

一类n-种群捕食 - 竞争随机系统持久性研究

谭海花^{*}, 廖新元[#]

南华大学数理学院, 湖南 衡阳

收稿日期: 2025年12月31日; 录用日期: 2026年1月29日; 发布日期: 2026年2月6日

摘 要

本文研究一类n种群捕食 - 竞争随机系统的几乎必然持久性。通过构造适当的Liapunov函数, 运用Itô公式得到该系统全局唯一正解的存在性和最终随机有界性, 利用非负半鞅收敛理论得到该随机系统的持久性充分条件, 并将该持久性充分条件拓展到该随机非线性系统, 并得到该随机非线性系统满足特定的条件依概率1灭绝。最后, 通过数值模拟验证我们所得结论的正确性。

关键词

随机持久性, 捕食 - 竞争系统, Liapunov函数, 数值模拟

Research on Persistence of a Class of n-Species Predator-Competition Stochastic System

Haihua Tan^{*}, Xinyuan Liao[#]

School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan

Received: December 31, 2025; accepted: January 29, 2026; published: February 6, 2026

Abstract

This paper studies the almost inevitable persistence of a class of N-population predator-competitive stochastic systems. By constructing an appropriate Liapunov function and applying the Itô formula, the existence of the globally unique positive solution and the ultimate random boundedness of the system are obtained. The sufficient condition for the persistence of the random system is obtained by using the non-negative half-martingales convergence theory, and this sufficient condition for persistence is extended to the random nonlinear system. And it is obtained that the stochastic

^{*}第一作者。

[#]通讯作者。

文章引用: 谭海花, 廖新元. 一类 n-种群捕食-竞争随机系统持久性研究[J]. 理论数学, 2026, 16(2): 101-118.

DOI: 10.12677/pm.2026.162038

nonlinear system satisfies specific conditions and becomes extinct with a probability of 1. Finally, the correctness of the conclusion we reached was verified through numerical simulation.

Keywords

Stochastic Persistence, Predator-Competition System, Liapunov Function, Numerical Simulation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在实际的生态系统中, 不同种群之间存在竞争关系是很普遍的, 也往往存在着一些种群以另一些相互竞争的种群为食的现象。在生态学理论研究中, 多物种群落相互作用的动力系统是揭示生物多样性维持机制、种群动态规律及生态系统持久性的核心课题。持久性作为一个关键的全局性概念, 其研究具有首要的理论与现实意义。持久性, 即所有种群在初始存在的条件下, 其密度长期远离零灭绝状态, 是生态系统得以延续和维持其功能的前提, 它比局部渐近稳定性更能反映生物群落抵抗干扰和物种长期共存的能力。因此, 探究 n 种群捕食 - 竞争系统在何种条件下能够实现持久性, 不仅是数学生态学中的一个深刻的理论问题, 对于理解生物多样性的起源、评估生态系统的脆弱性以及制定科学的保护策略也具有重要的指导价值。

许多学者对 n -种群的研究以及其持久性方面已经做了许多可喜的成果, 例如, Li 等研究了一类非同步扩散的 n 种群捕食竞争系统的持久性, 通过构造 Lyapunov 函数以及微分不等式原理得到该系统中 n 种群永久持续生存的充分条件[1]。Shi 等通过研究一类非线性捕食 - 竞争系统, 当系数是连续的概周期函数时, 增长率可能为负的情形下, 得到了该系统的周期性解和持久性充分性条件[2]。Wang 等研究了一类具有时滞的两种群非线性竞争系统, 得到了第二个种群灭绝的充分条件, 由微分方程比较定理和一些分析技巧, 通过一系列引理最终获得第二个种群灭绝性的证明[3]。Chen 等针对有界域内的 n 物种捕食 - 猎物模型展开研究, 通过构造正解或拟解建立了时间依赖解与稳态解的关联条件, 并通过数值模拟验证了理论结果[4]。Tuerxun Nafeisha 等[5]构建了一类 n 物种随机食物链模型, 引入白噪声与 Lévy 跳跃, 通过发展辅助函数法与随机微分方程理论, 建立系统的全局随机动力学, 数值模拟验证了理论结果[5]。Jiang Zhao 等研究了一类 n 物种 Lotka-Volterra 合作模型, 引入反馈控制项与连续时滞, 利用积分不等式技术、比较原理及 Lyapunov-Razumikhin 方法, 推导出系统全局吸引性、持久性及周期解存在性的条件, 并通过数值案例验证结果的实用性[6]。Li 通过研究一类 n 种群捕食 - 竞争系统, 利用构造 Lyapunov 函数以及微分不等式得到了该系统的概周期解的全局稳定性充分条件[7]。Seno H 研究了一类 n 猎物-1 捕食者的 Lotka-Volterra 系统, 研究猎物间通过共享捕食者产生的表观竞争效应, 推导可行平衡点渐近稳定的充要条件, 明确其决定猎物灭绝或存续[8]。于勇和于红两位学者提出的一类多种群非自治捕食 - 竞争系统:

$$\begin{cases} dX_n(t) = X_n(t) \left[-b_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) - a_{nn}(t) X_n(t) \right] dt, \\ dX_i(t) = X_i(t) \left[b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j(t) \right] dt \quad (1 \leq i \leq n-1), \end{cases} \quad (1)$$

其中 X_n 为捕食者种群在时刻 t 的密度; $X_i (1 \leq i \leq n-1)$ 为食饵种群在时刻 t 的密度; 通过构造 Liapunov 函数, 得到了该系统的一致持续生存和全局渐近稳定的充分条件[9]。尽管随机 n 种群模型研究已取得丰硕成果, 但对于随机噪声特异性作用于捕食过程的捕食-竞争模型, 其动力学行为的理论研究尚不充分。

在实际情况下, 除了生物种间相互作用外, 环境噪声在种群动态中也起着关键作用。由于生态系统中存在长期而复杂的环境波动, 模型参数常常呈现出随机扰动特性。在本文中我们假设环境主要影响增长率和死亡率。在系统(1)的基础上, 假设:

$$b_i(t) \rightarrow b_i(t) + \sigma_i(t) \dot{B}(t).$$

因而可得到随机模型(SDE)表示为:

$$\begin{cases} dX_n(t) = X_n(t) \left[-b_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) - a_{nn}(t) X_n(t) \right] dt - \sigma_n(t) X_n(t) dB_n(t), \\ dX_i(t) = X_i(t) \left[b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j(t) \right] dt + \sigma_i(t) X_i(t) dB_i(t) \quad (1 \leq i \leq n-1), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $B_i(t) (i=1, \dots, n)$ 表示定义在一个完备的概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的独立标准布朗运动;

$b_i(t), a_{ij}(t), \sigma_i(t) (i, j=1, 2, \dots, n)$ 是正值连续有界函数; $b_i(t)$ 表示第 i 个种群增长率 $(i=1, 2, \dots, n-1)$;

$b_n(t)$ 表示第 n 个种群死亡率; $a_{ij}(t)$ 表示第 i 和 j 个种群的种间作用系数; $\sigma_i(t)$ 第 i 个种群噪声强度。

本文将对系统(2)做出的研究在章节 2 给出。

符号说明: $\check{a}_{ij} = \max_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}, 0 < \hat{a}_{ij} = \min_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}, \check{a} = \max_{1 \leq i, j \leq n} \check{a}_{ij}, 0 < \hat{a} = \min_{1 \leq i, j \leq n} \hat{a}_{ij}, R_+^n = \{X \in R^n : X_i > 0, 1 \leq i \leq n\}$ 。

2. 主要结论和结果

2.1. 全局唯一正解存在性

在研究复杂动态系统的过程中, 唯一全局正解的存在性是理解随机系统行为的关键基石。因此, 这里先给出该系统全局唯一正解的存在性证明, 为后续分析提供了稳固的起点。

定理 1: 对任意给定的初值 $X(0) \in \mathbb{R}_+^n$, 系统(2)依概率 1 存在唯一的全局正解。

证明: 由文献[9]易知, 系统(2)的解为正, 且该系统的系数满足局部 Lipschitz 条件, 因此对任意给定的初始值 $X(0) \in \mathbb{R}_+^n$, 存在唯一的局部正解 $X(t)$ 在 $t \in [0, \tau_e)$ 上, 其中 τ_e 为爆炸时间。要证明该解是全局的, 需证 $\tau_e = \infty$ 几乎必然成立。

