

冲击环境下相依竞争失效串联系统的可靠性分析

王博康

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年1月9日; 录用日期: 2026年2月2日; 发布日期: 2026年2月9日

摘 要

本文主要研究了相依竞争失效过程串联系统的可靠性分析, 其中采用具有不同退化速率和冲击损伤的线性路径模型来描述部件的软失效过程, 利用极值冲击模型和非齐次泊松过程过程建立了硬失效过程可靠性模型。系统的相互依赖行为主要体现在系统中部件之间的相互依赖以及软故障过程和硬故障过程之间复杂的相互依赖关系。在多重相依模型下, 利用随机过程理论和概率论的方法, 导出了串联系统可靠性的显式表达式。

关键词

相依竞争失效过程, 极值冲击, 非齐次泊松过程

Reliability Analysis of Competing Failure Systems under Shock Environments with Series Dependence

Bokang Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: January 9, 2026; accepted: February 2, 2026; published: February 9, 2026

Abstract

This paper focuses on the reliability analysis of series systems subject to interdependent competing failure processes. A linear path model with different degradation rates and impact damage is adopted to characterize the soft failure process of components, while the reliability model for the hard failure process is constructed by combining the extreme shock model with the non-homogeneous Poisson process. The mutual dependence behavior is mainly reflected in the dependence

文章引用: 王博康. 冲击环境下相依竞争失效串联系统的可靠性分析[J]. 理论数学, 2026, 16(2): 129-136.

DOI: 10.12677/pm.2026.162041

among components within the system and the intricate interdependence between the soft and hard failure processes. Under the multiple-dependence modeling framework, an explicit expression for the reliability of the series system is derived by means of stochastic-process theory and probability theory.

Keywords

Interdependent Competing Failure Process, Extreme Shock, Non-Homogeneous Poisson Process

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在工程实践中, 复杂系统在其整个生命周期中往往受到两种多种失效模式相互作用的制约。实际操作系统不可避免地同时经历随机冲击和退化过程: 由外部冲击引起的失效被称为硬失效, 而由内部结构参数的累积退化引起的失效被称为软失效。可靠性领域的研究人员利用各种随机过程对这两种失效机制进行了建模和研究。早期的工作普遍将这两个机制视为独立的, 见文献[1][2]等。随后, 学者们认为冲击可能直接导致系统故障, 也会加速内部退化, 并构建了单向依赖的竞争失效过程模型(DCFPs)。这一模型因其与工程实践的紧密结合而成为当前的研究热点: 当外部冲击强度超过阈值时, 系统发生硬失效; 当内部累积退化达到临界值时, 系统发生软失效。由于冲击经常通过增加退化量或加速退化速率来加剧系统失效, 因此软故障和硬故障形成单向依赖关系。目前, 针对 DCFP 的建模研究已衍生出多维技术路径, 主要包括: 两阶段[3]与多阶段[4]分段退化建模, Liu 等(2017) [5]引入自愈过程建模, 以量化系统在遭受冲击或退化后恢复部分性能的能力, 这一点常见于微电子或生物系统的可靠性分析。Jin 等(2020) [6]利用逆高斯过程的非对称特性, 刻画具有“老化记忆”的退化过程, 适用于磨损失效场景。

DCFPS 系统的可靠性分析已经取得了丰富的结果, 但软失效和硬失效过程之间的相互依赖关系往往被忽视。Hao 等(2017) [7]首先构建了相依竞争失效过程模型(MDCFP), 该模型同时考虑了外部冲击会使退化量额外增加, 并且硬失效阈值也会随时间变化, 在 Gamma 退化过程框架下完成了系统可靠性分析。这一研究突破了传统模型“失效阈值固定”的假设, 首次将冲击与阈值时变的耦合效应纳入建模体系。刘等(2019) [8]通过引入失效过程关联函数来描述两种失效机制的动态交互作用, 首次对交互失效下的单部件系统进行可靠性建模。

