

# Allee效应下捕食者食饵模型的Hopf分支

程梦瑶, 马永峰

大连交通大学基础部理学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年12月31日; 录用日期: 2026年2月15日; 发布日期: 2026年3月2日

## 摘要

为了修正传统捕食者食饵模型的缺陷, 解释小种群灭绝机制, 提升模型解释和预测能力, 本文在高鹤等人的研究基础上建立了一个具有Allee效应的捕食者食饵模型。通过求解模型的平衡点, 分析三个边界平衡点以及正平衡点的稳定性和Hopf分支的存在性, 利用数值模拟验证理论分析的结果, 探索Allee效应对种群动态行为的影响。

## 关键词

Allee效应, Hopf分支, 稳定性

# Hopf Bifurcation of Predator-Prey Model with Allee Effect

Mengyao Cheng, Yongfeng Ma

College of Science, Department of Foundational Courses, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: December 31, 2025; accepted: February 15, 2026; published: March 2, 2026

## Abstract

To address the shortcomings of traditional predator-prey models, explain the mechanism of small population extinction, and enhance the explanatory and predictive capabilities of the models, this paper establishes a predator-prey model with Allee effect based on the research of Gao He *et al.* By solving the equilibrium points of the model, analyzing the stability of the three boundary equilibrium points and the positive equilibrium point, as well as the existence of Hopf bifurcation, numerical simulations are used to verify the theoretical analysis results, and the influence of Allee effect on the dynamic behavior of the population is explored.

## Keywords

Allee Effect, Hopf Bifurcation, Stability



## 1. 引言

Allee 效应[1]是生态学和保护生物学中的重要概念, 由美国生态学家 Warder Clyde Allee 于 20 世纪 30 年代提出。它描述了种群密度与个体适合度(如生存、繁殖能力)之间的非线性关系, 尤其强调种群密度过低时对个体和种群的负面影响, 当种群密度低于某一阈值时, 个体的生存或繁殖成功率随密度降低而下降, 导致种群增长受阻甚至衰退。目前对于 Allee 效应的研究相对较少[2]-[4], 本文在高鹤等人[5]的研究基础上将 Allee 效应引入捕食者食饵模型, 进一步拓展了该模型在种群生态学中的应用范围。通过深入研究模型的动态行为, 为捕食者食饵模型理论增添了新的内容, 有助于更全面、深入地理解生态系统中种群间的复杂相互作用关系, 帮助生态系统管理者更好地理解生态系统中种群动态变化的内在规律, 特别是在存在 Allee 效应的情况下, 为制定合理的生态保护策略提供重要参考。

## 2. 模型建立

本文在高鹤等人[5]的研究基础上, 给系统添加一个 Allee 效应项, 建立起如下捕食者食饵模型:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) (x(t) - L) - \frac{ex(t)y(t)}{1 + quM} \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{aex(t)y(t)}{1 + quM} - my(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中,  $x(t), y(t)$  分别表示食饵和捕食者的种群密度, 参数  $L, K$  满足  $K > L > 0$ , 其余参数均为正数。 $(x(t) - L)$  为系统新添加的 Allee 效应项。各参数的生物学意义如下所示:  $r$  是食饵的内禀增长率,  $K$  是食饵的环境容纳量,  $L$  是 Allee 效应阈值,  $e$  是捕食者对食饵的捕获效率,  $a$  是食饵通过捕食行为转化为捕食者繁殖的效率,  $q$  是共生种群对捕食行为的干扰强度,  $u$  是共生种群对食饵的偏好,  $M$  是共生种群的大小,  $m$  是捕食者的自然死亡率。

为了减少系统参数, 对系统做无量纲化变换[3], 令  $x_1(t) = \frac{x(t)}{K}, y_1(t) = \frac{y(t)}{rK}, t_1 = rKt$

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt_1} = x_1(t)(1 - x_1(t)) \left( x_1(t) - \frac{L}{K} \right) - \frac{ex_1(t)y_1(t)}{1 + quM} \\ \frac{dy_1(t)}{dt_1} = \frac{aex_1(t)y_1(t)}{r(1 + quM)} - \frac{m}{rK} y_1(t) \end{cases}$$

