

正交投影算子序列积的相关性质

哈 林

内蒙古大学数学与科学学院, 内蒙古 呼和浩特

收稿日期: 2026年1月9日; 录用日期: 2026年2月2日; 发布日期: 2026年2月9日

摘 要

本文以复可分Hilbert空间为研究背景, 聚焦正交投影算子序列积的相关性质展开探究。记 $\mathcal{E}(H)$ 为该空间全体正压缩算子的集合, $\mathcal{P}(H)$ 为全体正交投影算子的集合。对于 $A \in \mathcal{E}(H)$, $B \in \mathcal{E}(H)$, 定义

$A \circ B = A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}$ 为 A 和 B 的序列积。研究借助空间分解的方法, 推导并证明了正交投影算子序列积在幂运算、广义逆存在性等方面的核心定理。

关键词

量子效应, 正交投影, 序列积, 广义逆

On the Related Properties of the Sequential Product of Orthogonal Projection Operators

Lin Ha

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Received: January 9, 2026; accepted: February 2, 2026; published: February 9, 2026

Abstract

This paper takes the complex separable Hilbert space as the research background and focuses on exploring the relevant properties of the sequential product of orthogonal projection operators. Let $\mathcal{E}(H)$ denote the set of all positive contraction operators on this space, and $\mathcal{P}(H)$ denote the set of all orthogonal projection operators. For $A \in \mathcal{E}(H)$, $B \in \mathcal{E}(H)$, the sequential product of A and B

is defined as $A \circ B = A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}$. By means of the space decomposition method, this study deduces and proves the core theorems of the sequential product of orthogonal projection operators in terms of

power operations and the existence of generalized inverses.

Keywords

Quantum Effect, Orthogonal Projection, Sequential Product, Generalized Inverse

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 H 是复可分的 Hilbert 空间, $B(H)$ 表示 Hilbert 空间 H 上的全体有界线性算子构成的 Banach 空间。若算子 $T \in B(H)$ 满足 $0 \leq T \leq I$ 的正算子, 则称 T 为 Hilbert 空间 H 上的量子效应。全体此类算子构成的集合记为 $\varepsilon(H)$, $\varepsilon(H) = \{T \in B(H) : 0 \leq T \leq I\}$ 。在量子测量理论的框架下, 若 $T \in B(H)$ 同时满足 $T^2 = T = T^*$, 则 T 被称为 sharp effects。 $\mathcal{P}(H) = \{T \in B(H) : T^2 = T = T^*\}$ 表示 Hilbert 空间上所有 sharp 量子效应集合, 这与 Hilbert 空间上的正交投影算子集合相一致。若 T 具有形式

$$T = P \circ Q = P^{\frac{1}{2}} Q P^{\frac{1}{2}}.$$

其中 P 和 Q 为正交投影算子, 则称 T 是 almost sharp。若 T 和 $I - T$ 都是 almost sharp, 则称 T 是 nearly sharp。

若 $T \in B(H)$, 则 $R(T)$, $N(T)$ 和 T^* 分别表示 T 的值域空间, 零空间和共轭算子。若 $T \in \varepsilon(H)$, 用 $T^{\frac{1}{2}}$ 表示 T 的正平方根。对于子空间 $M \subset H$, 其正交补空间记为 $M^\perp$, 闭包记为 $\bar{M}$ 。

序列积是量子测量与量子信息理论的核心概念, Stan Gudder 和 Gabriel Nagy 于 2002 年在首次完成了该概念的公理化定义, 并对其代数结构展开深入分析, 重点探讨了序列积交换性条件等基本性质[1]。针对 almost sharp 算子的判定, 文献[2]给出充要条件: 算子 T 为 almost sharp 当且仅当 $T \leq I$ 且 $\dim R(T - T^2) \leq \dim N(T)$, 同时该文献首次提出 nearly sharp 算子的定义。此外, 杜鸿科教授团队在文献[3]-[5]中围绕量子效应下确界的存在性问题开展研究, 推导并证明了该问题的相关性结论。

下面给出广义逆的相关定义。设 $T \in B(H, K)$, $S \in B(K, H)$ 。若

$$TST = T, \quad STS = S, \quad (TS)^* = TS, \quad (ST)^* = ST,$$

则称 S 为 T 的 Moore-Penrose 逆, 记为 $T^\dagger$; 若

$$TS = ST, \quad STS = S, \quad TST = T,$$

则 T 称为群可逆算子, S 称为 T 的群逆, 简记为 $T^\#$; 若

$$TST = T, \quad R(S) = R(T), \quad N(S) = N(T^*),$$

则 T 称为核可逆算子, S 称为 T 的核可逆, 简记为 T° 。

2. 预备知识

引理 1 [6]: 设 $P \in \mathcal{P}(H)$, $Q \in \mathcal{P}(H)$ 。记 $H_1 = R(P) \cap R(Q)$, $H_2 = R(P) \cap R(Q)^\perp$, $H_3 = R(P)^\perp \cap R(Q)$, $H_4 = R(P)^\perp \cap R(Q)^\perp$, $H_5 = R(P) \ominus (H_1 \oplus H_2)$, $H_6 = R(P)^\perp \ominus (H_3 \oplus H_4)$, 则