尽管在基于 DCFP 和 MDCFP 的单部件系统可靠性研究方面已取得进展, 但在多部件复杂系统相关研究中仍存在显著空白。这是因为多部件系统需同时考虑部件间的结构依赖与状态依赖: 每次冲击对不同部件的影响差异会导致寿命分布的相关性, 使得多部件系统的可靠性分析远比单部件情形复杂。现有关于多部件系统(如微电子中的 MEMS)的研究大多以 DCFP 为框架: Song 等(2014) [9]将单部件 DCFP 扩展到多部件系统并推导了可靠度函数; Song 等(2016) [10]分别探讨了相依冲击作用下串联系统和多状态系统的可靠性; Bian 等(2021, 2023) [11][12]分析了 DCFP 下串联和并联系统的可靠度计算问题。当前多部件系统研究仍存在两个局限: 第一, 常假设硬失效阈值与总退化量无关, 而实际上冲击载荷越大, 部件退化增量越显著; 第二, 未考虑总退化量对硬失效阈值的动态调整, 忽视了软失效过程与硬失效过程之间的相互作用。基于此, 本文旨在推广[11][12]和构造了一个由 n 个异质部件组成的多部件系统模型, 假设: 首先冲击到达过程是一个非齐次泊松过程, 冲击载荷以不同的比例传递到每个部件; 其次, 硬故

障阈值是总降解量的线性函数，冲击载荷影响退化量的增加考虑了软故障过程和硬故障过程之间的相互作用；通过考虑冲击传递对系统内所有部件寿命的影响，考虑了部件之间的结构依赖。基于随机过程理论和多元正态分布的联合概率，给出了系统可靠性函数的显式表达式。

2. 模型描述

在本节中，首先，我们介绍非齐次泊松过程的定义及相关性质。最后，我们给出系统失效的定义，其中包括软失效和硬失效的失效机制。

2.1. 非齐次泊松过程(NHPP)

定义 2.1 计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为强度函数为 $\lambda(t)$ ($t > 0$) 的非齐次的泊松过程，如果满足下列性质：

- (1) $N(0) = 0$ 。
- (2) $\{N(t), t \geq 0\}$ 有独立增量。
- (3) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$ 。
- (4) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$ 。

引理 2.1 服从强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程，累积分布函数为

$$P(N(t) = m) = \frac{[\Lambda(t)]^m}{m!} e^{-\Lambda(t)}, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

其中均值函数为 $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\mu) d\mu$ 。

引理 2.2 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为具有均值函数 $m(t)$ 的非齐次泊松过程。对于任意实数 $t > 0$ ，若给定 $N(t) = n > 0$ ，则过程的前 n 个点发生时间 $T_1, \dots, T_n$ 和 n 个服从 $(0, t)$ 上均匀分布的相互独立随机变量 $U_1, \dots, U_n$ 的次序统计量有相同的 n 维联合分布，即在 $N(t) = n$ 的条件下， $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ 的 n 维条件密度函数为：

$$f(T_1, \dots, T_n)(\tau_1, \dots, \tau_n | N(t) = n) = n! \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(\tau_i)}{\Lambda(t)}, 0 < \tau_1 < \dots < \tau_n \leq t, \quad (2.2)$$

其中 $U_{(i)}$ 是 $U_1, \dots, U_n, i = 1, 2, \dots, n$ 的第 i 个顺序统计量。

2.2. 模型假设

在本节中，为了构建一个全面且可靠的系统可靠性评估框架，我们详细列出了建模过程中所必需的一系列基本模型假设。进一步地，针对实际工程中系统失效表现出的不同特征，我们将失效机制细分为硬失效与软失效两种基本类型，并据此分别建立了硬失效模型——用于刻画那些由于外部冲击引起的突发性失效，以及软失效模型——用于描述系统性能逐渐衰退直至超出阈值的退化性失效。建模用到的符号如下表 1：

