

从Roth消去法则到Jordan标准形

李昊状¹, 刘合国², 韦文博³, 周少玲¹, 徐 涛^{1*}

¹河北工程大学数理科学与工程学院, 河北 邯郸

²海南大学数学与统计学院, 海南 海口

³西南交通大学数学学院, 四川 成都

收稿日期: 2026年1月6日; 录用日期: 2026年2月4日; 发布日期: 2026年2月11日

摘 要

本文从Roth消去法则出发, 给出了Jordan标准形定理的一个纯矩阵证明。

关键词

Roth消去法则, Jordan标准形, 幂零矩阵

From Roth's Removal Rule to Jordan Canonical Form

Haozhuang Li¹, Heguo Liu², Wenbo Wei³, Shaoling Zhou¹, Tao Xu^{1*}

¹School of Mathematics and Physics, Hebei University of Engineering, Handan Hebei

²School of Mathematics and Statistics, Hainan University, Haikou Hainan

³School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

Received: January 6, 2026; accepted: February 4, 2026; published: February 11, 2026

Abstract

From the Roth's removal rule, we give a proof of pure matrix for Jordan canonical form theorem.

Keywords

Roth's Removal Rule, Jordan Canonical Form, Nilpotent Matrix

*通讯作者。

文章引用: 李昊状, 刘合国, 韦文博, 周少玲, 徐涛. 从 Roth 消去法则到 Jordan 标准形[J]. 理论数学, 2026, 16(2): 185-193. DOI: 10.12677/pm.2026.162047



1. 引言

1952 年, Roth 在[1]中给出了两个定理, 其中一个称为 Roth 消去法则。

Roth 消去法则 设 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶方阵, C 是 $m \times n$ 矩阵, 矩阵方程

$$AX - XB = C,$$

有解当且仅当分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相似, 其中 0 是零矩阵。

如果 $m \times n$ 矩阵 X 满足矩阵方程

$$AX - XB = C,$$

那么

$$\begin{pmatrix} I_m & -X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & -X \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 I_m 和 I_n 分别是 m 阶和 n 阶单位矩阵。因此, 矩阵方程 $AX - XB = C$ 的求解是至关重要的。

众所周知, Jordan 标准形定理是矩阵分析中最重要的结论之一。

Jordan 标准形定理 设 A 是代数闭域 F 上的 n 阶方阵, 则存在 F 上的一个可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_t}(\lambda_t) \end{pmatrix},$$

其中 Jordan 块

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

并且 Jordan 块 $J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_t}(\lambda_t)$ 除排列顺序外, 是由 A 唯一确定的。

Jordan 标准形定理有许多经典的证明, 见[2]-[4]。本文从 Roth 消去法则的思路出发, 运用纯矩阵的运算, 给出了 Jordan 标准形定理的一个新证明。

$M_{m,n}(F)$ 表示域 F 上所有 $m \times n$ 矩阵的集合, 特别地 $M_{n,n}(F)$ 记为 $M_n(F)$, 其他符号都是标准的, 参考[3]。

2. 预备知识

定义 2.1 设 A 是 n 阶方阵, 如果 $A^r = 0$, 但 $A^{r-1} \neq 0$, 则称 A 是 r 次幂零矩阵。

引理 2.1 设 F 是一个代数闭域, A 是 F 上的 m 次 m 阶幂零矩阵。如果 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^m = 0$, 则 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相

似于 $\begin{pmatrix} J_m(0) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 。

证明 因为 $A^{m-1} \neq 0$ ，所以存在域 F 上的列向量 x ，使得 $A^{m-1}x, A^{m-2}x, \dots, Ax, x$ 线性无关。设 $P = (A^{m-1}x, A^{m-2}x, \dots, Ax, x)$ ，则

$$P^{-1}AP = J_m(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_m(0) & P^{-1}C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