令  $L_1 = \frac{L}{K}, \alpha = \frac{e}{1 + quM}, \beta = \frac{ea}{r(1 + quM)}, m_1 = \frac{m}{rK}$ , 同时省去参数下标, 可得

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1 - x(t)) \left( x(t) - L_1 \right) - \alpha x(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \beta x(t)y(t) - m_1 y(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

此时  $0 < L_1 < 1$ , 且  $\alpha, \beta, m_1$  均为正数。满足初始条件  $x(0) > 0, y(0) > 0$ 。

### 3. 模型的基本性质

在  $R_+^2$  空间中研究系统(2.2)的基本性质, 主要探讨解的正性和一致有界性[6] [7]。

#### 3.1. 解的正性

定理 3.1: 在初始条件下, 系统(2.2)的所有解都是正的。

证明: 系统(2.2)右边  $R_+^2 = \{(x(t), y(t)): x(t) > 0, y(t) > 0\}$  上的连续光滑函数, 将系统改写成下面的积分形式

$$\begin{aligned} x(T) &= x(0) \exp\left(\int_0^T ((1-x(s))(x(s)-L) - \alpha y(s)) ds\right), \\ y(T) &= y(0) \exp\left(\int_0^T (\beta x(s) - m) ds\right). \end{aligned}$$

对任意的  $T > 0$ , 根据初始条件  $x(0) > 0, y(0) > 0$  和指数函数恒为正的基本性质, 此时系统(2.2)的解恒为正。

#### 3.2. 解的一致有界性

定理 3.2: 在初始条件下, 系统(2.2)的所有解都是一致有界的。

证明: 分析  $x(t)$  的有界性

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(1-x(t))(x(t)-L) - \alpha x(t)y(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

由定理(3.1)可知,  $x(t) > 0, y(t) > 0$ , 此时  $x(t)(1-x(t))(x(t)-L) - \alpha x(t)y(t) < x(t)(1-x(t))(x(t)-L)$ , 考虑系统

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = u(t)(1-u(t))(u(t)-L), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

当  $u(t)$  取值大于 1 且无限趋近于 1 时,  $1-u(t) < 0, u(t)-L > 0$ 。此时  $\frac{du(t)}{dt} < 0$ ,  $u(t)$  减少。因此, 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0$ , 使得当  $t \geq T_0$  时, 有  $u(t) \leq 1 + \varepsilon$ 。由比较定理[8]知, 由于  $\dot{x}(t) < \dot{u}(t)$ , 故当  $t > T_0$  时, 有  $0 < x(t) \leq 1 + \varepsilon$ 。取  $V(t) = \beta x(t) + \alpha y(t)$  作为辅助函数, 对  $V(t)$  关于  $t$  求一阶微分可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \beta \dot{x}(t) + \alpha \dot{y}(t) \\ &= \beta [x(t)(1-x(t))(x(t)-L) - \alpha x(t)y(t)] + \alpha [\beta x(t)y(t) - my(t)] \\ &= \beta x(t)(1-x(t))(x(t)-L) - \beta \alpha x(t)y(t) + \alpha \beta x(t)y(t) - \alpha my(t) \\ &= \beta x(t)(1-x(t))(x(t)-L) - \alpha my(t) \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= mV(t) + \beta x(t)(1-x(t))(x(t)-L) + m\beta x(t) \\ &= mV(t) + \beta [x(t)(1-x(t))(x(t)-L) + mx(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= mV(t) + \beta x(t) [(1-x(t))(x(t)-L) + m] \\
&= mV(t) + \beta x(t) [x(t) - L - x^2(t) + Lx(t) + m] \\
&\leq mV(t) + \beta x(t) [(1+L)x(t) + m] \\
&\leq mV(t) + \beta(1+\varepsilon) [(1+L)(1+\varepsilon) + m] \\
&\leq mV(t) + \beta(1+\varepsilon) [(1+L)(1+\varepsilon) + m(1+\varepsilon)] \\
&\leq mV(t) + \beta(1+\varepsilon)^2 [1+L+m]
\end{aligned}$$

