Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(2), 166-172
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.162045

障碍带条件下*p*-Laplacian方程两点边值问题的可解性

张　彬

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2026年1月1日；录用日期：2026年2月3日；发布日期：2026年2月10日

摘　要

本文运用Leray-Schauder原理研究障碍带条件下*p*-Laplacian方程两点边值问题

$$\begin{cases}\left(\varphi\left(u'\right)\right)' = f\left(t,u\left(t\right),u'\left(t\right)\right),\ t\in\left[0,1\right],\\ u\left(0\right)=A,\ u'\left(1\right)=B,\end{cases}$$

解的存在性，其中$\varphi_p\left(s\right)=\left|s\right|^{p-2}s$，$s\in\mathbb{R}$，$p>1$，非线性项$f:\left[0,1\right]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$连续。

关键词

p-Laplacian算子，障碍带，可解性

Solvability of Two-Point Problems for *p*-Laplacian Equation under Barrier Strips Conditions

Bin Zhang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: January 1, 2026; accepted: February 3, 2026; published: February 10, 2026

Abstract

In this paper, by using Leray-Schauder theory, the existence of solutions to the following *p*-Laplacian equation two-point problem under the barrier strips conditions

文章引用: 张彬. 障碍带条件下 *p*-Laplacian 方程两点边值问题的可解性[J]. 理论数学, 2026, 16(2): 166-172.
DOI: 10.12677/pm.2026.162045

$$\begin{cases}\left(\varphi\left(u'\right)\right)' = f\left(t,u(t),u'(t)\right),\ t\in[0,1],\\ u(0)=A,\ u'(1)=B,\end{cases}$$

is considered, where $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $s\in\mathbb{R}$, $p>1$, $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ is continuous.

Keywords

***p*-Laplacian Operator, Barrier Strips, Solvability**

1. 引言

微分方程边值问题已广泛应用于流体力学、工程控制、生物种群动力学等领域，其中带 *p*-Laplacian 算子的微分方程边值问题长期以来吸引着众多学者的关注，近年来取得了一系列研究成果，参见文[2] [4]-[6] [8] [9]。但是，在障碍带条件 *p*-Laplacian 方程的两点边值问题较少被研究。

在文[1]中，Kelevedjiev 运用 Leray-Schauder 原理在障碍带条件下讨论了非线性微分方程两点边值问题

$$\begin{cases}u''(t)=f\left(t,u(t),u'(t)\right),\ t\in[0,1],\\ u(0)=A,\ u'(1)=B,\end{cases}$$

解的存在性。

文[3]运用 Leray-Schauder 原理和上下解方法研究了如下 *p*-Laplacian 算子的两点边值问题

$$\begin{cases}\left(\varphi(u')\right)'+f\left(t,u(t)\right)=0,\ t\in(0,1),\\ u(0)=u(1)=0,\end{cases}$$

正解存在的充要条件。

文[6]运用 Leray-Schauder 原理的推论研究非线性常微分方程四阶三点边值问题

$$\begin{cases}u^{(4)}(t)=f\left(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)\right),\ t\in[0,1],\\ u(0)=u'(0)=0,\\ u''(\xi)=u'''(1)=0,\ \xi\in[0,1],\end{cases}$$

的解的存在性。

文[10]运用 Leray-Schauder 原理讨论了如下非线性差分方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2u(k)=f\left(k,u(k),\Delta u(k)\right),\ k\in[0,T],\\ u(0)=A,\ \Delta u(T+1)=B,\end{cases}$$

的可解性。

受以上文献的启发，本文主要运用 Leray-Schauder 原理在障碍带条件下讨论 *p*-Laplacian 方程

$$\left(\varphi(u')\right)' = f\left(t,u,u'\right),\ t\in[0,1], \tag{1}$$

其中非线性项 $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续，$u(t)$ 满足以下任意一种边值条件：

$$u(0)=A,\ u'(1)=B, \tag{2}$$

$$u'(0)=A,\ u(1)=B, \tag{3}$$

$$u(0)=A,\ u(1)=B \tag{4}$$

本文将经典的障碍带方法应用于 p-Laplacian 方程，其证明技巧的改进在于巧妙运用 p-Laplacian 算子 φ_p 的严格单调性和障碍带内非线性项的符号确定 u 的单调性。