Table 1. List of notations

表 1. 符号表

H_i	第 i 个部件的软失效阈值
$D_i(t)$	第 i 个部件在时间 t 的硬失效阈值
T	系统的寿命
$N(t)$	在时间 t 已经到达的冲击次数

续表

W_j	第 j 次冲击的强度
$\lambda(t)$	非齐次泊松过程在时间 t 的随机强度
$\Lambda(t)$	非齐次泊松冲击过程的均值函数
W_{ij}	由第 j 次冲击引起的第 i 个部件件的冲击载荷
v_i	W_{ij} 与 W_j 之间的比率系数
$X_i(t)$	第 i 个组件在时间 t 时的自然退化量
ϕ_i	第 i 个组件的初始降解值
β_i	第 i 个组件的自然降解速率
Y_{ij}	第 j 次冲击引起的第 i 个组件的瞬时损耗增量
γ_i	Y_{ij} 与 W_{ij} 之间的比率系数
ψ_i	退化函数的常数
$S_i(t)$	部件 i 在时间 t 之前因冲击导致的累计退化增量
$X_{S_i}(t)$	第 i 个组件在时间 t 的总退化量
T_j	第 j 次冲击到达的时刻
$E_1^{(m)}(t) \cdots E_n^{(m)}(t)$	在 $N(t) = m$ 的条件下, n 个部件在时间 t 都正常工作的事件
$R_s(t)$	串联系统的可靠性函数

2.2.1. 硬失效

在硬失效建模中,我们假设外部冲击到达服从均值函数为 $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\mu) d\mu$ 的非齐次泊松过程(NHPP)。设 W_j 为第 j 次冲击的强度, $j = 1, 2, \dots$ 。其中 $\{W_j, j = 1, 2, \dots\}$ 是独立同分布的随机变量, $W_j \sim N(\mu_w, \sigma_w^2)$ 给出了建立模型模所需的一些模型假设。第 j 次冲击作用到部件 i 上的冲击载荷 W_{ij} 是 W_j 的线性函数,即 $W_{ij} = v_i W_j$, 其中 v_i 是取决于部件 i 材料结构特性的常数。对于系统的部件 i , 当冲击强度大小超过部件的硬失效阈值 $D_i(t)$ 时, 部件发生失效, 由此导致的系统失效被称为硬失效过程。

2.2.2. 软失效

在设 $X_{S_i}(t)$ 为部件 i 的总退化量, 总退化两包含两部分: 自然退化和累积退化增量, 即 $X_{S_i}(t) = X_i(t) + S_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 其中 $X_i(t)$ 是部件 i 的自然退化量, $S_i(t)$ 是部件 i 的累积退化增量。该自然退化过程由线性退化路径描述, 即 $X_i(t) = \phi_i + \beta_i t$, 其中 ϕ_i 是部件 i 的初始退化量, β_i 是部件 i 的退化速率, 服从正态分布 $N(\mu_{\beta_i}, \sigma_{\beta_i}^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。 β_i 与 W_j 互相独立。假设每次冲击的到来都能加速每个部件的软失效过程, 第 j 次冲击对第 i 个部件造成的退化增量 Y_{ij} 与 W_{ij} 线性相关, 即 $Y_{ij} = \gamma_i W_{ij} + \psi_i$, $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots$, 其中 n 是部件数量, $\gamma_i > 0$, ψ_i 为常数, W_j 与 β_i 相互独立。因此, 直到时间 t , 部件 i 引起的累积降解增量为 $S_i(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。如果 $X_{S_i}(t)$ 超过其软失效阈值 H_i , 则部件 i 发生故障, 由此产生的系统故障被称为软失效过程。

2.2.3. 系统失效

- (1) 对于部件来说, 无论硬失效或软失效哪个先发生, 部件 i 都会失效。
- (2) 在串联系统中, 任意一个部件的失效都会引起系统故障。

3. 系统可靠性分析

下文给出了第 2.2.1 节中介绍的硬故障阈值的详细表达式。极值冲击模型中的部件 i 的硬故障阈值可

表示为

$$D_i(t) = a(X_i(t) + S_i(t-)) + b = a\left(\phi_i + \beta_i t + \sum_{j=1}^{N(t-)} Y_{ij}\right) + b, \quad (3.1)$$