设 $k_0 > 0$ 足够大, 使得 $X(0)$ 的每个分量都落在区间 $\left[\frac{1}{k_0}, k_0\right]$ 内。对每个整数 $k \geq k_0$, 定义停时:

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : x_i(t) \notin \left(\frac{1}{k}, k \right), i=1, \dots, n \right\},$$

定义 $\inf \emptyset = \infty$ (其中 $\emptyset$ 表示空集)。显然, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, τ_k 单调递增。令 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 则 $\tau_\infty \leq \tau_e$ 几乎必然成立[10]。若能证 $\tau_\infty = \infty$ 几乎必然成立, 则 $\tau_e = \infty$ 几乎必然成立, 且对所有 $t \geq 0$, $X(t) \in \mathbb{R}_+^n$ 几乎必然成立。下证 $\tau_\infty = \infty$ 几乎必然成立。

定义 C^2 函数 $V: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$: $V(t, X) = \sum_{i=1}^n [X_i(t) - 1 - \log(X_i(t))]$ 。由 $u - 1 - \log(u) \geq 0$ (当 $u > 0$ 时), 可知 $V(X)$ 非负。对 $V(t, X)$ 应用 Itô 公式得:

$$dV = \left[\sum_{i=1}^{n-1} (X_i(t)-1) \left(b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j(t) \right) + (X_n(t)-1) \left(-b_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) - a_{nn}(t) X_n(t) \right) \right] dt \\ + \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t) \right] dt + \sum_{i=1}^{n-1} (X_i(t)-1) \sigma_i(t) dB_i(t) - (X_n(t)-1) \sigma_n(t) dB_n(t).$$

记

$$LV(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (X_i(t)-1) \left(b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j(t) \right) \\ + (X_n(t)-1) \left(-b_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) - a_{nn}(t) X_n(t) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t) \\ = \sum_{i=1}^{n-1} X_i(t) b_i(t) - \sum_{i=1}^{n-1} X_i(t) \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j(t) - \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j(t) - b_n(t) X_n(t) \\ + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) X_n(t) - a_{nn}(t) X_n(t)^2 + b_n(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) + a_{nn}(t) X_n(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t). \quad (3)$$

从而有

$$dV = LV(X(t))dt + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i(t) X_i dB_i(t) - \sigma_n(t) X_n dB_n(t).$$

取期望并积分得

$$EV(X(\tau_k \wedge T)) = V(X_0) + E \int_0^{\tau_k \wedge T} (LV(X(t))) ds,$$

在(3)式中, 显然有

$$-\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) - \sum_{i=1}^{n-1} b_i(t) + a_{nn}(t) X_n(t) - a_{nn}(t) X_n(t)^2 + b_n(t) < 0, \\ \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) X_n(t) - \sum_{i=1}^{n-1} X_i(t) \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j(t) < 0.$$

因此对 $LV(X(t))$ 利用放缩法可得

$$LV(X(t)) \leq \check{b} \sum_{i=1}^n X_i(t) + n \check{a} \sum_{i=1}^n X_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \left(\check{b} + n \check{a} \right) \sum_{i=1}^n X_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t).$$

注意到当 $u > 0$ 时 $u \leq 2[u - 1 - \log(u)] + 2$, 从而

$$LV(X(t)) \leq \left(\check{b} + n \check{a} \right) \sum_{i=1}^n X_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t) \leq 2 \left[\check{b} + n \check{a} \right] [V(X) + n] + \frac{1}{2} n \check{\sigma}_i^2 \\ = 2 \left[\check{b} + n \check{a} \right] V(X) + n \left[2 \check{b} + 2n + n \check{a} + \frac{1}{2} n \check{\sigma}_i^2 \right] = K_1 V(X) + K_2.$$

其中 $K_1 = 2 \left[\check{b} + n \check{a} \right] > 0$, $K_2 = n \left[2 \check{b} + 2n + n \check{a} + \frac{1}{2} n \check{\sigma}_i^2 \right] > 0$ 为正常数, 因为 $X(t) \in \mathbb{R}_+^n$, 因此可得到

$$\mathbb{E}V(X(\tau_k \wedge T)) \leq V(0) + K_2 \mathbb{E}(\tau_k \wedge T) + K_1 \mathbb{E} \int_0^{\tau_k \wedge T} V(X(t)) dt \leq V(0) + K_2 T + K_1 \int_0^T \mathbb{E}V(X(\tau_k \wedge t)) dt.$$

由 Gronwall 不等式得

$$\mathbb{E}V(X(\tau_k \wedge T)) \leq [V(0) + K_2 T] e^{K_1 T}. \quad (4)$$

注意到当 $\omega = \{\tau_k \leq T\}$ 时, 存在某个 i 使得 $x_i(\tau_k, \omega)$ 等于 k 或 $\frac{1}{k}$, 因此, 由(4)得

$$[V(0) + K_2 T] e^{K_T} \geq E \left[1_{\{\tau_k \leq T\}} (\omega) V(X(\tau_k, \omega)) \right] \geq P\{\tau_k \leq T\} \left[(k-1-\log k) \wedge \left(\frac{1}{k} - 1 + \log k \right) \right].$$

其中 $1_{\{\tau_k \leq T\}}$ 是 $\{\tau_k \leq T\}$ 上的指标函数. 令 $k \rightarrow \infty$ 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\{\tau_k \leq T\} = 0.$$

因为 $T > 0$ 是任意的, 则 $P\{\tau_\infty < \infty\} = 0$, 所以 $P\{\tau_\infty = \infty\} = 1$. 证毕。

2.2. 随机最终有界

当我们深入探究系统在随机环境下的长期表现时, 一个自然的问题随之而来: 在随机扰动的情況下, 系统的解是否依然能够保持某种有界性? 这就引出了我们接下来要探讨的随机最终有界性。

定义 1: 若对任意小的 $\varepsilon > 0$, 存在正常数 $T = T(\varepsilon)$ 和 $C = C(\varepsilon)$, 使得当 $t \geq T$ 时, 系统(2)的解 $X(t)$ 满足有 $P(|X(t)| \geq C) < \varepsilon$ 成立, 则称系统(2)随机最终有界。

定理 2: 若满足 $a_{in} > a_{ni} > 0, (1 \leq i \leq n-1)$ 时, 则系统(2)的解是随机最终有界的。

证明: 定义 $U(X(t)) = e^t \sum_{i=1}^n X_i(t) := e^t V(X(t))$ 时, 对 $U(X(t))$ 应用 Itô 公式得

$$\begin{aligned} dU &= e^t \sum_{i=1}^n X_i(t) + e^t \sum_{i=1}^{n-1} X_i(t) \left[b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j(t) \right] dt \\ &\quad + e^t X_n(t) \left[-b_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) - a_{nn}(t) X_n(t) \right] dt \\ &\quad + e^t \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i(t) X_i(t) dB_i(t) - e^t \sigma_n(t) X_n(t) dB_n(t). \end{aligned}$$

记

$$F(X(t)) = e^t \sum_{i=1}^n X_i + e^t \sum_{i=1}^{n-1} X_i(t) \left[b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j(t) \right] dt + e^t X_n(t) \left[-b_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j(t) - a_{nn}(t) X_n(t) \right].$$

从而

$$dU = F(X(t)) dt + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i(t) X_i(t) dB_i(t) - \sigma_n(t) X_n(t) dB_n(t). \quad (5)$$

对每个整数 $k \geq |X(0)|$, 定义停时: $\tau_k = \inf \{t \in R_+ : |X(t)| \geq k\}$, 由

$$\begin{aligned} F(X(t)) &\leq e^t \sum_{i=1}^n X_i(t) + e^t \sum_{i=1}^{n-1} X_i(t) \left[b_i(t) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(t) X_j(t) \right] \\ &\quad - e^t \sum_{i=1}^{n-1} X_i(t) X_n(t) (a_{in}(t) - a_{ni}(t)) - e^t a_{nn}(t) X_n^2(t) \\ &\leq e^t (b_i(t) + 1) \sum_{i=1}^n X_i(t) - e^t \hat{a} \left(\sum_{i=1}^n X_i(t) \right)^2 \leq K. \end{aligned}$$