本文总假定

(H1) 函数 $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续。

本文的主要结果如下：

定理 1 假定(H1)成立。若存在常数 $L_i, i=1,2,3,4$，使得 $L_2>L_1\ge B$，$0<L_3<L_4\le B$，且 f 满足

$$f(t,u,v)\ge 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[L_1,L_2], \tag{5}$$

$$f(t,u,v)\le 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[L_3,L_4], \tag{6}$$

则问题(1)~(2)在 $C^2[0,1]$ 中至少存在一个解。

定理 2 假定(H1)成立。若存在常数 $L_i, i=1,2,\cdots,8$，使得 $L_2>L_1\ge C$，$L_3>L_4\ge C$，$0<L_5<L_6\le C$，$0<L_7<L_8\le C$，其中 $C=B-A$，且 f 满足

$$f(t,u,v)\ge 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times\left([L_1,L_2]\cup[L_5,L_6]\right), \tag{7}$$

$$f(t,u,v)\le 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times\left([L_3,L_4]\cup[L_7,L_8]\right), \tag{8}$$

则问题(1)和(4)在 $C^2[0,1]$ 中至少存在一个解。

2. 预备知识

本文所用的 Banach 空间是 $C[0,1]$，其上范数是 $|x|_0=\max\{|x|:0\le t\le 1\}$。$C^1[0,1]$ 在范数 $|x|_1=\max\{|x|_0,|x'|_0\}$ 下构成 Banach 空间，对 $\forall x\in C^2[0,1]$，定义范数 $|x|_2=\max\{|x|_0,|x'|_0,|x''|_0\}$。

设 $\mathcal{B}$ 是满足边值条件(2)、(3)或(4)的函数构成的集合，记 $C^2_{\mathcal{B}}[0,1]=C^2[0,1]\cap\mathcal{B}$，定义非线性算子 $L:C^2_{\mathcal{B}}[0,1]\to C[0,1]$，$Lu=\left[\varphi_p(u')\right]'$。

定义算子 $T:C^1[0,1]\to C^2_{\mathcal{B}}[0,1]$，

$$Tu(t)=A+\int_0^t\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(B)-\int_s^1 f(\tau,u,u')d\tau\right)\mathrm{d}s,$$

则算子 T 为全连续算子。

证明 首先证明 T 是连续的。设 $u_n,u\in C^1[0,1]$，$u_n\to u\ (n\to\infty)$，由函数 $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 连续，得 $f(s,u_n(s),u_n'(s))\rightrightarrows f(s,u(s),u'(s))$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，

进而

$$\int_\tau^1 f(s,u_n(s),u_n'(s))\mathrm{d}s\to\int_\tau^1 f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s,$$

又因为 φ_p^{-1} 连续，故

$$\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(B)-\int_\tau^1 f(s,u_n(s),u_n'(s))\mathrm{d}s\right)\rightrightarrows\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(B)-\int_\tau^1 f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right).$$

最后由积分的一致收敛性可得到 $Tu_n \rightrightarrows Tu$，$(Tu_n)' \rightrightarrows (Tu)'$，$(Tu_n)'' \rightrightarrows (Tu)''$，即 $Tu_n \to Tu$ 在 $C^2[0,1]$ 中，故 T 是连续的。

再证明 $T(S)$ 在 $C_{\mathcal{B}}^2[0,1]$ 中是相对紧的。

设 $S \subset C^1[0,1]$ 是有界集，即 $\exists M>0$，$\forall u \in S$，$|u|_1 \le M$。

对于 $|Tu(t)|$，$|Tu(t)| \le |A| + \left|\int_0^t \varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(B) - \int_s^1 f(\tau,u,u')\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|$，因为 $u \in S$，$f(s,u(s),u'(s))$。

在紧集 $[0,1]\times[-M,M]\times[-M,M]$ 上连续，故 $|f| \le C_1$，由于 φ_p^{-1} 在紧集上有界，则 $|Tu(t)| \le C_2$。

对于 $\left|(Tu)'(t)\right|$，$\left|(Tu)'(t)\right| = \left|\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(B) - \int_\tau^1 f(s,u(s),u'(s))\mathrm{d}s\right)\right| \le C_3$，