令 $D = P^{-1}C$ ，只需要证明 $\begin{pmatrix} J_m(0) & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相似于 $\begin{pmatrix} J_m(0) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 即可。根据 Roth 消去法则，我们需要证明矩阵方程

$$J_m(0)X - XB = D,$$

有解。

$$\text{设 } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{m-1} \\ X_m \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{m-1} \\ D_m \end{pmatrix}, \quad \text{则矩阵方程 } J_m(0)X - XB = D \text{ 等价于}$$

$$\begin{cases} X_2 - X_1B = D_1, \\ X_3 - X_2B = D_2, \\ \vdots \\ X_m - X_{m-1}B = D_{m-1}, \\ -X_mB = D_m, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} X_2 = D_1 + X_1B, \\ X_3 = D_2 + X_2B = D_2 + D_1B + X_1B^2, \\ X_4 = D_3 + X_3B = D_3 + D_2B + D_1B^2 + X_1B^3, \\ \vdots \\ X_m = D_{m-1} + X_{m-1}B, \\ -X_mB = D_m. \end{cases}$$

下面证明 $X_m = D_{m-1} + X_{m-1}B$ 等价于 $-X_mB = D_m$ 。注意到

$$X_m = D_{m-1} + X_{m-1}B = D_{m-1} + D_{m-2}B + \dots + D_1B^{m-2} + X_1B^{m-1},$$

因此有

$$X_m B = D_{m-1} B + D_{m-2} B^2 + \cdots + D_1 B^{m-1} + X_1 B^m.$$

另一方面, 因为 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^m = 0$, 所以 $\begin{pmatrix} J_m(0) & D \\ 0 & B \end{pmatrix}^m = 0$, 于是

$$J_m(0)^{m-1} D + J_m(0)^{m-2} DB + \cdots + J_m(0) DB^{m-2} + DB^{m-1} = 0, \quad B^m = 0.$$

不难验证

$$J_m(0)^{m-1} D + J_m(0)^{m-2} DB + \cdots + J_m(0) DB^{m-2} + DB^{m-1},$$

的第一行是

$$D_m + D_{m-1} B + D_{m-2} B^2 + \cdots + D_1 B^{m-1},$$

从而有

$$D_m + D_{m-1} B + D_{m-2} B^2 + \cdots + D_1 B^{m-1} = 0.$$

因此 $X_m B = -D_m + X_1 B^m$, 从而有 $-X_m B = D_m$ 。

所以原方程等价于

$$\begin{cases} X_2 = D_1 + X_1 B, \\ X_3 = D_2 + D_1 B + X_1 B^2, \\ X_4 = D_3 + D_2 B + D_1 B^2 + X_1 B^3, \\ \vdots \\ X_m = D_{m-1} + D_{m-2} B + \cdots + D_1 B^{m-2} + X_1 B^{m-1}. \end{cases}$$

令 $X_1 = 0$, 则

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{m-1} + D_{m-2} B + \cdots + D_1 B^{m-2} + X_1 B^{m-1} \end{pmatrix}.$$

证毕。

引理 2.2 设 A 是代数闭域 F 上的 m 次 n 阶幂零矩阵, 则存在 F 上的一个可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & & & \\ & J_{m_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_s}(0) \end{pmatrix},$$

并且 Jordan 块 $J_{m_1}(0), J_{m_2}(0), \cdots, J_{m_s}(0)$ 除排列顺序外, 是由 A 唯一确定的。

证 存在一个列向量 x , 使得 $A^{m-1}x, A^{m-2}x, \cdots, Ax, x$ 线性无关。构造 n 阶可逆矩阵

$$Q = (A^{m-1}x, A^{m-2}x, \cdots, Ax, x, x_{m+1}, \cdots, x_n),$$

则

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} J_m(0) & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 B 是 $n-m$ 阶方阵, C 是 $m \times (n-m)$ 矩阵。由引理 2.1 可得, 存在 F 上的一个可逆矩阵 R , 使得

$$R^{-1} \begin{pmatrix} J_m(0) & C \\ 0 & B \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} J_m(0) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

因此

$$R^{-1} Q^{-1} A Q R = \begin{pmatrix} J_m(0) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 B 是幂零矩阵。由归纳可知, 在 F 上存在一个可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} J_m(0) & & & \\ & J_{m_1}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_s}(0) \end{pmatrix}.$$