其中 $N(t-)$ 表示 t 之前到达的冲击次数, $a < 0$ 和 b 为常数。

可靠性分析

要获得基于 NHPP 冲击的串联系统在相依竞争失效过程中的可靠性函数, 应首先推导每个单个部件的可靠性以及某些部件组合的可靠性。

给定 $N(t) = m$ 的极值冲击模型下, n 个部件在时间 t 时仍然正常工作, 记为事件 $E_1^{(m)}(t) \cdots E_n^{(m)}(t)$ 。也就是说, 如果第 j 次冲击引起的 n 个部件的冲击负载 $\{W_{ij}, i = 1, 2, \dots, n\}$ 都小于其硬失效阈值 $\{D_i(T_j), i = 1, 2, \dots, n\}$, 且在给定 $N(t) = m$ 的情况下, 每个部件的总退化量都小于其软失效阈值 H_i , 则 n 个部件在时间 t 正常工作, 其中 $m = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ 。则事件 $E_1^{(m)}(t) \cdots E_n^{(m)}(t)$ 的概率 $P(E_1^{(m)}(t) \cdots E_n^{(m)}(t))$ 为

$$\begin{aligned} & P(E_1^{(m)}(t) \cdots E_n^{(m)}(t)) \\ &= P(W_{11} < D_1(T_1), W_{12} < D_1(T_2), \dots, W_{1N(t)} < D_1(T_{N(t)}), X_{S_1}(t) < H_1, \cap \cdots \cap, \\ & \quad W_{n1} < D_n(T_1), W_{n2} < D_n(T_2), \dots, W_{nN(t)} < D_n(T_{N(t)}), X_{S_n}(t) < H_n | N(t) = m) \\ &= \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{m} P\left(v_1 W_1 < a(\phi_1 + \beta_1 \tau_1) + b, \dots, v_1 W_m < a\left[\phi_1 + \beta_1 \tau_m + \sum_{j=1}^{m-1} (\gamma_1 v_1 W_j + \psi_1)\right] + b, \phi_1 + \beta_1 t + \sum_{j=1}^m (\gamma_1 v_1 W_j + \psi_1) < H_1, \cap \cdots \cap, v_n W_1 < a(\phi_n + \beta_n \tau_1) + b, \right. \\ & \quad \left. \dots, v_n W_m < a\left[\phi_n + \beta_n \tau_m + \sum_{j=1}^{m-1} (\gamma_n v_n W_j + \psi_n)\right] + b, \phi_n + \beta_n t + \sum_{j=1}^m (\gamma_n v_n W_j + \psi_n) < H_n\right) \cdot m! \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda(\tau_i)}{\Lambda(t)}\right) d\tau_m \cdots d\tau_1 \\ &= \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{m} \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_n P(v_1 W_1 < a(\phi_1 + z_1 \tau_1) + b, \dots, v_n W_m < a(\phi_1 + z_1 \tau_m + \gamma_1 v_1 \\ & \quad \cdot \sum_{j=1}^{m-1} W_j + (m-1)\psi_1) + b, \gamma_1 v_1 \sum_{j=1}^m W_j < H_1 - \phi_1 - z_1 t - m\psi_1, \cap \cdots \cap, v_n W_1 < a(\phi_n \\ & \quad + z_n \tau_1) + b, \dots, v_n W_m < a\left(\phi_n + z_n \tau_m + \gamma_n v_n \sum_{j=1}^{m-1} W_j + (m-1)\psi_n\right) + b, \gamma_n v_n \sum_{j=1}^m W_j \\ & \quad < H_n - \phi_n - z_n t - m\psi_n) \prod_{j=1}^n f_{\beta_j}(z_j) dz_1 \cdots dz_n m! \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda(\tau_i)}{\Lambda(t)}\right) d\tau_m \cdots d\tau_1 \\ &= \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{m} \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_n P(W_1 < \delta_{1 \cdots n}^{(1)}, \dots, W_m < \delta_{1 \cdots n}^{(m)}) \prod_{j=1}^n f_{\beta_j}(z_j) dz_1 \cdots dz_n \cdot m! \\ & \quad \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda(\tau_i)}{\Lambda(t)}\right) d\tau_m \cdots d\tau_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
\text{其中 } \delta_{1 \dots n}^{(1)} &= \min \left(\frac{a(\phi_1 + z_1 \tau_1) + b}{v_1}, \dots, \frac{a(\phi_n + z_n \tau_1) + b}{v_n} \right), \\
\delta_{1 \dots n}^{(\ell)} &= \min \left(\frac{a \left(\phi_1 + z_1 \tau_\ell + \gamma_1 v_1 \sum_{j=1}^{\ell-1} \delta_{1 \dots n}^{(j)} + (\ell-1) \psi_1 \right) + b}{v_1}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{a \left(\phi_n + z_n \tau_\ell + \gamma_n v_n \sum_{j=1}^{\ell-1} \delta_{1 \dots n}^{(j)} + (\ell-1) \psi_n \right) + b}{v_n} \right), \ell = 2, \dots, m-1; \\
\delta_{1 \dots n}^{(m)} &= \min \left(\frac{a \left(\phi_1 + z_1 \tau_m + \gamma_1 v_1 \sum_{j=1}^{\ell-1} \delta_{1 \dots n}^{(j)} + (m-1) \psi_1 \right) + b}{v_1}, \dots, \frac{a \left(\phi_n + z_n \tau_m + \gamma_n v_n \sum_{j=1}^{\ell-1} \delta_{1 \dots n}^{(j)} + (m-1) \psi_n \right) + b}{v_n}, \right. \\
&\quad \left. \frac{H_1 - \phi_1 - z_1 t - m \psi_1}{\gamma_1 v_1} - \sum_{j=1}^{m-1} \delta_{1 \dots n}^{(j)}, \dots, \frac{H_n - \phi_n - z_n t - m \psi_n}{\gamma_n v_n} - \sum_{j=1}^{m-1} \delta_{1 \dots n}^{(j)} \right).
\end{aligned}$$