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$$

且 $\dim H_5 = \dim H_6$ 。关于此空间分解, P 和 Q 具有如下矩阵形式

$$P = I_1 \oplus I_2 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} I_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = I_1 \oplus 0 \oplus I_3 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & CSR \\ R^*CS & R^*S^2R \end{pmatrix}.$$

其中 I_i 表示子空间 $H_i (i=1,2,3,5)$ 上的恒等算子。 R 是从 H_6 到 H_5 的等距同构算子, S 和 C 是 H_5 上的自伴算子, 并且满足 $0 \leq S \leq I_5$, $0 \leq C \leq I_5$, $C^2 + S^2 = I$ 以及 $N(S) = N(C) = \{0\}$ 。

引理 2 [7]: 设 $A \in B(H)$ 为正算子, k 是任意正整数。则以下结论成立:

- (1) $R(A) \subseteq R\left(A^{\frac{1}{k}}\right)$, 且 $\overline{R(A)} = \overline{R\left(A^{\frac{1}{k}}\right)}$;
- (2) $R(A)$ 是闭当且仅当 $R(A) = R\left(A^{\frac{1}{k}}\right)$;
- (3) $R(A) = H$ 当且仅当 A 是可逆算子。

引理 3 [8] 设 H 为 Hilbert 空间, $T \in B(H)$, $S \in B(H)$ 。若 S 为可逆算子, T 为 Drazin 可逆算子, 则 $S^{-1}TS$ 也是 Drazin 可逆算子, 并且 $(S^{-1}TS)^D = S^{-1}T^D S$ 。

3. 主要结果及其证明

定理 1: 设 $P, Q \in P(H)$ 。令 $T = P \circ Q \in \mathcal{E}(H)$ 且 $I - T = I - P \circ Q \in \mathcal{E}(H)$, 则以下结论成立:

- (1) $T \in P(H)$ 当且仅当对任意有限正整数 n , 均有 $T^n \in P(H)$;
- (2) $I - T \in P(H)$ 当且仅当对任意有限正整数 n , 均有 $P(I - Q)^n P \in P(H)$ 。

证明: 若 $T \in P(H)$, 由引理 1 可得:

$$T = P \circ Q = PQP = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对上述算子等式两边取 n 次幂 (n 为有限正整数), 可得

$$T^n = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} (C^2)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^{2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然 $T^n \in P(H)$ 。

若 $I - T \in P(H)$, 同理可得:

$$(I - T)^n = 0 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus I_4 \oplus \begin{pmatrix} (S^2)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus I_4 \oplus \begin{pmatrix} S^{2n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此外, 易证 $I - PQP = P(I - Q)P$, 因此 $(I - PQP)^n = P(I - Q)^n P$ 。结合 $(I - T)^n = (I - PQP)^n$, 可得 $P(I - Q)^n P \in P(H)$, 即结论(3)得证。

推论 1: 设 $A, B \in \mathcal{E}(H)$ 。则有以下等式成立

- (1) $\underbrace{A \circ \cdots \circ A}_{2n} (A \circ B) = A^{2n} \circ (A \circ B)$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$ 。
- (2) $\underbrace{A \circ \cdots \circ A}_{2n-1} (A \circ B) = A^{2n} \circ B$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$ 。

定理 2: 设 P 和 Q 是 $B(H)$ 中两个正交投影算子。令 $T = P \circ Q = P^{\frac{1}{2}} Q P^{\frac{1}{2}}$, 则以下结论成立:

- (1) $P \circ Q = (P \circ Q) \circ P$ 。
- (2) $(P \circ Q) \circ Q = P \circ (Q \circ P)$ 。
- (3) $T \circ Q = T^2$ 。
- (4) $P \circ T^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}}$, 并且 $R\left(T^{\frac{1}{2}}\right) \subset R(P)$ 。

证明: (1) 由引理 1 中可知

$$P \circ Q = P Q P = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

并且由 $0 \leq C \leq I_5$, 可得

$$(P \circ Q)^{\frac{1}{2}} = (P Q P)^{\frac{1}{2}} = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{aligned} (P \circ Q) \circ P &= (P Q P)^{\frac{1}{2}} P (P Q P)^{\frac{1}{2}} \\ &= I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P Q P = P \circ Q. \end{aligned}$$