因此, 对任意小的  $\varepsilon$ , 有

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq mV(t) + \beta(1+L+m).$$

取  $N = \beta(1+L+m)$ , 从而

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq mV(t) + N.$$

由比较定理[8]可知

$$0 < V(t) \leq \frac{N}{m}(1 + e^{-mt}) + V(0)e^{-mt}.$$

此时

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} V(t) = \frac{N}{m}.$$

因此,  $x(t), y(t)$  在  $R_+^2$  中是一致有界的。

#### 4. 平衡点的稳定性及 Hopf 分支的存在性

令系统(2.2)的右端等于零, 求解出系统的平衡点, 包括三个边界平衡点  $E_0(0,0), E_1(1,0), E_2(L,0)$  和一个正平衡点  $E_*(x_*, y_*)$ , 接下来分析各个平衡点的稳定性以及 Hopf 分支的存在性[9] [10]。

##### 4.1. 平衡点的存在性分析

求解方程组

$$\begin{cases} x(t)(1-x(t))(x(t)-L) - \alpha x(t)y(t) = 0, \\ \beta x(t)y(t) - my(t) = 0. \end{cases}$$

解上述方程组可得系统(2.2)的三个边界平衡点  $E_0(0,0), E_1(1,0), E_2(L,0)$ , 一个正平衡点  $E_*(x_*, y_*)$ , 其中  $x_* = \frac{m}{\beta}$ ,  $y_* = \frac{(\beta-m)(m-\beta L)}{\alpha\beta^2}$ 。为保证正平衡点的存在性, 取  $x_* > 0, y_* > 0$  由于  $0 < L < 1$ , 可得正平衡点的存在性条件  $\beta L < m < \beta$ 。

##### 4.2. 平衡点的稳定性及 Hopf 分支的存在性

系统(2.2)在任意平衡点处的 Jacobian 矩阵为

$$J_0 = \begin{pmatrix} (1-x)(x-L) - x(x-L) + x(1-x) - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & \beta x - m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

系统(2.2)在任一平衡点的线性化方程为

$$\begin{pmatrix} \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{dx(t)}{dt} \end{pmatrix} = J_0 \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

特征方程为  $\det(\lambda I - J_0) = 0$ , 即

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} = 0$$

系统(2.2)的特征方程可写成

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0 \quad (4.1)$$

其中  $A = a_{11} + a_{22}, B = -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}$ 。

定理 4.1: 系统(2.2)有三个边界平衡点  $E_0(0,0), E_1(1,0), E_2(L,0)$ , 当参数满足  $\beta L < m < \beta, 0 < L < 1$  且  $\alpha, \beta, m$  均为正数时,  $E_0(0,0)$  局部渐近稳定;  $E_1(1,0), E_2(L,0)$  为鞍结点, 不稳定。

证明: 首先考虑  $E_0(0,0)$  的稳定性。在  $E_0(0,0)$  处, 系统(2.2)的 Jacobian 矩阵为

$$J_0(E_0) = \begin{pmatrix} -L & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$$

此时特征方程为

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0$$

其中  $A = -L - m, B = mL$ , 当  $\beta L < m < \beta, 0 < L < 1$ , 且  $\alpha, \beta, m$  均为正数时  $A < 0, B > 0$ , 特征根均有负实部,  $E_0(0,0)$  局部渐近稳定。

其次考虑  $E_1(1,0)$  的稳定性。在  $E_1(1,0)$  处, 系统(2.2)的 Jacobian 矩阵为

$$J_0(E_1) = \begin{pmatrix} L-1 & -\alpha \\ 0 & \beta-m \end{pmatrix}$$

此时特征方程为

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0$$

其中  $A = L-1 + \beta - m, B = (L-1)(\beta-m)$ , 当  $\beta L < m < \beta, 0 < L < 1$ , 且  $\alpha, \beta, m$  均为正数时  $B < 0$ , 此时特征方程特征根一正一负,  $E_1(1,0)$  为鞍结点,  $E_1(1,0)$  不稳定。

接着考虑  $E_2(L,0)$  的稳定性。在  $E_2(L,0)$  处, 系统(2.2)的 Jacobian 矩阵为

$$J_0(E_2) = \begin{pmatrix} L(1-L) & -\alpha L \\ 0 & \beta L - m \end{pmatrix}$$