对(5)积分取期望可得到

$$e^{\tau_k \wedge t} EV(X(\tau_k \wedge t)) \leq V(X_0) + K \int_0^{\tau_k \wedge t} e^s ds.$$

令 k 趋于无穷大, 可得

$$e^t EV(X(t)) \leq V(X_0) + Ke^t. \quad (6)$$

由范数定义, 即若 $X \in \mathbb{R}^n$, 其范数记为 $|X| = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ 。从而式(6)可化简得出

$$E|X(t)| \leq EV(X(t)) \leq V(x_0)e^{-t} + K.$$

显然

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E|X(t)| \leq K.$$

对任意 $\eta > 0$, 存在 $T_1 > 0$, 使得当 $t \geq T_1$ 时, $\mathbb{E}|X(t)| \leq K + \eta$ 。取 $C = \frac{2(K+\eta)}{\varepsilon}$, 根据 Markov 不等式得:

$$P(|X(t)| \geq C) \leq \frac{\mathbb{E}|X(t)|}{C} \leq \frac{K+\eta}{C} = \frac{K+\eta}{\frac{2(K+\eta)}{\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

综上, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $T = T_1$ 、 $C = \frac{2(K+\eta)}{\varepsilon}$, 则当 $t \geq T$ 时,

$$P(|X(t)| \geq C) < \varepsilon,$$

证毕。

2.3. 随机持久性

随机最终有界性为我们理解系统在随机干扰下的稳定性提供了重要依据。然而, 仅仅知道系统状态是有界的还远远不够, 我们更关心系统能否在随机环境中持续生存并保持一定的活力。这就促使我们进一步研究系统(2)的随机持久性。

定义 2 [11]: 对随机系统(2), 若任意初始值 $X_0 \in \mathbb{R}_+^n$, 其解 $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ 满足

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} X_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_i(t) < \infty \quad \text{a.s., } i = 1, 2, \dots, n.$$

则称该随机系统是几乎必然随机持久的。

引理 2 [11] 设 $A(t)$ 和 $U(t)$ 是两个连续的适应递增过程 ($A(0) = U(0) = 0$ 几乎必然成立), $M(t)$ 是一个实值连续局部鞅 ($M(0) = 0$, $\mathbb{E}[M(t)] = 0$)。定义非负过程 $X(t) = X_0 + A(t) - U(t) + M(t)$ (X_0 为非负随机变量)。若 $X(t)$ 非负, 则

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) < \infty \right\} \subset \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) < \infty \right\} \cap \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) < \infty \right\} \quad \text{a.s.}$$

定理 3 设初始值 $X(0) = X_0 > 0$ 。若参数满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (a_{ij}(t)) > 0, (1 \leq i, j \leq n)$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (A - \sigma_n^2(t) - b_n(t)) > 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} (b_i(t) - \sigma_i^2(t)) > 0, (1 \leq i \leq n-1), \quad \text{其中 } \sum_{j=1}^{n-1} \hat{a}_{nj}(t+T) \hat{D}_i = A > 0,$$

$0 < \hat{D}_i = \min_{1 \leq l \leq n} X_l(t+T)$, 则系统(2)的解 $X(t)$ 几乎必然具有随机持久性, 即

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} X_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_i(t) < \infty \quad \text{a.s.}$$

证明: 由 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (b_i(t) - \sigma_i^2(t)) > 0$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} (A - \sigma_n^2(t) - b_n(t)) > 0$, 和 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (a_{ij}(t)) > 0$, 由极限的定义可知: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 使得当 $t \geq T$ 时, 有 $b(t+T) - \sigma^2(t+T) > \varepsilon > 0$, $A - \sigma_n^2(t+T) - b_n(t+T) > \varepsilon > 0$ 和 $a_{ij}(t+T) > \varepsilon > 0$. 通过时间变换, 可得

$$\begin{cases} d\tilde{X}_n(t) = \tilde{X}_n(t) \left[-b_n(t+T) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t+T) \tilde{X}_j(t) - a_{nn}(t+T) \tilde{X}_n(t) \right] dt - \sigma_n(t+T) \tilde{X}_n(t) d\tilde{B}_n(t), \\ d\tilde{X}_i(t) = \tilde{X}_i(t) \left[b_i(t+T) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t+T) \tilde{X}_j(t) \right] dt + \sigma_i(t+T) \tilde{X}_i(t) d\tilde{B}_i(t) \quad (1 \leq i \leq n-1), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\tilde{X}(t) = X(t+T)$, $\tilde{B}_i(t+T) = B_i(t+T) - B_i(T)$. 显然 $\tilde{B}_i(t)$ 是一个具有关于新滤波的性质布朗运动。

(1) 首先证明 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) < \infty$ a.s., $(1 \leq i \leq n)$. 由(7)可知:

$$d\tilde{X}_i(t) = \tilde{X}_i(t) \left[b_i(t+T) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t+T) \tilde{X}_j(t) \right] dt + \sigma_i(t+T) \tilde{X}_i(t) d\tilde{B}_i(t) \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

设函数 $f(t, \tilde{X}) = e^t \tilde{X}_i(t)$, 根据 Itô 公式得:

$$d(e^t \tilde{X}_i(t)) = e^t \tilde{X}_i(t) dt + e^t \left[\tilde{X}_i(t) \left(b_i(t+T) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t+T) \tilde{X}_j(t) \right) dt + \sigma_i(t+T) \tilde{X}_i(t) d\tilde{B}_i(t) \right].$$

积分化简得

$$e^t \tilde{X}_i(t) \leq \tilde{X}_i(0) + \int_0^t e^s \left[(b_i(s+T) + 1) \tilde{X}_i(s) - a_{ii}(s+T) \tilde{X}_i^2(s) \right] ds + M_i(t),$$

其中 $M_i(t) = \int_0^t \sigma_i(s+T) e^s \tilde{X}_i(s) d\tilde{B}_i(s)$. 因而有

$$e^t \tilde{X}_i(t) \leq \tilde{X}_i(0) + C(e^t - 1) + M_i(t).$$

两边除以 e^t 可得

$$\tilde{X}_i(t) \leq \tilde{X}_i(0) e^{-t} + C(1 - e^{-t}) + M_i(t) e^{-t}.$$

可得

$$X_i(t) \leq X_i(0) + C + M_i(t).$$

记 $Z_i(t) = \tilde{X}_i(0) + C + M_i(t)$, 由引理 2 得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} Z_i(t) < \infty \text{ a.s. } (1 \leq i \leq n-1). \quad (8)$$

由(7)可知:

$$d\tilde{X}_n(t) = \tilde{X}_n(t) \left[-b_n(t+T) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t+T) \tilde{X}_j(t) - a_{nn}(t+T) \tilde{X}_n(t) \right] dt - \sigma_n(t+T) \tilde{X}_n(t) d\tilde{B}_n(t),$$

应用 Itô 公式到 $e^t X_n(t)$ 可得

$$d(e^t \tilde{X}_n(t)) = e^t \tilde{X}_n(t) \left[-b_n(t+T) + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t+T) \tilde{X}_j(t) - a_{nn}(t+T) \tilde{X}_n(t) \right] dt + \sigma_n(t+T) e^t \tilde{X}_n(t) d\tilde{B}_n(t).$$

积分得

$$e^t \tilde{X}_n(t) = \tilde{X}_n(0) + \int_0^t e^s \tilde{X}_n(s) \left[-b_n(s+T) + 1 + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(s+T) \tilde{X}_j(s) - a_{nn}(s+T) \tilde{X}_n(s) \right] ds + M_n(t).$$

由(8)可知, $\tilde{X}_i(t) (1 \leq i \leq n-1)$ 有上界, 从而令 $\sum_{j=1}^{n-1} \vee a_{ij} \tilde{X}_j = B$, 因此有

$$\tilde{X}_n(t) \leq \tilde{X}_n(0)e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} \left[\tilde{X}_n(s) \cdot B - \hat{a}_{nn} \tilde{X}_n^2(s) \right] ds + e^{-t} M_n(t).$$

从而有

$$\tilde{X}_n(t) \leq \tilde{X}_n(0) + B' + M_n(t), \quad (9)$$

其中 B, B' 都是正常数。对(8)应用引理 2 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_n(t) < \infty \quad \text{a.s.} \quad (10)$$

结合(8), (10)对 $(1 \leq i \leq n)$ 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) < \infty \quad \text{a.s.} \quad (11)$$

(2) 再证 $\liminf \tilde{X}_i(t) > 0$, a.s.

