Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(2), 119-122
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.162039

用共轭类长相同的元素个数刻画PSL (2, 5)

曾清贤，陈彦恒*，刘　琳

重庆三峡学院数学与统计学院，重庆

收稿日期：2026年1月6日；录用日期：2026年1月30日；发布日期：2026年2月9日

摘　要

设G是一个有限群，$U(G)$表示群G的共轭类长相同的元素个数的集合。证明了若$U(G)=\{1,pq,r^2q,r^3p\}$（p,q,r为素数)，则p,q,r是互不相同的素数。进一步，若G是有限单群，则$G\cong PSL(2,5)$。

关键词

有限群，共轭类长相同的元素个数，数量刻画

A Characterization of PSL (2, 5) by Number of Elements with the Same Conjugacy Class Size

Qingxian Zeng, Yanheng Chen*, Lin Liu

College of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges University, Chongqing

Received: January 6, 2026; accepted: January 30, 2026; published: February 9, 2026

Abstract

Let G be a finite group and $U(G)$ be the set of numbers of elements with the same conjugacy class size of G. In this paper, we proved that if $U(G)=\{1,pq,r^2q,r^3p\}$ (p,q,r are prime numbers), then p,q,r are distinct prime numbers. Moreover, if G is a finite simple group, then $G\cong PSL(2,5)$.

*通讯作者。

文章引用: 曾清贤, 陈彦恒, 刘琳. 用共轭类长相同的元素个数刻画 PSL (2, 5) [J]. 理论数学, 2026, 16(2): 119-122.
DOI: 10.12677/pm.2026.162039

Keywords

Finite Group, Number of Elements with the Same Conjugacy Class Size, Quantitative Characterization

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文讨论的单群均为有限非交换单群。对于有限群 G，$|G|$ 表示 G 的阶，$\pi(G)$ 表示 $|G|$ 所有素因子构成的集合，$|g^G|$ 表示元素 g 在 G 中的共轭类的长，$cs(G)$ 表示 G 的所有共轭类长的集合。将 $cs(G)$ 按升序排列，记为 $V(G)=(n_1,n_2,\cdots,n_r)$(其中当 $i<j$ 时 $n_i<n_j$)，称为 G 的共轭型向量，$r-1$ 称为 G 的共轭型秩。再记 $u_G(n_i)=\{x\in G \mid |x^G|=n_i\}$ 表示 G 中所有共轭类长为 n_i 的元素的集合，$U(G)=\{|u_G(n_i)| \mid i\in Z^+\}$ 表示 G 中共轭类长相同的元素个数的集合。$PSL(n,q)$ 表示有限域 F_q 上的特殊射影线性群。若 G 为有限单群且 $|\pi(G)|=n,(n\in Z^+)$，则称 G 为 k_n-单群。比如 $|\pi(PSL(2,7))|=\{3\}$，所以 $PSL(2,7)$ 是 k_3-单群。其他符号都是标准的，详见文献[1] [2]。

有限群的数量刻画是对群从局部性质到整体性质的研究方法，这种方法对群论研究有窥一斑而知全豹、事半而功倍的效果。正因如此，群的数量特征与其结构特征之间的问题不断被国内外学者提出并研究，形成了丰富的研究成果，尤其是在利用群的共轭类长去刻画有限单群。最著名一个问题是 1988 年 J. Thompson 在给施武杰的回信中提出的猜想：

猜想 1.1 设 G 是中心平凡的有限群，M 是有限单群，则 $G\cong M$ 的充分必要条件是 $cs(G)=cs(M)$。

猜想 1.1 经过数名群论学者分类验证，历经 21 年，终于在 2009 年得到了完整的证明(见文献[3])。

继这些研究之后，在 2019 年，M. Zarrin 与 N. Ahmadkhah 在文献[4]中基于群的共轭类长引入了一种新的等价关系：对有限群 G，定义 $g\sim h \Leftrightarrow |h^G|=|g^G|,\forall g,h\in G$。在该等价关系下，显然所有等价类元素个数的集合为 $U(G)$。他们利用 $U(G)$ 并设 G 是有限单群条件下，成功刻画了 k_3-单群中所有特殊射影线性群，获得结论：设 G 为有限单群，$S=PSL(3,3)$ 或 $S=PSL(2,q),q\in\{5,7,8,9,17\}$，则 $G\cong S\Leftrightarrow U(G)=U(S)$。基于此，他们提出猜想：