即证明 $P \circ Q = (P \circ Q) \circ P$ 。

(2) 由引理 1 可得

$$\begin{aligned} (P \circ Q) \circ Q &= (P Q P) \circ Q = (P Q P)^{\frac{1}{2}} Q (P Q P)^{\frac{1}{2}} \\ &= I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^2 & CSR \\ R^*CS & R^*S^2R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (P Q P)^2 = P \cdot (Q P Q) \cdot P \\ &= P \circ (Q P Q) = P \circ (Q \circ P). \end{aligned}$$

即证明 $(P \circ Q) \circ Q = P \circ (Q \circ P)$ 。

(3) 基于空间分解 $H = \bigoplus_{i=1}^6 H_i$, 可得

$$\begin{aligned} T \circ Q &= T^{\frac{1}{2}} Q T^{\frac{1}{2}} \\ &= I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^2 & CSR \\ R^*CS & R^*S^2R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^2. \end{aligned}$$

(4) 由空间分解 $H = \bigoplus_{i=1}^6 H_i$, 可得

$$P T^{\frac{1}{2}} = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{\frac{1}{2}}.$$

即可得 $R\left(T^{\frac{1}{2}}\right) \subset R(P)$ 。根据上述计算, 我们得到 $PT^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}}$, 对等式两边同时取伴随, 则有 $T^{\frac{1}{2}}P = T^{\frac{1}{2}}$, 可得 $PT^{\frac{1}{2}}P = PT^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{2}}$ 。

定理 3: 设 $T = P \circ Q$, 其中 T 为自伴算子且 P 和 $Q \in \mathcal{P}(H)$ 。则 $T^{\dagger}$, $T^{\#}$, $T^{\otimes}$ 存在当且仅当 $R(C)$ 闭, 并且有以下形式:

$$T^{\#} = T^{\dagger} = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{\otimes}。$$

证明: 基于空间分解 $H = \bigoplus_{i=1}^6 H_i$, 我们有

$$\begin{aligned} P &= I_1 \oplus I_2 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} I_5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Q &= I_1 \oplus 0 \oplus I_3 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & CSR \\ R^*CS & R^*S^2R \end{pmatrix}, \\ T = P \circ Q &= P^{\frac{1}{2}}QP^{\frac{1}{2}} = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

则由 $T^{\dagger}$, $T^{\#}$, $T^{\otimes}$, T^{-1} 的定义可知有以下形式:

$$T^{\#} = I_1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{pmatrix} C^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{\dagger} = T^{\otimes}。$$

致 谢

首先感谢我的指导老师海国君, 在论文撰写过程中老师的悉心指导与专业启发为我提供了关键帮助。同时, 感谢学院里一同探索学术的师长与朋友们, 在思维的交流碰撞中, 他们的见解让我对研究有了更深入的思考, 也感谢家人始终的支持与鼓励, 在此深表谢意。

基金项目

内蒙古自治区自然科学基金(2020ZD01)。

参考文献

- [1] Gudder, S. and Nagy, G. (2001) Sequential Quantum Measurements. *Journal of Mathematical Physics*, **42**, 5212-5222. <https://doi.org/10.1063/1.1407837>
- [2] Arias, A. and Gudder, S. (2004) Almost Sharp Quantum Effects. *Journal of Mathematical Physics*, **45**, 4196-4206. <https://doi.org/10.1063/1.1806532>
- [3] Du, H. and Deng, C. (2005) A New Characterization of Gaps between Two Subspaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **133**, 3065-3070. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-05-07849-4>
- [4] Li, Y., Sun, X. and Chen, Z. (2007) Generalized Infimum and Sequential Product of Quantum Effects. *Journal of Mathematical Physics*, **48**, Article ID: 102101. <https://doi.org/10.1063/1.2785109>
- [5] Yang, J. and Du, H. (2004) A Note on Commutativity up to a Factor of Bounded Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **132**, 1713-1720. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-04-07224-7>
- [6] Böttcher, A. and Spitkovsky, I.M. (2010) A Gentle Guide to the Basics of Two Projections Theory. *Linear Algebra and its Applications*, **432**, 1412-1459. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.11.002>
- [7] Deng, C.Y. and Du, H.K. (2006) Common Complements of Two Subspaces and an Answer of Croß's Question. *Acta*

Mathematica Sinica, **49**, 1099-1112.

- [8] Deng, C.Y. (2007) The Drazin Inverses of Products and Differences of Orthogonal Projections. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **335**, 64-71. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.01.056>