此时特征方程为

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0$$

其中  $A = L(1-L) + \beta L - m, B = (\beta L - m)L(1-L)$ , 当  $\beta L < m < \beta, 0 < L < 1$ , 且  $\alpha, \beta, m$  均为正数时  $B < 0$ , 此时特征根一正一负,  $E_2(L,0)$  为鞍结点,  $E_2(L,0)$  不稳定。

定理 4.2: 在  $\beta L < m < \beta, 0 < L < 1$  条件下, 正平衡点  $E_*(x_*, y_*)$  稳定性如下:

- 1) 当  $\Delta \geq 0, \frac{1+L}{2} < \frac{m}{\beta}$  时, 方程(4.1)的特征根均有负实部,  $E_*(x_*, y_*)$  局部渐近稳定;
- 2) 当  $\Delta \geq 0, \frac{1+L}{2} > \frac{m}{\beta}$  时, 方程(4.1)的特征根均有正实部,  $E_*(x_*, y_*)$  不稳定;

3) 当  $\Delta < 0, \frac{1+L}{2} = \frac{m}{\beta}$  时, 方程(4.1)的特征根为成对出现的纯虚根。

证明: 在正平衡点处, 有

$$J_0(E_*) = \begin{pmatrix} -\frac{m}{\beta}\left(\frac{m}{\beta}-L\right) + \frac{m}{\beta}\left(1-\frac{m}{\beta}\right) & -\alpha\frac{m}{\beta} \\ \frac{(\beta-m)(m-\beta L)}{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

此时特征方程为

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0$$

其中  $A = \frac{m}{\beta}\left(1+L-\frac{2m}{\beta}\right), B = \frac{m(\beta-m)(m-\beta L)}{\beta^2}$ , 当  $\beta L < m < \beta, 0 < L < 1$ , 且  $\alpha, \beta, m$  均为正数时,  $B > 0$  恒成立。令  $\Delta = A^2 - 4B$ , 则有

$$\Delta = \frac{m^2(1+L-\frac{2m}{\beta})^2 - 4m(\beta-m)(m-\beta L)}{\beta^2}$$

当  $\Delta \geq 0$  时, 若  $\frac{1+L}{2} < \frac{m}{\beta}$ , 则  $A < 0$ , 方程(4.1)的特征根均有负实部,  $E_*(x_*, y_*)$  局部渐近稳定; 若  $\frac{1+L}{2} > \frac{m}{\beta}$ , 则  $A > 0$ , 方程(4.1)的特征根均有正实部,  $E_*(x_*, y_*)$  不稳定。当  $\Delta < 0$  时, 若  $\frac{1+L}{2} = \frac{m}{\beta}$ , 即  $A = 0$ , 此时方程(4.1)的特征根为成对出现的纯虚根, 其中  $\omega = \sqrt{B}$ 。

接下来验证横截条件, 取  $m_* = \frac{\beta(1+L)}{2}$  作为分支参数, 则当  $m = m_*$  时, 假设  $\lambda_{1,2} = a(m) \pm ib(m)$ , 其中  $a(m) = \frac{A}{2}, b(m) = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ , 则  $\text{Re}(\lambda) = 2a(m) = A$ , 此时

$$\frac{d(\text{Re}(\lambda))}{dm} = \frac{dA}{dm} = \frac{1}{\beta}\left(1+L-\frac{4m}{\beta}\right) = -\frac{1+L}{\beta} < 0$$

即, 当  $m = m_*$  时, 满足横截条件, 系统(2.2)在  $E_*(x_*, y_*)$  处, 发生 Hopf 分支。

### 4.3. Hopf 分支方向及分支周期解的稳定性

计算一阶 Lyapunov 系数, 判断正平衡点  $E_*(x_*, y_*)$  附近极限环的稳定性。

令  $u_1 = x - x_*, u_2 = y - y_*$ , 系统(2.2)在  $E_*(x_*, y_*)$  处的泰勒展开式为:

$$\begin{cases} \frac{du_1(t)}{dt} = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \sum_{i+j \geq 2} \frac{1}{i!j!} f_{ij}^{(1)} u_1^i(t) u_2^j(t), \\ \frac{du_2(t)}{dt} = b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) + \sum_{i+j \geq 2} \frac{1}{i!j!} f_{ij}^{(2)} u_1^i(t) u_2^j(t). \end{cases} \quad (4.2)$$

