = \lambda_{\tau_2}\}$ 中的所有元素求和。

证明.²² 假设给定 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$ 。对于 $t \in \mathbb{N}$, 根据定理 4.7 得

$$\begin{aligned}
 P_t(\sigma_\Delta(\sigma+1)|\Phi_0) &= \frac{1}{2^L} \left\| \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} (-1)^{\#\sigma \setminus \tau} \lambda_\tau^t u_\tau \right\|_{\mathbb{C}^d}^2 \\
 &= \frac{1}{2^L} \left[\sum_{(\tau_1, \tau_2) \in \Theta_1} + \sum_{(\tau_1, \tau_2) \in \Theta_2} + \sum_{(\tau_1, \tau_2) \in \Theta_3} \right] (-1)^{\#\sigma \setminus \tau_1 + \#\sigma \setminus \tau_2} \bar{\lambda}_{\tau_1}^t \lambda_{\tau_2}^t \left\langle u_{\tau_1}, u_{\tau_2} \right\rangle_{\mathbb{C}^d} \\
 &= \frac{1}{2^L} \left[\sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} \|u_\tau\|_{\mathbb{C}^d}^2 + \sum_{(\tau_1, \tau_2) \in \Theta_2} (-1)^{\#\sigma \setminus \tau_1 + \#\sigma \setminus \tau_2} \left\langle u_{\tau_1}, u_{\tau_2} \right\rangle_{\mathbb{C}^d} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2^L} \left[\sum_{(\tau_1, \tau_2) \in \Theta_3} (-1)^{\#\sigma \setminus \tau_1 + \#\sigma \setminus \tau_2} \bar{\lambda}_{\tau_1}^t \lambda_{\tau_2}^t \left\langle u_{\tau_1}, u_{\tau_2} \right\rangle_{\mathbb{C}^d} \right] \\
 &= \frac{1}{2^L} \left[1 + \sum_{(\tau_1, \tau_2) \in \Theta_3} (-1)^{\#\sigma \setminus \tau_1 + \#\sigma \setminus \tau_2} \left\langle u_{\tau_1}, u_{\tau_2} \right\rangle_{\mathbb{C}^d} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2^L} \sum_{(\tau_1, \tau_2) \in \Theta_3} (-1)^{\#\sigma \setminus \tau_1 + \#\sigma \setminus \tau_2} \bar{\lambda}_{\tau_1}^t \lambda_{\tau_2}^t \left\langle u_{\tau_1}, u_{\tau_2} \right\rangle_{\mathbb{C}^d},
 \end{aligned}$$

其中 $\Theta_1 = \{(\tau, \tau) | \tau \in \Gamma_{L-1}\}$, $\Theta_2 = \{(\tau_1, \tau_2) \in \Gamma_{L-1} \times \Gamma_{L-1} | \tau_1 \neq \tau_2, \lambda_{\tau_1} = \lambda_{\tau_2}\}$ 且 $\Theta_3 = \{(\tau_1, \tau_2) \in \Gamma_{L-1} \times \Gamma_{L-1} | \tau_1 \neq \tau_2, \lambda_{\tau_1} \neq \lambda_{\tau_2}\}$ 。因此, 对于 $T \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \bar{P}_T(\sigma_\Delta(\sigma+1) | \Phi_0) &= \frac{1}{2^L} \left[1 + \sum_{(\tau_1, \tau_2) \in \Theta_2} (-1)^{\#(\sigma \setminus \tau_1) + \#(\sigma \setminus \tau_2)} \langle u_{\tau_1}, u_{\tau_2} \rangle_{\mathbb{C}^d} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2^L} \sum_{(\tau_1, \tau_2) \in \Theta_3} (-1)^{\#(\sigma \setminus \tau_1) + \#(\sigma \setminus \tau_2)} \langle u_{\tau_1}, u_{\tau_2} \rangle_{\mathbb{C}^d} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \bar{\lambda}_{\tau_1}^t \lambda_{\tau_2}^t, \end{aligned}$$

结合

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \bar{\lambda}_{\tau_1}^t \lambda_{\tau_2}^t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1 - (\bar{\lambda}_{\tau_1} \lambda_{\tau_2})^T}{1 - \bar{\lambda}_{\tau_1} \lambda_{\tau_2}} = 0, \quad \forall (\tau_1, \tau_2) \in \Theta_3,$$

得到式(4.9)。

对于每个 $\tau \in \Gamma_{L-1}$, 令 $w_\tau \in \mathbb{C}^d$ 为 $U_\tau^{(\mathfrak{R})}$ 的特征向量, λ_τ 是对应的特征值。定义

$$\Phi_0 = A^{\frac{1}{2}} \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} \zeta_\tau \otimes w_\tau, \tag{4.10}$$