猜想 1.2 设 G 为有限群，S 为有限单群，则 $G\cong S$ 的充分必要条件是 $U(G)=U(S)$。

特别地，他们通过泛化 $U(PSL(2,5))=\{1,15,20,24\}$ 中元素的奇素数因子，证明了若有限单群 G 满足 $U(G)=\{1,pq,4p,8q\}$ (p,q 为素数)，则 p,q 为互不相同的奇素数且 $G\cong PSL(2,5)$。值得说明的是，这个猜想 1.2 还没有找到一个反例。事实上，仅对“G,S 均为有限单群，是否有 $G\cong S\Leftrightarrow U(G)=U(S)$？”这样一个问题都还没得到解决。

基于猜想 1.2 和它的已有研究，我们不难发现共轭类长相同的元素个数是有限群十分重要的数量特征，对有限单群的结构有着重要影响。于是在本文中将 $U(PSL(2,5))=\{1,15,20,24\}$ 泛化成形式为 $U(G)=\{1,pq,r^2q,r^3p\}$ (p,q,r 为素数)，讨论 $U(G)$ 满足这样形式的群有什么好的性质，以便我们能对单群有更深刻认识。

本文将集合 $U(PSL(2,5))$ 中元素的素因子全部泛化，形成更一般的形式 $\{1,pq,r^2q,r^3p\}$ (p,q,r 为素数)，并证明了满足 $U(G)=\{1,pq,r^2q,r^3p\}$ 有限单群 G 唯一的同构于 $PSL(2,5)$，推广了文献[4]的结果。

2. 预备知识

下面给出几个简单的引理，这些引理对本文主要定理的证明是必须的。

引理 2.1 ([4]，命题 2.8)设 G 为有限群，n 为 G 的一个共轭类长，则 $n \mid \left|u_G(n)\right|$。

引理 2.2 ([4]，引理 3.7)设 $Z(G)=1$，则 $\pi(G)=\bigcup_{i=1}^{r}\pi(n_i)$，其中 $V(G)=(n_1,n_2,\cdots,n_r)$。

引理 2.3 ([5]，定理 1)若 G 为 k_3-单群，则 G 同构于以下单群之一：

$$PSL(2,5),PSL(2,7),PSL(2,8),PSL(2,9),PSL(2,17),PSL(3,3),U(3,3),U(4,2)。$$

引理 2.4 ([5]，定理 8.2)若有限群 G 存在长为素数幂的共轭类，则 G 不是单群。

引理 2.5 k_3-单群的共轭类长相同的元素个数的集合如下：

$$U(PSL(2,5))=\{1,15,20,24\},$$

$$U(PSL(2,7))=\{1,21,42,48,56\},$$

$$U(PSL(2,8))=\{1,63,216,224\},$$

$$U(PSL(2,9))=\{1,45,80,90,144\},$$

$$U(PSL(2,17))=\{1,153,288,918,1088\},$$

$$U(PSL(3,3))=\{1,104,117,624,936,1728,2106\},$$

$$U(U(3,3))=\{1,56,189,378,672,1512,1728\},$$

$$U(U(4,2))=\{1,45,80,240,270,480,540,720,1440,3240,5184,5760,6480\}。$$

证明 以 $U(PSL(2,5))$ 的计算为例，其余 k_3-单群的 $U(G)$ 类似可得。由 $PSL(2,5)$ 的 Atlas 表可知，$PSL(2,5)$ 有 5 个共轭类，其代表元中心化子的阶分别为 60，4，3，5，5。由公式 $|C|=\left|G:C_G(g)\right|$ 可得这 5 个共轭类长分别为 1，15，20，12，12，再合并相同长度的共轭类得 1，15，20，24。据共轭类长相同的元素个数的集合 $U(G)$ 的定义，$U(PSL(2,5))=\{1,15,20,24\}$。

3. 主要定理及证明

本文将用分类讨论的方法对主要定理进行证明。

定理 3.1 设 G 为有限群，p,q,r 为素数。若 $U(G)=\{1,pq,r^2q,r^3p\}$，则 p,q,r 为互不相同的素数。

证明 由 $U(G)$ 的定义知，G 的中心平凡且可设 $|G|=1+apq+br^2q+cr^3p$，其中 a,b,c 分别为共轭类长相同元素个数是 pq,r^2q,r^3p 的类数。再由引理 2.1 和引理 2.2 可得 $\pi(G)\subseteq\{p,q,r\}$。若 $p=q=r$，则 $\pi(G)\subseteq\{p\}$。于是 G 是 $p-$ 群，但 $p-$ 群的中心不为 1，矛盾。于是 p,q,r 中至少有一个数与其余的数不同。

若 $p=q\neq r$，则 $U(G)=\{1,p^2,r^2p,r^3p\}$。令 $u_G(n_1)=1$，$u_G(n_2)=p^2$，$u_G(n_3)=r^2p$，$u_G(n_4)=r^3p$。由引理 2.1 可得 $n_2\in\{p,p^2\}$，从而 $p\mid |G|$。又 $|G|=1+ap^2+br^2p+cr^3p$，所以 $1=|G|-p(ap+br^2+cr^3)$，从而 $p\mid 1$，这与 p 是素数矛盾。于是 $p\neq q$。