其中  $a_1 = -\frac{m}{\beta}\left(\frac{m}{\beta}-L\right) + \frac{m}{\beta}\left(1-\frac{m}{\beta}\right), a_2 = -\alpha\frac{m}{\beta}, b_1 = \frac{(\beta-m)(m-\beta L)}{\alpha\beta}, b_2 = 0$

令  $\dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = F(u) \in C^4$  为二维微分系统, 在  $E_*(x_*, y_*)$  附近对  $F(u)$  进行泰勒展开, 前三项可写成

$$F(u) = Au + \frac{1}{2!}B(u, u) + \frac{1}{3!}C(u, u, u) + 0(|u|^4). \quad (4.2)$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(x, y) = (B_1(x, y), B_2(x, y)) = \begin{pmatrix} (-6x_* + 2(1+L))x_1y_1 - 2\alpha(x_1y_2 + x_2y_1) \\ 2\beta(x_1y_2 + x_2y_1) \end{pmatrix}$$

$$C(x, y, z) = (C_1(x, y, z), C_2(x, y, z)) = \begin{pmatrix} -6x_1y_1z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

假设  $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$  是特征值  $\lambda_1 = i\omega$  的特征向量, 则有  $AV_1 = i\omega V_1$ , 由于

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{m}{\beta}\left(\frac{m-L}{\beta}\right) + \frac{m}{\beta}\left(1 - \frac{m}{\beta}\right) & -\alpha\frac{m}{\beta} \\ \frac{(\beta-m)(m-\beta L)}{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a & -b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

且满足 Hopf 分支的临界条件  $Tr(J_0) = a = 0$ , 此时

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\frac{m}{\beta} \\ \frac{(\beta-m)(m-\beta L)}{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

将  $A$  带入  $AV_1 = i\omega V_1$  可得

$$\begin{cases} -bv_{12} = i\omega v_{11} \\ cv_{11} = i\omega v_{12} \end{cases}$$

由于  $\omega^2 = B = bc$ , 故上述方程组有非零解, 令  $v_{11} = b$ , 则  $v_{12} = -\frac{i\omega}{b}$ ,  $b = -i\omega$ , 因此特征向量为

$$V_1 = \begin{pmatrix} b \\ -i\omega \end{pmatrix}.$$

设特征值  $\lambda_2 = -i\omega$  的特征向量  $V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ , 则有  $A^T V_2 = -i\omega V_2$ , 同理可得  $V_2 = \begin{pmatrix} b \\ i\omega \end{pmatrix}$ .

对特征向量做归一化处理, 由于  $\langle V_1, V_2 \rangle = \bar{v}_{21}v_{11} + \bar{v}_{22}v_{12} = b^2 + \omega^2$ , 令  $\langle V_1, V_2 \rangle = 1$ , 可得归一化因子为  $\frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}$ , 因此归一化后的特征向量分别为:

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}} \begin{pmatrix} b \\ -i\omega \end{pmatrix}, V_2 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + \omega^2}} \begin{pmatrix} b \\ i\omega \end{pmatrix}$$

由文献[11]中公式, 得到一阶 Lyapunov 系数为

$$l_1 = \frac{1}{2\omega} \operatorname{Re} \left[ \langle v_2, C(v_1, v_1, \bar{v}_1) \rangle - 2 \langle v_2, B(v_1, A^{-1}B(v_1, \bar{v}_1)) \rangle + \langle v_2, B(\bar{v}_2, (2i\omega E - A)^{-1}B(v_1, v_1)) \rangle \right]$$

$$= -\frac{\alpha^4 m (2L\beta + 2\beta - 3m)}{\sqrt{\frac{m(-\beta+m)(L\beta-m)}{\beta^2} (-m^2 + ((L+1)\beta + \alpha^2)m - L\beta^2)^2}} \quad (4.3)$$

定理 4.3: 当参数满足  $\beta L < m < \beta, 0 < L < 1$  且  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $m$  均为正数时, 记  $L_* = \frac{3m}{2\beta} - 1$ , 则有

1) 若  $L > L_*$  ( $l_1 < 0$ ) 成立, 系统(2.2)发生一个超临界 Hopf 分支,  $E_*(x_*, y_*)$  附近出现一个稳定的极限环;