其中 $A = \sum_{\tau \in \Gamma_{L-1}} \|w_\tau\|_{\mathbb{C}^d}^2$ 。然后, Φ_0 是 $\mathcal{D}_L \otimes \mathbb{C}^d$ 中的单位向量, 因此可以作为游荡 $\mathcal{W}_{\mathfrak{R}}$ 的初始状态。容易看出

$$u_\tau = A^{-\frac{1}{2}} w_\tau, \quad \tau \in \Gamma_{L-1}, \tag{4.11}$$

这意味着 u_τ 是 $U_\tau^{(\mathfrak{R})}$ 的一个特征向量。这表明定理 4.8 中的要求可以得到满足。

作为定理 4.8 的直接推论, 下个定理表明游荡 $\mathcal{W}_{\mathfrak{R}}$ 的极限平均概率分布甚至与 Γ_{L-1} 上的均匀概率分布完全重合。

定理 4.9. 设对于每个 $\tau \in \Gamma_{L-1}$, $u_\tau = \sum_{j=0}^{d-1} \langle \zeta_\tau \otimes e_j, \Phi_0 \rangle e_j$ 是酉算子 $U_\tau^{(\mathfrak{R})}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ_τ , 并且当 $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma_{L-1}$ 且 $\tau_1 \neq \tau_2$ 时, 有 $\lambda_{\tau_1} \neq \lambda_{\tau_2}$ 。那么, 对于所有 $\sigma \in \Gamma_{L-1}$, 有

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{P}_T(\sigma_\Delta(\sigma+1) | \Phi_0) = \frac{1}{2^L}. \tag{4.12}$$

证明. 根据定理的条件可知, 集合 $\{(\tau_1, \tau_2) \in \Gamma_{L-1} \times \Gamma_{L-1} | \tau_1 \neq \tau_2, \lambda_{\tau_1} = \lambda_{\tau_2}\}$ 为空集。结合定理 4.8 即可得到式(4.12)。

接下来我们将提供一个示例来说明上述定理中的假设条件是可以满足的。

例 4.1. 取 \mathbb{C}^2 作为硬币空间, 于是有一个硬币算子系 $\mathfrak{R} = \{C_0, C_1\}$ 作用于 \mathbb{C}^2 上, 其中

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

在这种情况下, 游荡的状态空间是 $\mathcal{H}_2 \otimes \mathbb{C}^2$, 演化算子 $\mathcal{W}_{\mathfrak{R}}$ 的形式为

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{R}} = S_0 \otimes C_0 + S_1 \otimes C_1.$$

根据定理 4.7, 我们可以在其子空间 $\mathcal{D}_2 \otimes \mathbb{C}^2$ 上得到概率分布的显示表达。由引理 3.1, 硬币算子系 \mathfrak{R} 的加权和为

$$U_{\emptyset}^{(\mathfrak{R})} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{\{0\}}^{(\mathfrak{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{\{1\}}^{(\mathfrak{R})} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{\{0,1\}}^{(\mathfrak{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

仔细计算可得这些酉算子(矩阵)的谱为

$$\text{Spec}(U_{\emptyset}^{(R)}) = \text{Spec}(U_{\{0,1\}}^{(R)}) = \{-1, 1\}, \quad \text{Spec}(U_{\{0\}}^{(R)}) = \text{Spec}(U_{\{1\}}^{(R)}) = \{-i, i\},$$

其中 $\text{Spec}(A)$ 表示作用于 \mathbb{C}^2 上的算子 A 的谱。

设 $w_{\emptyset} \in \mathbb{C}^2$ 是 $U_{\emptyset}^{(R)}$ 的特征向量, 对应的特征值为 $\lambda_{\emptyset} = -1$; $w_{\{0\}} \in \mathbb{C}^2$ 是 $U_{\{0\}}^{(R)}$ 的特征向量, 对应的特征值为 $\lambda_{\{0\}} = -i$; $w_{\{1\}} \in \mathbb{C}^2$ 是 $U_{\{1\}}^{(R)}$ 的特征向量, 对应的特征值为 $\lambda_{\{1\}} = i$; $w_{\{0,1\}} \in \mathbb{C}^2$ 是 $U_{\{0,1\}}^{(R)}$ 的特征向量, 对应的特征值为 $\lambda_{\{0,1\}} = 1$ 。令

$$\Phi_0 = A^{-\frac{1}{2}} \sum_{\tau \in \Gamma_1} \zeta_{\tau} \otimes w_{\tau},$$

其中 $A = \sum_{\tau \in \Gamma_1} \|w_{\tau}\|_{\mathbb{C}^2}^2$ 。那么, Φ_0 是 $\mathcal{D}_2 \otimes \mathbb{C}^2$ 中的一个单位向量, 因此可以作为初始状态。此外, 对于每个 $\tau \in \Gamma_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$, 有

$$u_{\tau} = \sum_{j=0}^{d-1} \langle \zeta_{\tau} \otimes e_j, \Phi_0 \rangle e_j = A^{-\frac{1}{2}} w_{\tau},$$