若 $p=r\neq q$，则 $U(G)=\{1,rq,r^2q,r^4\}$。令 $u_G(n_1)=1$，$u_G(n_2)=rq$，$u_G(n_3)=r^2q$，$u_G(n_4)=r^4$。则由引理 2.1 可得 $n_4\in\{r,r^2,r^3,r^4\}$，从而 $r\mid |G|$。又 $|G|=1+arq+br^2q+cr^4$，所以 $1=|G|-r(aq+brq+cr^3)$，从而 $r\mid 1$，这与 r 是素数矛盾。于是 $p\neq r$。

若 $q=r\neq p$，则 $U(G)=\{1,pq,q^3,pq^3\}$。令 $u_G(n_1)=1$，$u_G(n_2)=pq$，$u_G(n_3)=q^3$，$u_G(n_4)=pq^3$。

则由引理 2.1 可得 $n_3 \in \{q, q^2, q^3\}$，从而 $q \mid |G|$。又 $|G| = 1 + apq + bq^3 + cpq^3$，所以 $1 = |G| - q(ap + bq^2 + cpq^2)$，从而 $q \mid 1$，与 q 是素数矛盾。于是 $q \neq r$。

综上，p, q, r 是互不相同的素数。

定理 3.2 设 G 是有限单群，p, q, r 为素数。若 $U(G) = \{1, pq, r^2q, r^3p\}$，则 $G \cong PSL(2,5)$。

证明 令 $u_G(n_1) = 1$，$u_G(n_2) = pq$，$u_G(n_3) = r^2q$，$u_G(n_4) = r^3p$。则由引理 2.1 可得，$n_2 \in \{p, q, pq\}$，若 $n_2 = p$ 或 $n_2 = q$，则由引理 2.4 可得 G 不是单群，与题设矛盾，故而 $n_2 = pq$，同理可得 $n_3 \in \{rq, r^2q\}$。再由引理 2.1 得 $pq \mid |G|$，$rq \mid |G|$。结合定理 3.1 和引理 2.2 可得 $\pi(G) = \{p, q, r\}$，从而 G 是一个 k_3-单群。再由引理 2.4 得 G 同构于 $PSL(2,q)$，$q \in \{5,7,8,9,17\}$、$PSL(3,3)$、$U(3,3)$、$U(4,2)$ 之一。

于是 $U(G)$ 必与引理 2.5 中的某个集合相等。由于 $|U(G)| = 4$，对比可得 G 只可能同构于 $PSL(2,5)$、$PSL(2,8)$ 之一，但 $U(PSL(2,8)) = \{1, 63, 216, 224\}$ 中没有一个元素可以表示成 pq 的形式，故只能 $G \cong PSL(2,5)$。

进一步可得：

推论 3.1 设 G 是有限群且 $U(G) = \{1, pq, r^2q, r^3p\}$（$p, q, r$ 为素数)。若 $p \neq 3$ 或 $q \neq 5$ 或 $r \neq 2$，则 G 一定不是单群。

证明 如若不然，G 为单群。则由定理 3.2 可得，$G \cong PSL(2,5)$，从而 $U(G) = \{1, 15, 20, 24\}$。又由定理 3.1 知，p, q, r 是互不相同的素数，从而 $pq = 15$ 且 $r = 2$。若 $p = 5, q = 3$，则 $r^3p = 40$，矛盾。于是 $p = 3, q = 5$，与假设矛盾。于是原命题成立。

由定理 3.2 立得：

推论 3.2 若有限单群 G 满足 $U(G) = \{1, pq, 4p, 8q\}$（p, q 为素数)，则 p, q 为互不相同的奇素数且 $G \cong PSL(2,5)$。

基金项目

重庆市自然科学基金项目(项目编号：CSTB2022NSCQ-MSX0238)，重庆三峡学院研究生科研创新项目(项目编号：YJSKY25032)。

参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 1998.

[2] Burnside, W. (1911) Theory of Groups. Cambridge University Press.

[3] 施武杰. 有限单群的数量刻画[J]. 中国科学: 数学, 2023, 53(7): 931-952.

[4] Ahmadkhah, N. and Zarrin, M. (2019) On the Set of Same-Size Conjugate Classes. *Communications in Algebra*, **47**, 3932-3938. https://doi.org/10.1080/00927872.2019.1572171

[5] Herzog, M. (1968) On Finite Simple Groups of Order Divisible by Three Primes Only. *Journal of Algebra*, **10**, 383-388. https://doi.org/10.1016/0021-8693(68)90088-4