对于 $\left|(Tu)''(t)\right|$，$\left|(Tu)''(t)\right| = \left|\left(\varphi_p^{-1}\right)'(\cdot)\cdot\left(-f(t,u,u')\right)\right| \le C_4$，

因此，$|Tu|_2 \le \max\{C_2,C_3,C_4\}$，$T(S)$ 一致有界。

对于任意 $t_1,t_2 \ge 0$，不妨设 $t_1 \le t_2$，存在一个 $C_3>0$，使得 $\left|(Tu)'(t)\right| \le C_3$。借助 Lagrange 中值定理，可得

$$\left|(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)\right| \le C_3|t_1-t_2|,\ t_1,t_2 \in [0,1],$$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C_3}$，则当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时 $\left|(Tu)(t_1)-(Tu)(t_2)\right|<\varepsilon$，故 $(Tu)(t)$ 等度连续。

存在一个 $C_4>0$，使得 $\left|(Tu)'(t)\right| \le C_4$。则同样使用 Lagrange 中值定理，有

$$\left|(Tu)'(t_1)-(Tu)'(t_2)\right| \le C_4|t_1-t_2|,\ t_1,t_2 \in [0,1],$$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C_4}$，则当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时 $\left|(Tu)'(t_1)-(Tu)'(t_2)\right|<\varepsilon$，故 $(Tu)'(t)$ 等度连续。

综上，由 Arzela-Ascoli 定理可知，$T(S)$ 在 $C_{\mathcal{B}}^2[0,1]$ 中是相对紧的，T 将 $C^1[0,1]$ 中的有界子集映为 $C_{\mathcal{B}}^2[0,1]$ 中的相对紧集。因此 T 是一个全连续算子。

本文的主要工具是

引理 1 ([7] Leray-Schauder 原理)设 $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 连续，$L: C_{\mathcal{B}}^2[0,1] \to C[0,1]$ 是一一映射。若存在常数 $0<M<\infty$，使得同伦族问题

$$Lu = \lambda f(t,u,u'),\ t\in[0,1],\ \lambda\in[0,1],\ u(t)\in\mathcal{B}$$

的任意一个解 u 有 $|u|_2 < M$。则问题

$$Lu = f(t,u,u'),\ t\in[0,1],\ u(t)\in\mathcal{B}$$

在 $C_{\mathcal{B}}^2[0,1]$ 中至少存在一个解。

3. 主要结果的证明

定理 1 的证明 考虑同伦族问题

$$\left[\varphi_p(u')\right]' = \lambda f(t,u,u'),\ t\in[0,1],\ \lambda\in[0,1], \tag{9}$$

$$u(0)=A,\ u'(1)=B, \tag{10}$$

显然 $L: C_{\mathcal{B}}^2[0,1] \to C[0,1]$ 是一一映射。若问题(9)~(10)的所有解在 $C^2[0,1]$ 中有一个不依赖于 $\lambda\in[0,1]$ 的先

验界，则问题(1)~(2)在 $C^2[0,1]$ 中有解。

首先估计 u' 的界，对方程(9)两边从 t 到 1 积分，结合边界条件(10)，有

$$u'(t)=\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(B)-\lambda\int_t^1 f(s,u,u')\,\mathrm{d}s\right). \tag{11}$$

对(11)从 0 到 t 积分，进而可以得到

$$u(t)=A+\int_0^t\varphi_p^{-1}\left(\varphi_p(B)-\lambda\int_s^1 f(\tau,u,u')\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

我们宣称

$$S_0=\{t\in[0,1]:L_1<u'(t)\le L_2\},\ S_1=\{t\in[0,1]:L_3\le u'(t)<L_4\}$$

均为空集。反设 S_0 与 S_1 非空，不妨设 $t_0\in S_0$，$t_1\in S_1$。若存在 $\overline{t_0}\in(t_0,1]$ 和 $\overline{t_1}\in(t_1,1]$，使得 $u'(\overline{t_0})<u'(t_0)$，$u'(\overline{t_1})>u'(t_1)$。