这意味着 $U_{\tau}^{(R)} u_{\tau} = \lambda_{\tau} u_{\tau}$, 即 u_{τ} 是 $U_{\tau}^{(R)}$ 的特征向量, 对应的特征值为 λ_{τ} 。显然, 对于 $\tau_1, \tau_2 \in \Gamma_1$ 且 $\tau_1 \neq \tau_2$, 有 $\lambda_{\tau_1} \neq \lambda_{\tau_2}$ 。这表明定理 4.9 中的假设条件是可以满足的。

至此, 我们在 Bernoulli 泛函的框架下提出了一个离散时间量子游荡模型, 并且研究了该量子游荡模型的概率分布。

5. 总结与展望

通过本文的研究可见, 我们在 Bernoulli 泛函框架下引入并研究了一类离散时间量子游荡模型。与文献[9]中的模型相比, 我们得到以下结论:

1) 从物理视角看, 文献[9]中的模型描述了自由粒子在 $(L+1)$ -维超立方体 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_w)$ 上的跃迁演化行为, 而本文模型描述了自由粒子在图 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_y)$ 上的跃迁演化行为。作为有限图, $(\Gamma_L, \mathcal{E}_w)$ 和 $(\Gamma_L, \mathcal{E}_y)$ 虽具有相同的顶点集 Γ_L , 但具有不同的边集 \mathcal{E}_w 和 \mathcal{E}_y (具体描述见 3.1 节)。

2) 文献[9]中模型的概率分布通常支撑于整个顶点集 Γ_L , 而本文的概率分布支撑于顶点集 Γ_L 的一个较大子集。

这些差异的主要原因在于两个模型具有不同的位移算子, 这些位移算子分别反映了其对应图的拓扑结构。

我们将进一步探究当该游荡的初始状态满足一些温和条件时的平稳测度等性质, 从而优化量子搜索算法的效率。我们还将在 Bernoulli 泛函的框架下, 通过该位移算子 S_k 构造 Hamilton 算子 $H_L = \sum_{k=0}^{L-1} \Xi_k \Xi_{k+1}$,

以 H_L 作为 Hamilton 量构建连续时间量子游荡模型, 研究其概率分布以及完美态转移等性质, 挖掘其与经典物理模型的联系, 为研究经典物理模型的性质提供一种新的方法。

参考文献

- [1] Aharonov, Y., Davidovich, L. and Zagury, N. (1993) Quantum Random Walks. *Physical Review A*, **48**, 1687-1690. <https://doi.org/10.1103/physreva.48.1687>
- [2] Kempe, J. (2003) Quantum Random Walks: An Introductory Overview. *Contemporary Physics*, **44**, 307-327. <https://doi.org/10.1080/00107151031000110776>
- [3] Konno, N. (2008) Quantum Walks. *Lecture Notes in Mathematics*.
- [4] Venegas-Andraca, S.E. (2012) Quantum Walks: A Comprehensive Review. *Quantum Information Processing*, **11**, 1015-

-
1106. <https://doi.org/10.1007/s11128-012-0432-5>
- [5] Cao, X. (2021) Perfect Edge State Transfer on Cubelike Graphs. *Quantum Information Processing*, **20**, Article No. 285. <https://doi.org/10.1007/s11128-021-03223-9>
- [6] Wang, C. and Ye, X. (2016) Quantum Walk in Terms of Quantum Bernoulli Noises. *Quantum Information Processing*, **15**, 1897-1908. <https://doi.org/10.1007/s11128-016-1259-2>
- [7] Wang, C., Tang, Y. and Ren, S. (2019) Weighted Number Operators on Bernoulli Functionals and Quantum Exclusion Semigroups. *Journal of Mathematical Physics*, **60**, Article ID: 113506. <https://doi.org/10.1063/1.5120102>
- [8] Ren, S., Wang, C. and Tang, Y. (2020) Quantum Bernoulli Noises Approach to Stochastic Schrödinger Equation of Exclusion Type. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article ID: 063509. <https://doi.org/10.1063/1.5138370>
- [9] Wang, C. (2022) The Uniform Measure for Quantum Walk on Hypercube: A Quantum Bernoulli Noises Approach. *Journal of Mathematical Physics*, Article ID: **63**, Article ID: 113501. <https://doi.org/10.1063/5.0070451>
- [10] Privault, N. (2008) Stochastic Analysis of Bernoulli Processes. *Probability Surveys*, **5**, 435-483.
- [11] Wang, C., Chai, H. and Lu, Y. (2010) Discrete-Time Quantum Bernoulli Noises. *Journal of Mathematical Physics*, **51**, Article ID: 053528. <https://doi.org/10.1063/1.3431028>
- [12] Wang, C. (2023) Abstract Model of Continuous-Time Quantum Walk Based on Bernoulli Functionals and Perfect State Transfer. *International Journal of Quantum Information*, **21**, 3. <https://doi.org/10.1142/s0219749923500156>