2) 若  $L < L_*$  ( $l_1 > 0$ ) 成立, 系统(2.2)发生一个亚临界 Hopf 分支,  $E_*(x_*, y_*)$  附近出现一个不稳定的极限环;

3) 若  $L = L_*$  ( $l_1 = 0$ ) 成立,  $E_*(x_*, y_*)$  是一个重数至少是 2 的细焦点, 系统发生余维至少是 2 的退化 Hopf 分支。

当  $m = m_* = \frac{\beta(1+L)}{2}$ , 系统在  $E_*(x_*, y_*)$  附近发生 Hopf 分支, 此时  $L_* = \frac{3m}{2\beta} - 1 = \frac{3}{4}L - \frac{1}{4}$ ,  $l_1 < 0$ , 由定理 4.3 可知, 系统(2.2)发生一个超临界 Hopf 分支, 在  $E_*(x_*, y_*)$  附近出现一个稳定的极限环。

## 5. 数值模拟

为进一步探讨 Allee 效应对生态系统的影响, 通过数值模拟与理论分析验证系统(2.2)的 Hopf 行为: 取  $\alpha = 0.8, \beta = 3, L = 0.3, m = 2$ 。此时对应系统(2.2)的正平衡点为  $E_*(0.6667, 0.1528)$ ,  $L_* < L$  系统(2.2)发生超临界 Hopf。

选取  $m$  作为分支参数, 则  $m_* = 1.95$ ,  $\beta L = 0.9 < m < \beta = 3$ 。基于稳定性变化曲线(图 1), 当  $0.9 < m < m_* = 1.95$  时, 平衡点处特征根实部为正, 正平衡点为不稳定焦点, 此时捕食者因种群死亡率低, 对捕食者的捕食压力持续且稳定, 食饵的繁殖与被捕食的消耗达到平衡; 当  $m = m_* = 1.95$  时, 特征根为纯虚根, 系统发生 Hopf 分支并出现周期性震荡, 此时  $m$  处于临界死亡率, 捕食者死亡率上升导致种群数量出现波动, 食饵因 Allee 效应对捕食压力敏感二者耦合触发 Hopf 分支, 产生极限环; 当  $3 > m > m_* = 1.95$  时, 系统(2.2)在正平衡点处重新稳定, 此时  $m$  处于高死亡率, 捕食者捕食压力降低, 食饵由 Logistic 增长主导, 且始终处于 Allee 效应正向区间, 捕食者无法形成持续震荡, 系统复稳。图 2 和图 3 分别为三个特殊  $m$  值下的时间序列图和相图对比, 直观展示了 Hopf 分支从不稳定焦点到周期震荡再到稳定焦点的动态变化过程。图 1~3 验证了 Hopf 分支的临界条件与稳定性切换规律。