对系统(3)的第二个方程进行变形: 令 $y_i(t) = \tilde{X}_i(t)^{-1}$, $\tilde{X}_i(t) > 0, (1 \leq i \leq n-1)$, $f(t, y) = e^{ct} \sum_{i=1}^{n-1} y_i(t)$,

对 $f(t, y)$ 应用 Itô 公式得

$$df = e^{ct} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(c - b_i(t+T) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t+T) y_j^{-1}(t) + \sigma_i^2(t+T) \right) y_i(t) dt - \sigma_i(t+T) y_i(t) d\tilde{B}_i(t) \right].$$

对上式从 0 到 t 积分

$$\begin{aligned} \int_0^t df &= \int_0^t e^{cs} \sum_{i=1}^{n-1} y_i(s) \left[-\left(b_i(s+T) - \sigma_i^2(s+T) - c \right) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(s+T) y_j^{-1}(s) \right] ds \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t e^{cs} \sigma_i(t+T) y_i(s) d\tilde{B}_i(s). \end{aligned}$$

其中 c 取充分小的正常数, $cM_i(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t \sigma_i(s+T) e^{cs} y_i(s) d\tilde{B}_i(s)$, 由

$\liminf_{t \rightarrow \infty} (b_i(t) - \sigma_i^2(t)) > 0, (1 \leq i \leq n-1)$, 因而有

$$\begin{aligned} \int_0^t df &\leq \int_0^t e^{cs} \sum_{i=1}^{n-1} y_i(s) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(s+T) y_j^{-1}(s) \right] ds - cM_i(t) \\ &\leq \int_0^t e^{cs} \sum_{i=1}^n y_i(s) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(s+T) y_j^{-1}(s) \right] ds - cM_i(t) \\ &\leq \int_0^t e^{cs} \sum_{i=1}^n y_i(s) \left[\sum_{j=1}^n \vee a_{ij} y_j^{-1}(s) \right] ds - cM_i(t). \end{aligned}$$

由 $e^{ct} y_i(t) < e^{ct} \sum_{i=1}^{n-1} y_i(t)$ 化简得

$$y_i(t) \leq y_i(0)e^{-ct} + \int_0^t e^{c(s-t)} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vee a_{ij} ds - ce^{-t} M_i(t).$$

可得

$$y_i(t) \leq y_i(0) + C - ce^{-t} M_i(t).$$

其中 C 为正常数, 记 $Y_i(t) = y_i(0) + C - ce^{-t} M_i(t)$, 由引理 2 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} Y_i(t) < \infty. \text{ a.s.}$$

从而

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{y_i(t)} \geq \frac{1}{\limsup_{t \rightarrow \infty} y_i(t)} > 0. \text{ a.s.} \quad (12)$$

对(7)第一个方程: 构造倒数辅助函数: $y_n(t) = \tilde{X}_n(t)^{-1}$, 对 $g(t, y_n) = e^{c_n t} y_n(t)$ 应用 Itô 公式, 推导得微分形式:

$$\begin{aligned} d(e^{c_n t} y_n(t)) &= e^{c_n t} y_n(t) \cdot \left[c_n + b_n(t+T) - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t+T) y_j(t)^{-1} + a_{nn}(t+T) y_n(t)^{-1} + \sigma_n(t+T)^2 \right] dt \\ &\quad - e^{c_n t} \sigma_n(t+T) y_n(t) d\tilde{B}_n(t). \end{aligned}$$

由(8), (12)可知, $\tilde{X}_i(t) (1 \leq i \leq n-1)$ 有界, 因此存在常数 $\hat{D}_i > 0$, 有 $y_i(t)^{-1} = \tilde{X}_i(t) \geq \hat{D}_i$. 令 $\sum_{l=1}^{n-1} \hat{a}_{nl}(t+T) \hat{D}_l = A$, 对 $d(e^{c_n t} y_n(t))$ 积分, 并化简得

$$e^{c_n t} y_n(t) \leq y_n(0) + \int_0^t e^{c_n s} y_n(s) \cdot \left[c_n + b_n(s+T) - A + a_{nn}(s+T) y_n(s)^{-1} + \sigma_n(s+T)^2 \right] ds - c_n M_n(t).$$

取 c_n 为足够小的正常数, 由 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (A - \sigma_n^2(t) - b_n(t)) > 0$, 从而有 $e^{c_n t} y_n(t) \leq y_n(0) + \int_0^t e^{c_n s} \hat{a}_{nn} ds - c_n M_n(t)$.

因此可得

$$y_n(t) \leq y_n(0) + C' - c_n M_n(t),$$

其中 C_2, C' 为正常数, 由引理 2 可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y_n(t) < \infty \text{ a.s.} \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_n(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n(t)} > 0. \text{ a.s.} \quad (13)$$

结合(12), (13)对 $(1 \leq i \leq n)$ 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) > 0. \quad (14)$$

由(11)、(14)可得 $0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) < \infty$ a.s., 而 $\tilde{X}_i(t) = X_i(t+T)$, 因而有

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} X_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_i(t) < \infty \text{ a.s.}$$

证毕。

2.4. 结论延拓

为更真实反映自然种群在复杂环境中的动态平衡与波动和刻画种内或种间非线性竞争, 下面将随机模型(2)拓展到相应的 Gilpin-Ayala 竞争随机模型:

$$\begin{cases} dX_n(t) = X_n(t) \left[-b_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) X_j^\theta(t) - a_{nn}(t) X_n^\theta(t) \right] dt - \sigma_n(t) X_n(t) dB_n(t), \\ dX_i(t) = X_i(t) \left[b_i(t) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) X_j^\theta(t) \right] dt + \sigma_i(t) X_i(t) dB_i(t) \quad (1 \leq i \leq n-1). \end{cases} \quad (15)$$

其中 θ 为正常数, 参数条件同随机模型(2)一致, 若该模型的参数满足相关条件, 可得以下定理。

定理 4 设初始值 $X(0) = X_0 > 0$ 。若参数满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (a_{ij}(t)) > 0$,

$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(A(\theta) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_n^2(t) - b_n(t) \right) > 0$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_i(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_i^2(t) \right) > 0, (1 \leq i \leq n-1)$, 其中

$\sum_{j=1}^{n-1} \hat{a}_{nj}(t+T) \hat{D}_i^\theta = A(\theta) > 0$, $0 < \hat{D}_i = \min_{1 \leq i \leq n} X_i(t+T)$ 。则系统(15)的解 $X(t)$ 几乎必然具有随机持久性, 即

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} X_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_i(t) < \infty \quad \text{a.s.}$$

证明: 和定理 3 类似, 通过时间变换可得到:

$$\begin{cases} d\tilde{X}_n(t) = \tilde{X}_n(t) \left[-b_n(t+T) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t+T) \tilde{X}_j^\theta(t) - a_{nn}(t+T) \tilde{X}_n^\theta(t) \right] dt - \sigma_n(t) \tilde{X}_n(t) d\tilde{B}_n(t), \\ d\tilde{X}_i(t) = \tilde{X}_i(t) \left[b_i(t+T) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t+T) \tilde{X}_j^\theta(t) \right] dt + \sigma_i(t+T) \tilde{X}_i(t) d\tilde{B}_i(t) \quad (1 \leq i \leq n-1). \end{cases} \quad (16)$$

(1) 首先证明 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) < \infty$ a.s., $(1 \leq i \leq n)$ 。由(16)可知:

$$d\tilde{X}_i(t) = \tilde{X}_i(t) \left[b_i(t+T) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(t+T) \tilde{X}_j^\theta(t) \right] dt + \sigma_i(t+T) \tilde{X}_i(t) d\tilde{B}_i(t) \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