下证唯一性。设存在一个可逆矩阵 S , 使得

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} U_{k_1}(0) & & & \\ & U_{k_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_{k_t}(0) \end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1} A^{m-1} P = \begin{pmatrix} J_m(0)^{m-1} & & & \\ & J_{m_1}(0)^{m-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_s}(0)^{m-1} \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} A^{m-1} S = \begin{pmatrix} U_{k_1}(0)^{m-1} & & & \\ & U_{k_2}(0)^{m-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_{k_t}(0)^{m-1} \end{pmatrix}.$$

注意到 $\text{rank}(P^{-1} A^{m-1} P) = \text{rank}(S^{-1} A^{m-1} S)$, 可以得到 $J_m(0), J_{m_1}(0), \dots, J_{m_s}(0)$ 与 $U_{k_1}(0), U_{k_2}(0), \dots, U_{k_t}(0)$ 中的 m 阶方阵个数相同。类似地, 由于 $\text{rank}(P^{-1} A^{m-2} P) = \text{rank}(S^{-1} A^{m-2} S)$, 得到 $J_m(0), J_{m_1}(0), \dots, J_{m_s}(0)$ 与 $U_{k_1}(0), U_{k_2}(0), \dots, U_{k_t}(0)$ 中的 $m-1$ 阶方阵个数相同。依次类推, 得到 $J_m(0), J_{m_1}(0), \dots, J_{m_s}(0)$ 与 $U_{k_1}(0), U_{k_2}(0), \dots, U_{k_t}(0)$ 中的 i 阶方阵个数相同, 其中 $1 \leq i \leq m$ 。因此 Jordan 块 $J_m(0), J_{m_1}(0), \dots, J_{m_s}(0)$ 与 Jordan 块 $U_{k_1}(0), U_{k_2}(0), \dots, U_{k_t}(0)$ 除排列顺序外是相同的。

引理 2.3 设 A 和 B 分别是代数闭域 F 上的 m 阶幂零矩阵、 n 阶可逆矩阵, 则 $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相似于 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 。

证 定义 $M_{m,n}(F)$ 上的变换

$$\alpha(X) = AX - XB,$$

显然, α 是一个线性变换。

下面证明 α 是满射。令 $C \in M_{m,n}(F)$, 如果 $AX - XB = C$, 则 $AX = C + XB$ 。由此得到

$$A^2 X = AC + AXB = AC + (C + XB)B = AC + CB + XB^2,$$

$$\begin{aligned} A^3 X &= A(A^2 X) = A(AC + CB + XB^2) = A^2 C + ACB + CB^2 + XB^3, \\ &\vdots \\ A^n X &= A^{n-1} C + A^{n-2} CB + \cdots + ACB^{n-2} + CB^{n-1} + XB^n. \end{aligned}$$

设 B 的特征多项式为

$$p_B(\lambda) = \det(\lambda I_n - B) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

则

$$\begin{aligned} p_B(A)X &= (A^{n-1}C + A^{n-2}CB + \cdots + ACB^{n-2} + CB^{n-1}) + \cdots \\ &\quad + a_{n-2}(AC + CB) + a_{n-1}C + Xp_B(B) \\ &= (A^{n-1}C + A^{n-2}CB + \cdots + ACB^{n-2} + CB^{n-1}) + \cdots \\ &\quad + a_{n-2}(AC + CB) + a_{n-1}C. \end{aligned}$$

因为 $p_A(\lambda)$ 与 $p_B(\lambda)$ 互素, 所以存在多项式 $u(\lambda)$ 和 $v(\lambda)$, 使得

$$u(\lambda)p_A(\lambda) + v(\lambda)p_B(\lambda) = 1,$$

从而

$$u(A)p_A(A) + v(A)p_B(A) = I.$$

根据 Cayley-Hamilton 定理, 可得

$$v(A)p_B(A) = I.$$

注意到

$$\begin{aligned} v(A)p_B(A)X &= v(A)(A^{n-1}C + A^{n-2}CB + \cdots + ACB^{n-2} + CB^{n-1}) \\ &\quad + \cdots + a_{n-2}v(A)(AC + CB) + a_{n-1}v(A)C, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} X &= v(A)(A^{n-1}C + A^{n-2}CB + \cdots + ACB^{n-2} + CB^{n-1}) + \cdots \\ &\quad + a_{n-2}v(A)(AC + CB) + a_{n-1}v(A)C. \end{aligned}$$

因此 α 是满射, 这也表明矩阵方程 $AX - XB = C$ 有解. 根据 Roth 消去法则可知, $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 相似.