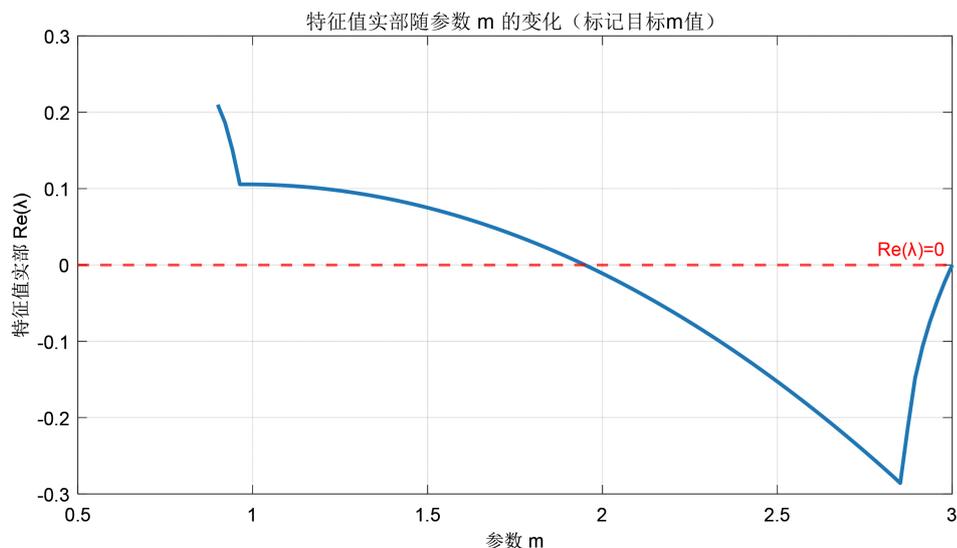
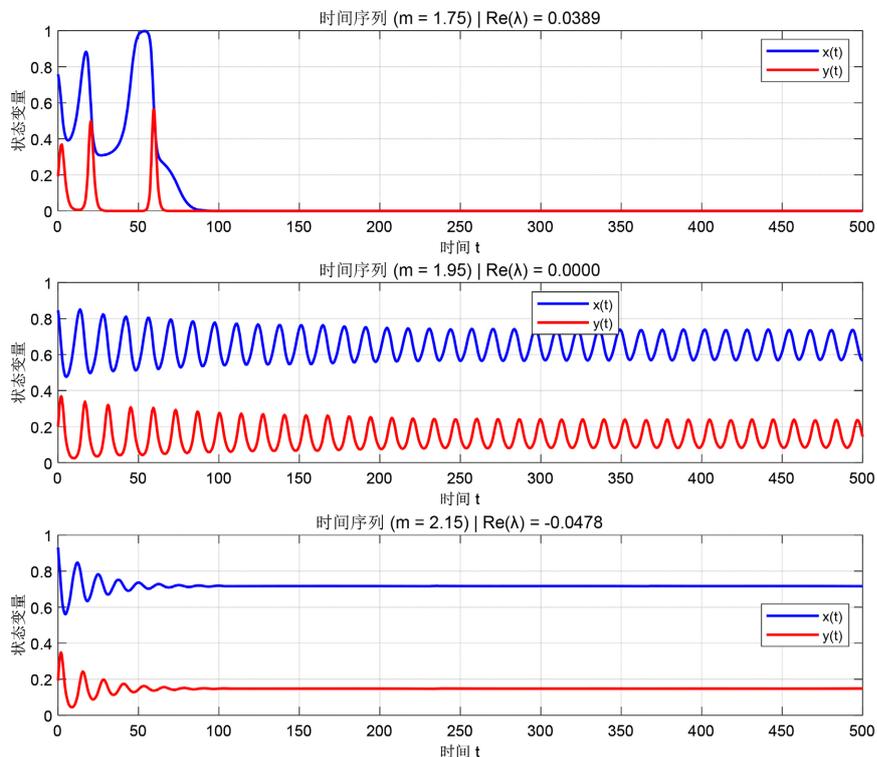
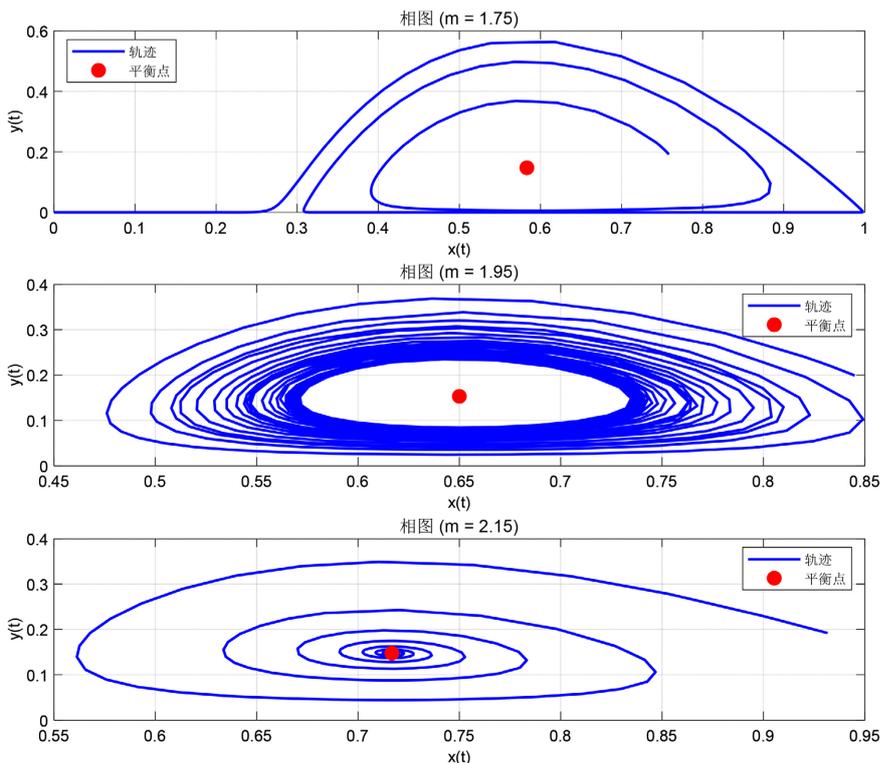