设函数 $f(t, \tilde{X}) = e^t \tilde{X}_i^\theta(t)$, 根据 Itô 公式得:

$$\begin{aligned} d(e^t \tilde{X}_i^\theta(t)) &= e^t \tilde{X}_i^\theta(t) dt + e^t \left[\tilde{X}_i^\theta(t) \left(\theta b_i(t+T) + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \sigma_i^2(t+T) - \theta \sum_{j=1}^n a_{ij}(t+T) \tilde{X}_j^\theta(t) \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \theta \sigma_i(t+T) \tilde{X}_i^\theta(t) d\tilde{B}_i(t) \right] \\ &\leq e^t \left[\tilde{X}_i^\theta(t) \left(1 + \theta b_i(t+T) + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \sigma_i^2(t+T) - \theta a_{ii}(t+T) \tilde{X}_i^\theta(t) \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \theta \sigma_i(t+T) \tilde{X}_i^\theta(t) d\tilde{B}_i(t) \right]. \end{aligned}$$

则有

$$d(e^t \tilde{X}_i^\theta(t)) \leq e^t K + e^t \theta \sigma_i(t+T) \tilde{X}_i^\theta(t) d\tilde{B}_i(t).$$

积分化简得

$$\begin{aligned} e^t \tilde{X}_i^\theta(t) &\leq \tilde{X}_i^\theta(0) + \int_0^t e^s K ds + \int_0^t e^s \theta \sigma_i(s+T) \tilde{X}_i^\theta(s) d\tilde{B}_i(s) \\ &= \tilde{X}_i^\theta(0) + (e^t - 1)K + \int_0^t e^s \theta \sigma_i(s+T) \tilde{X}_i^\theta(s) d\tilde{B}_i(s). \end{aligned}$$

两边除以 e^t 可得

$$\tilde{X}_i^\theta(t) \leq \tilde{X}_i^\theta(0) e^{-t} + K(1 - e^{-t}) + \int_0^t e^{s-t} \theta \sigma_i(s+T) \tilde{X}_i^\theta(s) d\tilde{B}_i(s),$$

可得

$$\tilde{X}_i^\theta(t) \leq \tilde{X}_i^\theta(0) + K + \int_0^t e^{s-t} \theta \sigma_i(s+T) \tilde{X}_i^\theta(s) d\tilde{B}_i(s).$$

记 $Z_i^\theta(t) = \tilde{X}_i^\theta(0) + K + \int_0^t e^{s-t} \theta \sigma_i(s+T) \tilde{X}_i^\theta(s) d\tilde{B}_i(s)$, 由引理 2 得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i^\theta(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} Z_i^\theta(t) < \infty \text{ a.s. } (1 \leq i \leq n-1).$$

从而有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) < \infty \text{ a.s. } (1 \leq i \leq n-1). \quad (17)$$

由(16)可知

$$d\tilde{X}_n(t) = \tilde{X}_n(t) \left[-b_n(t+T) + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t+T) \tilde{X}_j^\theta(t) - a_{nn}(t+T) \tilde{X}_n^\theta(t) \right] dt - \sigma_n(t) \tilde{X}_n(t) d\tilde{B}_n(t),$$

应用 Itô 公式到 $e^t \tilde{X}_n^\theta(t)$:

$$\begin{aligned} d(e^t \tilde{X}_n^\theta(t)) &= e^t \tilde{X}_n^\theta(t) \left[-\theta b_n(t+T) + 1 + \theta \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t+T) \tilde{X}_j^\theta(t) - \theta a_{nn}(t+T) \tilde{X}_n^\theta(t) + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \sigma_n^2(t+T) \right] dt \\ &\quad + \theta \sigma_n(t+T) e^t \tilde{X}_n^\theta(t) d\tilde{B}_n \\ &\leq e^t \tilde{X}_n^\theta(t) \left[-\theta b_n(t+T) + 1 + \theta \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}^\vee(t+T) \tilde{X}_j^\theta(t) - \theta a_{nn}(t+T) \tilde{X}_n^\theta(t) + \frac{\theta(\theta-1)}{2} \sigma_n^2(t+T) \right] dt \\ &\quad + \theta \sigma_n(t+T) e^t \tilde{X}_n^\theta(t) d\tilde{B}_n. \end{aligned}$$

由(17)可知, $\tilde{X}_i^\theta(t) (1 \leq i \leq n-1)$ 有上界, 从而令 $\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}^\vee \tilde{X}_j^\theta = B_1$, 因此积分化简得

$$\tilde{X}_n^\theta(t) \leq \tilde{X}_n^\theta(0) e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} \left[\tilde{X}_n^\theta(s) \cdot B_1 - \theta a_{nn}^\wedge \tilde{X}_n^{2\theta}(s) \right] ds + \int_0^t \theta \sigma_n(s+T) e^{s-t} \tilde{X}_n^\theta(s) d\tilde{B}_n(s).$$

因此有

$$\tilde{X}_n^\theta(t) \leq \tilde{X}_n^\theta(0) + B_1' + \int_0^t \theta \sigma_n(s+T) e^{s-t} \tilde{X}_n^\theta(s) d\tilde{B}_n(s), \quad (18)$$

其中 B_1, B_1' 都是正常数. 对(18)应用引理 2 可得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_n^\theta(t) < \infty$ a.s. 因此有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_n(t) < \infty \text{ a.s.} \quad (19)$$

结合(17), (19)对 $(1 \leq i \leq n)$ 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) < \infty \text{ a.s.} \quad (20)$$

(2) 再证 $\liminf X_i(t) > 0$ a.s.

对(16)的第二个方程进行变形: 令 $y_i^\theta(t) = \tilde{X}_i(t)^{-\theta}$, $\tilde{X}_i(t) > 0, (1 \leq i \leq n-1)$, $f(t, y) = e^{ct} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^\theta(t)$, 对 $f(t, y)$ 应用 Itô 公式得

$$df = e^{ct} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\left(c - \theta b_i(t+T) + \theta \sum_{j=1}^n a_{ij}(t+T) y_j^{-\theta}(t) + \frac{\theta(\theta+1)}{2} \sigma_i^2(t+T) \right) y_i^\theta(t) dt - \theta \sigma_i(t+T) y_i^\theta(t) d\tilde{B}_i(t) \right].$$

对上式从 0 到 t 积分:

$$\begin{aligned} \int_0^t df &= \int_0^t e^{cs} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^\theta(s) \left[-\left(\theta b_i(s+T) - \frac{\theta(\theta+1)}{2} \sigma_i^2(s+T) - c \right) + \theta \sum_{j=1}^n a_{ij}(s+T) y_j^{-\theta}(s) \right] ds \\ &\quad - \theta \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t e^{cs} \sigma_i(s+T) y_i^\theta(s) d\tilde{B}_i(s). \end{aligned}$$

其中 c 取充分小的正常数, $M'_i(t) = \theta \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t e^{cs} \sigma_i(s+T) y_i^\theta(s) d\tilde{B}_i(s)$, 由

$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_i(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_i^2(t) \right) > 0, (1 \leq i \leq n-1)$ 。因而有

$$\begin{aligned} \int_0^t df &\leq \int_0^t e^{cs} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^\theta(s) \left[\theta \sum_{j=1}^n a_{ij}(s+T) y_j^{-\theta}(s) \right] ds - M'_i(t) \\ &\leq \int_0^t e^{cs} \sum_{i=1}^n y_i^\theta(s) \left[\theta \sum_{j=1}^n a_{ij}(s+T) y_j^{-\theta}(s) \right] ds - M'_i(t) \\ &\leq \int_0^t e^{cs} \sum_{i=1}^n y_i^\theta(s) \left[\theta \sum_{j=1}^n \vee a_{ij} y_j^{-\theta}(s) \right] ds - M'_i(t). \end{aligned}$$

由 $e^{ct} y_i^\theta(t) < e^{ct} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^\theta(t)$ 化简得

$$y_i^\theta(t) \leq y_i^\theta(0) e^{-ct} + \int_0^t e^{c(s-t)} \cdot \theta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vee a_{ij} ds - e^{-ct} M'_i(t). \quad (21)$$