由 $u'(t)$ 的连续性，我们可以取到 $\overline{t_0}\in(t_0,1]\cap S_0$ 和 $\overline{t_1}\in(t_1,1]\cap S_1$。当 $t\in S_0$ 时，结合(5)，$[\varphi_p(u')]'=\lambda f(t,u,u')\ge0$，可得 $\varphi_p(u'(t))$ 单调递增，由于 φ_p 是严格单调增的奇算子，其逆算子 φ_p^{-1} 也严格递增，故 $u'(t)=\varphi_p^{-1}(\varphi_p(u'(t)))$ 单调递增，当 $t\in S_1$ 时，结合(6)，同理可得到 $u'(t)=\varphi_p^{-1}(\varphi_p(u'(t)))$ 单调递减。

所以 $u'(\overline{t_0})\ge u'(t_0),u'(\overline{t_1})\le u'(t_1)$，这与 $u'(\overline{t_0})<u'(t_0),u'(\overline{t_1})>u'(t_1)$ 矛盾。因此，

$$u'(t)\ge u'(t_0),\ t\in(t_0,1],\quad u'(t)\le u'(t_1),\ t\in(t_1,1],$$

特别地，

$$B=u'(1)>u'(\overline{t_0})>u'(t_0)>L_1\ge B,\ B=u'(1)<u'(\overline{t_1})<u'(t_1)<L_4\ge B.$$

这与边值条件 $u'(1)=B$ 矛盾。所以 S_0 和 S_1 是空集。

因为 $u'\in C[0,1]$，所以对 $t\in[0,1]$，有 $L_4\le u'(t)\le L_1$。故

$$|u'(t)|\le\max\{|L_1|,|L_4|\}:=M,\ t\in[0,1]. \tag{12}$$

另一方面，

$$|u(t)|=\left|A+\int_0^t u'(s)\,\mathrm{d}s\right|\le|A|+M=M_1. \tag{13}$$

又因为 $0<L_4\le u'(t)\le L_1$，故同伦族方程(9)可变为

$$[\varphi_p(u')]'=(p-1)|u'|^{p-2}u''=\lambda f(t,u,u'),$$

进而 u 满足

$$u''(t)=\frac{\lambda f(t,u,u')}{(p-1)|u'|^{p-2}}.$$

结合(H1)，$0<L_4\le u'(t)\le L_1$，以及(12)~(13)，我们可以推出

$$|u''(t)|\le M_2,\ t\in[0,1],$$

其中 $0<M_2<\infty$ 是不依赖于 λ 的常数。因此，同伦族方程(9)~(10)的任意解 $u(t)$ 满足

$$|u|_2<\max\{M,M_1,M_2\}+1,\ t\in[0,1].$$

运用引理 1，我们可以得到问题(1)~(2)至少存在一个解。 □

定理 2 的证明 考虑同伦族问题

$$\left[\varphi_p\left(u'\right)\right]' = \lambda f\left(t,u,u'\right),\ t\in[0,1],\ \lambda\in[0,1], \tag{14}$$

$$u(0)=A,\ u(1)=B, \tag{15}$$

设 $u\in C^2[0,1]$ 是问题(14)~(15)的解，由中值定理得，存在 $d\in(0,1)$，使得 $u'(d)=B-A$。因此，

$$f(t,u,v)\ge 0,\ (t,u,v)\in[0,d]\times\mathbb{R}\times[L_1,L_2],$$

及

$$f(t,u,v)\le 0,\ (t,u,v)\in[0,d]\times\mathbb{R}\times[L_7,L_8],$$

由定理 1 的证明可知，

$$|u'(t)|\le\max\{|L_1|,|L_8|\},\ t\in[0,d].$$

类似地，由于

$$f(t,u,v)\le 0,\ (t,u,v)\in[d,1]\times\mathbb{R}\times[L_3,L_4],$$

及

$$f(t,u,v)\ge 0,\ (t,u,v)\in[d,1]\times\mathbb{R}\times[L_5,L_6],$$

则

$$|u'(t)|\le\max\{|L_3|,|L_6|\},\ t\in[d,1].$$

因此，对任意 $t\in[0,1]$，有 $|u'(t)|\le M_0$，其中 $M_0=\max\{|L_1|,|L_3|,|L_6|,|L_8|\}$，进一步的证明完全类似于定理 1。 □