Figure 1. The real part of the characteristic root varies with  $m$   
图 1. 特征根实部随  $m$  的变化



**Figure 2.** Time series of state variables of the dynamic system when  $m = 1.75, 1.95, 2.15$   
**图 2.**  $m = 1.75, 1.95, 2.15$  时动力系统状态变量时间序列图



**Figure 3.** The dynamic response curves of the predator-prey model when  $m = 1.75, 1.95, 2.15$   
**图 3.**  $m = 1.75, 1.95, 2.15$  时捕食者食饵模型的动力学响应曲线

## 6. 结论

通过引入 Allee 效应, 研究了一类捕食者食饵模型平衡点的稳定和 Hopf 分支的存在性。研究发现, 在一定条件下  $E_0(0,0)$  局部渐近稳定,  $E_1(1,0)$ ,  $E_2(L,0)$  为鞍结点, 不稳定, 正平衡点  $E_*(x_*, y_*)$  的稳定性与参数  $L$  的取值有关, 当逐渐增加超过一定阈值, Allee 效应打破传统捕食者食饵模型的动力学规律, 使捕食者死亡率引发“稳定到震荡再到稳定”的复杂动态, 既验证了近年 Allee 效应调控种群动力学的结论, 又揭示了其与捕食者死亡率的协同作用机制, 为生态系统调控提供理论依据。

## 参考文献

- [1] Allee, W.C. (1931) *Animal Aggregations, a Study in General Sociology*. The University of Chicago Press. <https://doi.org/10.5962/bhl.title.7313>
- [2] Bai, D., Wu, J., Zheng, B. and Yu, J. (2024) Hydra Effect and Global Dynamics of Predation with Strong Allee Effect in Prey and Intraspecific Competition in Predator. *Journal of Differential Equations*, **384**, 120-164. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.11.017>
- [3] Bi, Z., Liu, S. and Ouyang, M. (2022) Spatial Dynamics of a Fractional Predator-Prey System with Time Delay and Allee Effect. *Chaos, Solitons & Fractals*, **162**, Article ID: 112434. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112434>
- [4] 王秀叶, 李自尊, 姚庆娟. 具有 Allee 效应及捕获的 Leslie-Gower 型捕食者-猎物模型[J]. 内江师范学院学报, 2025, 40(12): 1-11.
- [5] 高鹤, 李秀玲. 二维具时滞捕食-食饵共生模型的 Hopf 分支[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2024, 56(1): 23-28.
- [6] 李丹阳. 时滞 Allee 效应下捕食者-食饵模型的动力学分析及模拟研究[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北民族大学, 2024.
- [7] Wang, L.S., Zhang, M. and Zhang, Y.N. (2025) Stability Analysis of an Epidemic Predator-Prey Model with Prey Dispersal and Holling Type-II Functional Response. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **45**, 179-194.
- [8] Li, D., Liu, H., Zhang, H., Ma, M., Ye, Y. and Wei, Y. (2023) Bifurcation Analysis in a Predator-Prey Model with an Allee Effect and a Delayed Mechanism. *Acta Mathematica Scientia*, **43**, 1415-1438. <https://doi.org/10.1007/s10473-023-0324-z>
- [9] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性方法与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [10] 王洁. 一类具有恐惧效应的捕食者-食饵系统的分支分析[D]: [硕士学位论文]. 开封: 河南大学, 2023.
- [11] Kuznetsov, Y.A. (2004) *Elements of Applied Bifurcation Theory*. *Applied Mathematical Sciences*, **288**, 715-730.