可得

$$y_i^\theta(t) \leq y_i^\theta(0) + C - e^{-ct} M'_i(t).$$

记 $Y_i^\theta(t) = y_i^\theta(0) + C - e^{-ct} M'_i(t)$, 由引理 2 可得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} y_i^\theta(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} Y_i^\theta(t) < \infty$ a.s. 从而可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i^\theta(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{y_i^\theta(t)} \geq \frac{1}{\limsup_{t \rightarrow \infty} y_i^\theta(t)} > 0 \text{ a.s.}$$

因而有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) > 0 \quad (1 \leq i \leq n-1) \text{ a.s.} \quad (22)$$

对(16)第一个方程: 构造倒数辅助函数: $y_n^\theta(t) = \tilde{X}_n(t)^{-\theta}$, 对 $g(t, y_n) = e^{c_n t} y_n^\theta(t)$ 应用 Itô 公式, 推导得微分形式:

$$\begin{aligned} d(e^{c_n t} y_n^\theta(t)) &= e^{c_n t} y_n^\theta(t) \cdot \left[c_n + \theta b_n(t+T) - \theta \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t+T) y_j^{-\theta}(t) + \theta a_{nn}(t+T) y_n^{-\theta}(t) + \frac{\theta(\theta+1)}{2} \sigma_n(t+T)^2 \right] dt \\ &\quad - e^{c_n t} \theta \sigma_n(t+T) y_n^\theta(t) d\tilde{B}_n(t). \end{aligned}$$

由(17), (22)可知, $\tilde{X}_i(t) (1 \leq i \leq n-1)$ 有界, 则存在常数 $\hat{D}_i > 0$, 有 $y_i(t)^{-1} = \tilde{X}_i(t) \geq \hat{D}_i$ 。令

$\sum_{l=1}^{n-1} \hat{a}_{nl}(t+T) \hat{D}_l^\theta = A(\theta)$, 对 $d(e^{c_n t} y_n(t))$ 从 0 到 t 积分, 并化简得

$$e^{c_n t} y_n(t) \leq y_n(0) + \int_0^t e^{c_n s} y_n^\theta(s) \cdot \left[c_n + \theta b_n(s+T) - \theta A(\theta) + \theta a_{nn}(s+T) y_n(s)^{-\theta} + \frac{\theta(\theta+1)}{2} \sigma_n(s+T)^2 \right] ds - M'_n(t).$$

取 c_n 为充分小的正常数, 记 $M'_n(t) = \int_0^t e^{c_n s} \theta \sigma_n(s+T) y_n^\theta(s) d\tilde{B}_n(s)$ 。由

$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(A(\theta) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_n^2(t) - b_n(t) \right) > 0$, 从而有

$$e^{c_n t} y_n^\theta(t) \leq y_n^\theta(0) + \int_0^t e^{c_n s} \theta \vee a_{nn}(t+T) ds - M'_n(t).$$

从而可得

$$y_n^\theta(t) \leq y_n^\theta(0) + C' - M'_n(t),$$

其中 C' 为正常数, 由引理 2 可得 $\limsup_{t \rightarrow \infty} y_n^\theta(t) < \infty$ a.s. 因此可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_n^\theta(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n^\theta(t)} > 0 \quad \text{a.s.},$$

从而有

$$\liminf \tilde{X}_n(t) > 0. \quad (23)$$

结合(22), (23)对 $(1 \leq i \leq n)$ 有

$$\liminf \tilde{X}_i(t) > 0. \quad (24)$$

由(20), (24)可得 $0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) < \infty$ a.s., 由 $\tilde{X}_i(t) = X_i(t+T)$ 因此有 $0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} X_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_i(t) < \infty$ a.s. 证毕。

至于种群的灭绝性, 本文给出简要探讨证明:

定理 5 设初始值 $X(0) = X_0 > 0$ 。若参数满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (a_{ij}(t)) > 0$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(A(\theta) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_n^2(t) - b_n(t) \right) < 0, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_i(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_i^2(t) \right) < 0, (1 \leq i \leq n-1), \quad \text{其中}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t+T) \hat{D}_i^\theta = A(\theta) > 0, \quad 0 < \hat{D}_i = \min_{1 \leq i \leq n} X_i(t+T). \quad \text{则系统(15)的解 } X(t) \text{ 依概率 1 灭绝, 即}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i(t) = 0.$$

证明: 对食饵的灭绝性, 和定理 4 的(2)再证 $\liminf X_i(t) > 0$ a.s. 证明过程类似, 且函数选取都不变,

$$\text{令 } -\lambda = c = \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_i(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_i^2(t) \right) < 0, (1 \leq i \leq n-1) \text{ 可同理得(21), 因而有}$$

$$y_i^\theta(t) \leq y_i^\theta(0) e^{\lambda t} + \frac{\theta K (e^{\lambda t} - 1)}{\lambda} - e^{\lambda t} M'_i(t) \leq y_i^\theta(0) e^{\lambda t} + \frac{\theta K (e^{\lambda t})}{\lambda} - e^{\lambda t} M'_i(t).$$

其中 $K = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^\vee$, 由 $y_i^\theta(t) = \tilde{X}_i(t)^\theta > 0$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i^\theta(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_i(t) = 0$ 。 $(1 \leq i \leq n-1)$, 从而食饵种群依概率 1 灭绝, 从生态系统的角度出发, 若所有食饵灭绝, 则捕食者会因失去食物来源而导致灭绝。对捕食者自身的灭绝性, 同理和定理 4 的(2)再证 $\liminf X_i(t) > 0$ a.s. 证明过程类似, 且函数选取都不变,

$$\text{令 } c_n = \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(A(\theta) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_n^2(t) - b_n(t) \right) < 0, \text{ 最终可得 } \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{X}_n(t) = 0. \text{ 证毕}$$

2.5. 数值模拟

本节对系统(2)和(15)通过数值模拟来说明白噪声的影响。

对系统(15), 取适当的参数满足定理 4 的条件(见表 1、表 2), 通过 MATLAB 数值仿真可得该系统的随机持久性(如图 1 和图 2): $0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} X_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_i(t) < \infty$ 几乎必然成立。

对线性系统(2), 参数条件满足定理 3 的条件(见表 3), 通过 MATLAB 数值仿真可得该系统的随机持

久性(如图 3 和图 4): $0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} X_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_i(t) < \infty$ 几乎必然成立。

对系统(15), 参数条件满足定理 4 的条件(见表 4), 通过 MATLAB 数值仿真可得该系统的随机持久性(如图 5 和图 6): $0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} X_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} X_i(t) < \infty$ 几乎必然成立。

Table 1. Model parameter settings
表 1. 模型参数设置

参数类型	表达式	说明
$b(t)$: 内禀增长率/死亡率	$b_1(t) = 0.9 + 0.05 \sin(0.06t) + 0.05 \cos(\sqrt{3} \cdot 0.04t)$	X_1 的增长率
	$b_2(t) = 0.7 + 0.08 \sin(0.09t) + 0.06 \cos(\sqrt{3} \cdot 0.05t)$	X_2 的增长率
	$b_3(t) = 0.15 + 0.07 \sin(0.08t) + 0.03 \cos(\sqrt{5} \cdot 0.04t)$	X_3 死亡率
$A_1(t)$: 交互系数	$a_{11}(t) = 0.3 + 0.03 \sin(0.05t)$	X_1 的交互系数
	$a_{12}(t) = 0.06 + 0.02 \sin(0.03t)$	
	$a_{13}(t) = 0.18 + 0.04 \sin(0.05t)$	
$A_2(t)$: 交互系数	$a_{21}(t) = 0.08 + 0.02 \sin(0.03t)$	X_2 的交互系数
	$a_{22}(t) = 0.15 + 0.03 \sin(0.06t)$	
	$a_{23}(t) = 0.21 + 0.02 \sin(0.04t)$	
$A_3(t)$: 交互系数	$a_{31}(t) = 0.16 + 0.04 \sin(0.05t)$	X_3 的交互系数
	$a_{32}(t) = 0.2 + 0.02 \sin(0.04t)$	
	$a_{33}(t) = 0.25 + 0.03 \sin(0.05t)$	
σ_i : 噪声强度	$\sigma_1(t) = 0.08 + 0.01 \sin(0.08t) + 0.01 \cos(\sqrt{3} \cdot 0.06t)$	
	$\sigma_2(t) = 0.08 + 0.01 \sin(0.08t) + 0.01 \cos(\sqrt{3} \cdot 0.06t)$	
	$\sigma_3(t) = 0.08 + 0.01 \sin(0.08t) + 0.01 \cos(\sqrt{3} \cdot 0.06t)$	