定义一个 m 维随机向量 $\mathbf{Q}_{1 \dots n} = (W_1, W_2, \dots, W_m)$, 并且 $\mathbf{Q}_{1 \dots n}$ 服从多元正态分布。它的联合概率密度函数是

$$f_{\mathbf{Q}_{1 \dots n}}(w_1, \dots, w_m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\Sigma_{1 \dots n}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_{1 \dots n} - \boldsymbol{\mu}_{1 \dots n})^\top \Sigma_{1 \dots n}^{-1} (\mathbf{w}_{1 \dots n} - \boldsymbol{\mu}_{1 \dots n}) \right\} \quad (3.3)$$

其中均值向量和协方差矩阵是

$$\boldsymbol{\mu}_{1 \dots n}^\top = (\mu_W \quad \mu_W \quad \cdots \quad \mu_W \quad \mu_W)_{1 \times m}$$

和

$$\Sigma_{1 \dots n} = \begin{pmatrix} \sigma_W^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_W^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_W^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_W^2 \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

因此, 事件 $E_1^{(m)}(t) \cdots E_n^{(m)}(t)$ 发生的概率为

$$\begin{aligned}
&P(E_1^{(m)}(t) \cdots E_n^{(m)}(t)) \\
&= \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{m} \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n} \underbrace{\int_0^{\delta_{1 \dots n}^{(1)}} \cdots \int_0^{\delta_{1 \dots n}^{(m)}}}_{m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\Sigma_{1 \dots n}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_{1 \dots n} - \boldsymbol{\mu}_{1 \dots n})^\top \Sigma_{1 \dots n}^{-1} (\mathbf{w}_{1 \dots n} - \boldsymbol{\mu}_{1 \dots n}) \right\} \\
&\quad \mathrm{d}w_1 \cdots \mathrm{d}w_m \cdot \prod_{j=1}^n f_{\beta_j}(z_j) \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n \cdot m! \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda(\tau_i)}{\Lambda(t)} \right) \mathrm{d}\tau_m \cdots \mathrm{d}\tau_1.
\end{aligned} \quad (3.4)$$