3. 证明

Jordan 标准形定理的证明 用 r 表示满足 $\text{rank} A^r = \text{rank} A^{r+1}$ 的最小正整数. 设线性方程组 $A^r X = 0$ 的基础解系为 $X_1, X_2, \cdots, X_m$, 则 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 线性无关. 构造 n 阶可逆矩阵

$$Q = (X_1, X_2, \cdots, X_m, X_{m+1}, \cdots, X_n).$$

注意到 $\text{span}(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 是 A 的不变子空间, 有

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} N & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

其中 N 是 m 阶方阵, B 是 $n-m$ 阶方阵, C 是 $m \times (n-m)$ 矩阵. 因此

$$Q^{-1}A^r Q = \begin{pmatrix} N^r & * \\ 0 & B^r \end{pmatrix}.$$

从 Q 的构造可知 $N^r = 0$ 。因此 N 是幂零矩阵, B 是可逆矩阵。根据引理 2.3, 存在 F 上的可逆矩阵 P_1 , 使得

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

由引理 2.2 知, 存在 F 上的可逆矩阵 P_2 , 使得

$$P_2^{-1}NP_2 = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & & \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_l}(0) \end{pmatrix},$$

且 Jordan 块 $J_{n_1}(0), J_{n_2}(0), \dots, J_{n_l}(0)$ 除排列顺序外, 是由 N 唯一确定的。因此

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}^{-1} P_1^{-1}AP_1 \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_2^{-1}NP_2 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & & \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_l}(0) \\ & & & & B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

选取 B 的特征值 λ , 存在 F 上的可逆矩阵 P_3 , 使得

$$P_3^{-1}(B - \lambda I_{n-m})P_3 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

其中 N_1 是幂零矩阵, B_1 是可逆矩阵。因此

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} A_1 \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & & \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_l}(0) \\ & & & & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & & \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_l}(0) \\ & & & & P_3^{-1}BP_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & & & \\ & J_{n_2}(0) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{n_l}(0) & \\ & & & & N_1 + \lambda I \\ & & & & & B_1 + \lambda I \end{pmatrix}.$$

由引理 2.2 知, 存在 F 上的可逆矩阵 P_4 , 使得

$$P_4^{-1}N_1P_4 = \begin{pmatrix} J_{n_{l+1}}(0) & & & \\ & J_{n_{l+2}}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_s}(0) \end{pmatrix},$$

且 Jordan 块 $J_{n_{l+1}}(0), J_{n_{l+2}}(0), \dots, J_{n_s}(0)$ 除排列顺序外, 是由 N_1 唯一确定的。令

$$P_5 = P_1 \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & & \\ & P_4 & \\ & & I \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} P_5^{-1}AP_5 &= \begin{pmatrix} I_m & & \\ & P_4 & \\ & & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} A_1 \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & & \\ & P_4 & \\ & & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_m & & \\ & P_4 & \\ & & I \end{pmatrix}^{-1} A_2 \begin{pmatrix} I_m & & \\ & P_4 & \\ & & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{n_l}(0) & & \\ & & & J_{n_{l+1}}(0) + \lambda I & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & J_{n_s}(0) + \lambda I \\ & & & & & & B_1 + \lambda I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

归纳可知, 存在 F 上的可逆矩阵 P , 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_l}(\lambda_l) \end{pmatrix},$$

且 Jordan 块 $J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_l}(\lambda_l)$ 除排列顺序外, 是由 A 唯一确定的。证毕。

基金项目

河北省自然科学基金资助项目(A2022402002)。

参考文献

- [1] Roth, W.E. (1952) The Equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in Matrices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **3**, 392-396. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1952-0047598-3>
- [2] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [3] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2004) *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.
- [4] Jacobson, N. (1953) *Lectures in Abstract Algebra Volume II: Linear Algebra*. Springer-Verlag.