Table 2. $\theta = 0.5$ test system result data
表 2. $\theta = 0.5$ 试验系统结果数据

$X_1(0) = 2.5, X_2(0) = 2.5, X_3(0) = 1$	$\Delta t = 0.01$	$\theta = 0.5$
食饵 1 条件	$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_1(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_1^2(t) \right)$	0.7928
食饵 2 条件	$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_2(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_2^2(t) \right)$	0.5534
食饵种群下确界最小值之和	$A(\theta = 0.5)$	1.4373
捕食者条件	$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(A(\theta) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_n^2(t) - b_n(t) \right)$	0.1743

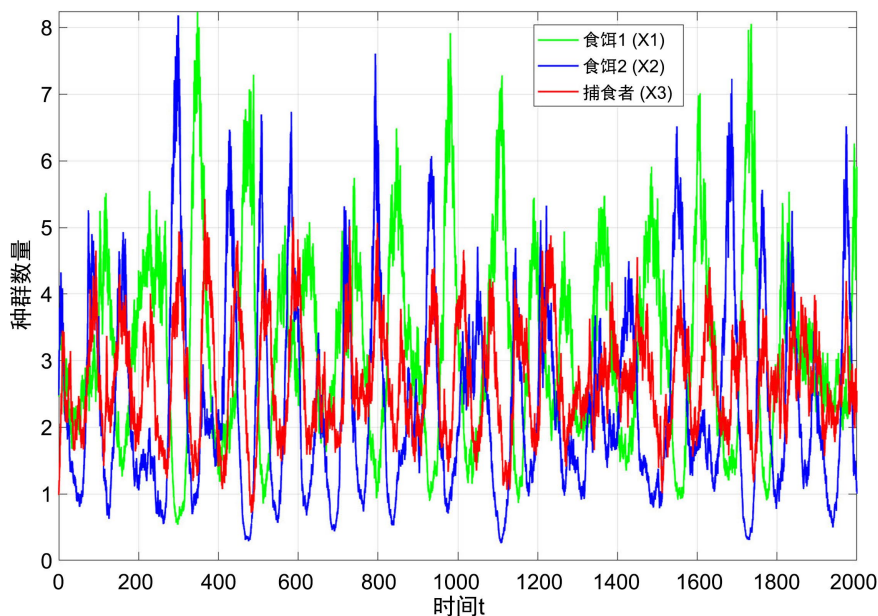


Figure 1. $\theta = 0.5$ numerical simulation of stochastic persistence of a three-population random solution
图 1. $\theta = 0.5$ 时三种群随机解的随机持久性数值模拟图

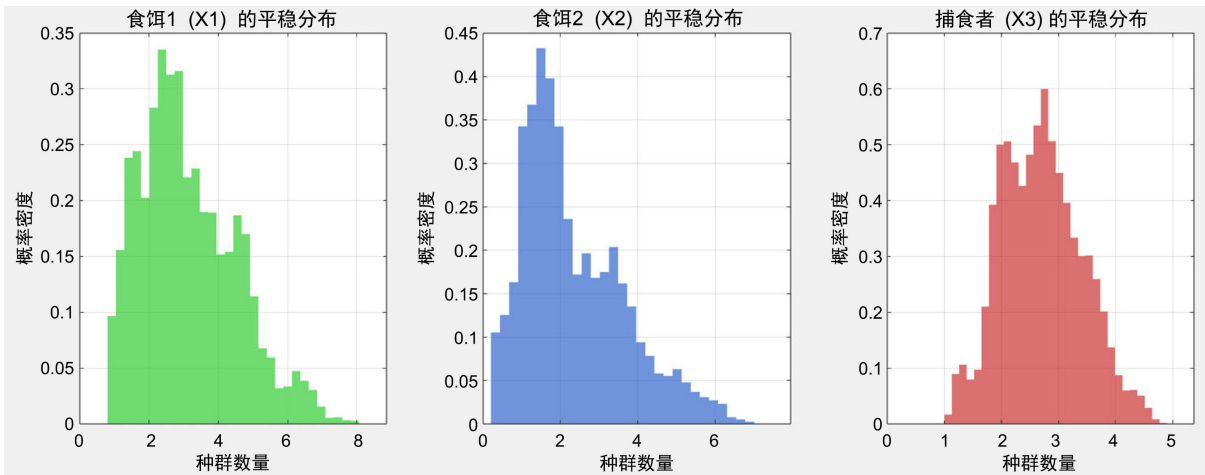


Figure 2. $\theta = 0.5$ stationary distribution histogram of the three populations
图 2. $\theta = 0.5$ 时三种群平稳分布直方图

Table 3. $\theta = 1$ test system result data
表 3. $\theta = 1$ 试验系统结果数据

$X_1(0) = 2.5, X_2(0) = 2.5, X_3(0) = 1$	$\Delta t = 0.01$	$\theta = 1$
食饵 1 条件	$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_1(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_1^2(t) \right)$	0.7903
食饵 2 条件	$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_2(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_2^2(t) \right)$	0.5509
食饵种群下确界最小值之和	$A(\theta = 1)$	1.1759
捕食者条件	$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(A(\theta) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_n^2(t) - b_n(t) \right)$	0.0933

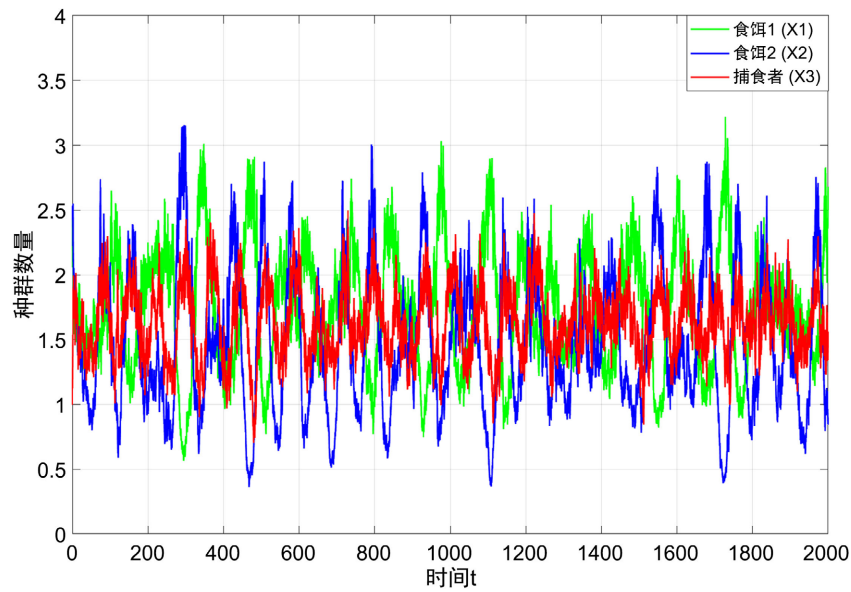


Figure 3. $\theta = 1$ numerical simulation of stochastic persistence of a three-population random solution
图 3. $\theta = 1$ 时三种群随机解的随机持久性数值模拟图