注意到，根据定理 1 和定理 2 的证明，类似地，可得到如下定理。

定理 3 假定(H1)成立。若存在常数 $L_i, i=1,2,3,4$，使得 $0>L_2>L_1\ge B$， $L_3<L_4\le B$，且 f 满足

$$f(t,u,v)\ge 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[L_1,L_2],$$

及

$$f(t,u,v)\le 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[L_3,L_4],$$

则问题(1)~(2)在 $C^2[0,1]$ 中至少存在一个解。

定理 4 假定(H1)成立。若存在常数 $L_i, i=1,2,3,4$，使得 $L_2>L_1\ge A$， $0<L_3<L_4\le B$，且 f 满足

$$f(t,u,v)\le 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[L_1,L_2],$$

及

$$f(t,u,v)\ge 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[L_3,L_4],$$

则问题(1)和(3)在 $C^2[0,1]$ 中至少存在一个解。

定理 5 假定(H1)成立。若存在常数 $L_i, i=1,2,3,4$，使得 $0>L_2>L_1\ge A$， $L_3<L_4\le B$，且 f 满足

$$f(t,u,v)\le 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[L_1,L_2],$$

及

$$f(t,u,v)\ge 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[L_3,L_4],$$

则问题(1)和(3)在 $C^2[0,1]$ 中至少存在一个解。

定理 6 假定(H1)成立。若存在常数 $L_i, i=1,2,\cdots,8$，使得 $0>L_2>L_1\ge C$，$0>L_3>L_4\ge C$，$L_5<L_6\le C$，$L_7<L_8\le C$，其中 $C=B-A$，且 f 满足

$$f(t,u,v)\ge 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times([L_1,L_2]\cup[L_5,L_6]),$$

及

$$f(t,u,v)\le 0,\ (t,u,v)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times([L_3,L_4]\cup[L_7,L_8]),$$

则问题(1)和(4)在 $C^2[0,1]$ 中至少存在一个解。

例子

$$[\varphi_p(u')]'=(u'-1)(u^2+2),\ t\in[0,1],$$
$$u(0)=0,\ u'(1)=1,$$

其中 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$，$p>1$，取常数 $L_1=1$，$L_2=2$，$L_3=\frac{1}{2}$，$L_4=1$，

$$f(t,u,u')=(u'-1)(u^2+2)\ge 0,\ (t,u,u')\in[0,1]\times\mathbb{R}\times[1,2],$$
$$f(t,u,u')=(u'-1)(u^2+2)\le 0,\ (t,u,u')\in[0,1]\times\mathbb{R}\times\left[\frac{1}{2},1\right],$$

显然满足定理 1 的所有条件，在 $C^2[0,1]$ 中至少存在一个解 $u(t)=t$。

这个例子中 f 关于 u 是无界的，经典的存在性定理一般要求 f 关于 u 满足一定的增长限制，这个定理仅限制了 u' 的两个区间上的符号，绕开了增长限制，在无界非线性项的处理上有优势。

参考文献

[1] Kelevedjiev, P. (1994) Existence of Solutions for Two-Point Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **22**, 217-224. https://doi.org/10.1016/0362-546x(94)90035-3

[2] Lv, H. and Bai, Z. (2004) A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of Positive Solutions to the Singular p-Laplacian. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, **6**, 289-296.

[3] Ma, R. (2003) Multiplicity Results for a Three-Point Boundary Value Problem at Resonance. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **53**, 777-789. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(03)00033-6

[4] Chen, T. and Ma, R. (2019) Three Positive Solutions of *n*-Dimensional *p*-Laplacian with Indefinite Weight. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 19, 1-14. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.19

[5] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[6] 秦伟. 障碍带条件下四阶三点边值问题解的存在性[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2008, 27(3): 96-101.

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1985.

[8] 张晓燕, 孙经先. 一维奇异 *p*-Laplacian 方程多解的存在性[J]. 数学物理学报, 2006, 26A(1): 143-149.

[9] 刘斌, 庾建设. 具 *p*-Laplacian 算子型奇异边值问题多重正解[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2001(6): 721-728.

[10] 高承华. 障碍带条件下二阶差分方程边值问题的可解性[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2008(1): 17-20.