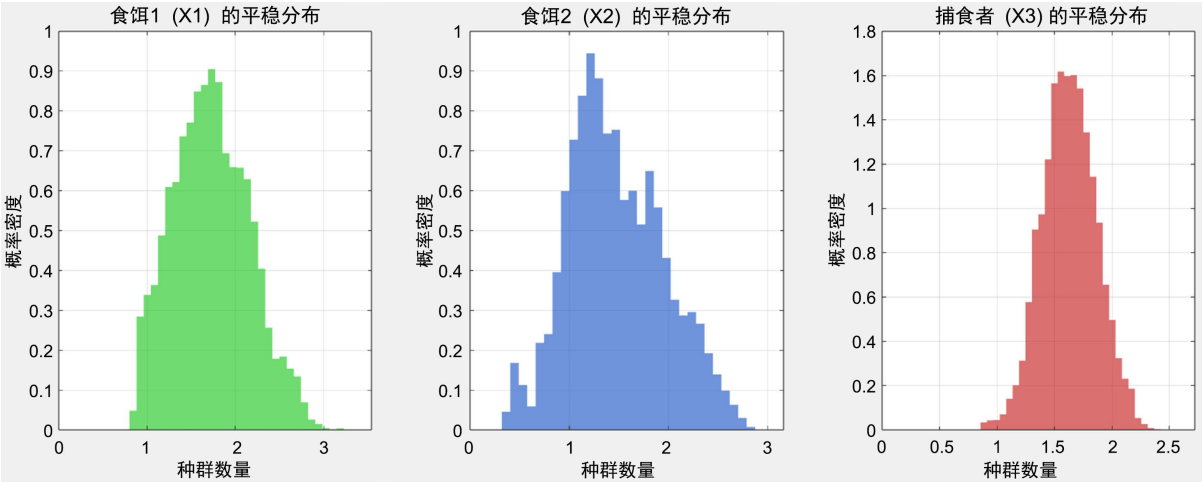


Figure 4. $\theta = 1$ stationary distribution histogram of the three populations
图 4. $\theta = 1$ 时三种群平稳分布直方图

Table 4. $\theta = 1.5$ test system result data
表 4. $\theta = 1.5$ 试验系统结果数据

$X_1(0) = 2.5, X_2(0) = 2.5, X_3(0) = 1$	$\Delta t = 0.01$	$\theta = 1.5$
食饵 1 条件	$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_1(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_1^2(t) \right)$	0.7878
食饵 2 条件	$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(b_2(t) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_2^2(t) \right)$	0.5484
食饵种群下确界最小值之和	$A(\theta = 1.5)$	0.9311
捕食者条件	$\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(A(\theta) - \frac{\theta+1}{2} \sigma_n^2(t) - b_n(t) \right)$	0.0174

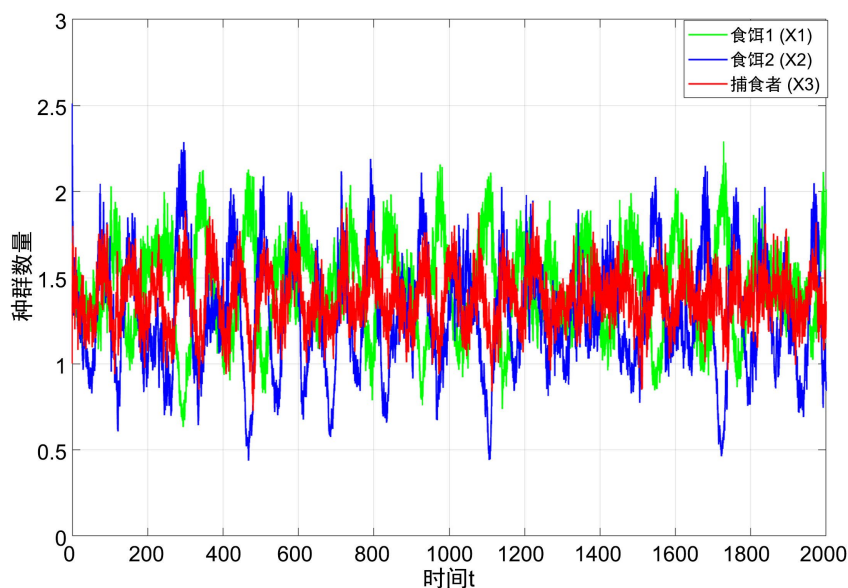


Figure 5. $\theta = 1.5$ numerical simulation of stochastic persistence of a three-population random solution

图 5. $\theta = 1.5$ 时三种群随机解的数值模拟图

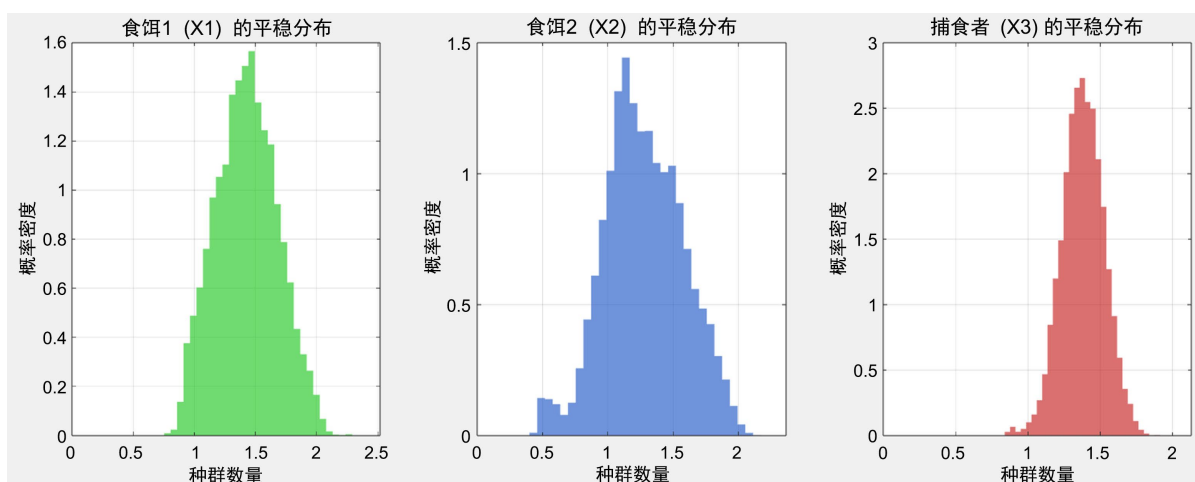


Figure 6. $\theta = 1.5$ stationary distribution histogram of the three populations

图 6. $\theta = 1.5$ 时三种群平稳分布直方图

参考文献

- [1] 李晓艳, 姚频. 一类非同步扩散的 n 种群捕食竞争系统的持久性[J]. 兵器装备工程学报, 2010, 31(6): 142-144.
- [2] 施春玲, 陈江彬. 一类多种群非线性捕食-竞争系统的持久性[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2013, 41(2): 137-142+147.
- [3] 王丽丽, 程永玲. 具有反馈控制的多种群捕食-竞争系统的持久性[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2015, 36(6): 632-635+641.
- [4] Chen, Y. (2016) Dynamics of Prey-Predator n -Species Models with Density Dependent Diffusion. *Computers & Mathematics with Applications*, **72**, 1727-1742. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.07.034>
- [5] Tuerxun, N. and Teng, Z. (2022) Global Dynamics in Stochastic n -Species Food Chain Systems with White Noise and Lévy Jumps. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **45**, 5184-5214. <https://doi.org/10.1002/mma.8101>
- [6] Jiang, Z., Muhammadhaji, A., Hu, C. and Teng, Z. (2023) Dynamics of N -Species Cooperation Models with Feedback Controls and Continuous Delays. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **22**, 1-12.

- <https://doi.org/10.1007/s12346-023-00742-x>
- [7] 李晓艳. 一类 n 种群捕食竞争系统概周期解的全局稳定性[J]. 兵器装备工程学报, 2011, 32(2): 148-150.
 - [8] Seno, H. (2025) Persistent Prey Species in the Lotka-Volterra Apparent Competition System with a Single Shared Predator. *Journal of Mathematical Biology*, **90**, 1-39. <https://doi.org/10.1007/s00285-025-02184-2>
 - [9] 于勇, 于红. 多种群捕食-竞争系统的持久性和稳定性[J]. 攀枝花学院学报, 2008(6): 30-33.
 - [10] Li, X. and Mao, X. (2009) Population Dynamical Behavior of Non-Autonomous Lotka-Volterra Competitive System with Random Perturbation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, **24**, 523-545. <https://doi.org/10.3934/dcds.2009.24.523>
 - [11] Lv, J. and Wang, K. (2015) Almost Sure Permanence of Stochastic Single Species Models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **422**, 675-683. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.09.017>