4. 串联系统可靠性函数

根据第3节中的详细推导,我们将在本节中利用第3节的结果,并结合串联系统的失效机制,给出串联系统的可靠性解析表达式。

在模型假设下,根据串联系统的失效机制可知,受相依竞争失效过程影响的串联系统的条件可靠性,相当于在 m 次冲击下 n 个部件在时间 t 正常工作的条件概率。串联系统的条件可靠性可表示如下:

$$P(T > t | N(t) = m) = P(E_1^{(m)}(t) \cdots E_n^{(m)}(t)).$$

结合(2.1)和(3.4),受相依竞争失效过程影响的串联系统的可靠性函数是

$$\begin{aligned} R_s(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} P(T > t | N(t) = m) P(N(t) = m) \\ &= \exp\{-\alpha\Lambda(t)\}^{\beta/\alpha} \cdot \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{H_i - \mu_{\beta_i} t - \varphi_i}{\sigma_{\beta_i} t}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^t \cdots \int_{\tau_{m-1}}^t}_{m} \underbrace{\int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty}}_n \underbrace{\int_0^{\delta_{1 \cdots n}^{(1)}} \cdots \int_0^{\delta_{1 \cdots n}^{(m)}}}_{m} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m} \sqrt{|\Sigma_{1 \cdots n}|}} \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{w}_{1 \cdots n} - \boldsymbol{\mu}_{1 \cdots n})^T \Sigma_{1 \cdots n}^{-1} (\mathbf{w}_{1 \cdots n} - \boldsymbol{\mu}_{1 \cdots n})\right\} d\mathbf{w}_1 \cdots d\mathbf{w}_m \prod_{j=1}^n f_{\beta_j}(z_j) dz_1 \cdots dz_n \cdot m! \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda(\tau_i)}{\Lambda(t)}\right) \\ &\quad d\tau_m \cdots d\tau_1 \cdot \frac{[\Lambda(t)]^m}{m!} e^{\{-\Lambda(t)\}}. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Li, W. and Pham, H. (2005) Reliability Modeling of Multi-State Degraded Systems with Multi-Competing Failures and Random Shocks. *IEEE Transactions on Reliability*, **54**, 297-303. <https://doi.org/10.1109/tr.2005.847278>
- [2] Castro, I.T. (2009) A Model of Imperfect Preventive Maintenance with Dependent Failure Modes. *European Journal of Operational Research*, **196**, 217-224. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2008.02.042>
- [3] Cao, S., Wang, Z., Liu, C., Wu, Q., Li, J. and Ouyang, X. (2023) A Novel Solution for Comprehensive Competing Failure Process Considering Two-Phase Degradation and Non-Poisson Shock. *Reliability Engineering & System Safety*, **239**, 109534. <https://doi.org/10.1016/j.res.2023.109534>
- [4] Wang, J., Ma, X., Yang, L., Qiu, Q., Shang, L. and Wang, J. (2024) A Hybrid Inspection-Replacement Policy for Multi-Stage Degradation Considering Imperfect Inspection with Variable Probabilities. *Reliability Engineering & System Safety*, **241**, Article ID: 109629. <https://doi.org/10.1016/j.res.2023.109629>
- [5] Liu, H., Yeh, R. and Cai, B. (2017) Reliability Modeling for Dependent Competing Failure Processes of Damage Self-Healing Systems. *Computers & Industrial Engineering*, **105**, 55-62. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.12.035>
- [6] Jin, C., Ran, Y., Wang, Z., Huang, G., Xiao, L. and Zhang, G. (2020) Reliability Analysis of Gear Rotation Meta-Action Unit Based on Weibull and Inverse Gaussian Competing Failure Process. *Engineering Failure Analysis*, **117**, Article ID: 104953. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104953>
- [7] Hao, S., Yang, J., Ma, X. and Zhao, Y. (2017) Reliability Modeling for Mutually Dependent Competing Failure Processes Due to Degradation and Random Shocks. *Applied Mathematical Modelling*, **51**, 232-249. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.06.014>
- [8] Liu, H. (2019) Reliability and Maintenance Modeling for Competing Risk Processes with Weibull Inter-Arrival Shocks. *Applied Mathematical Modelling*, **71**, 194-207. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.02.017>
- [9] Song, S., Coit, D.W., Feng, Q. and Peng, H. (2014) Reliability Analysis for Multi-Component Systems Subject to Multiple Dependent Competing Failure Processes. *IEEE Transactions on Reliability*, **63**, 331-345. <https://doi.org/10.1109/tr.2014.2299693>
- [10] Song, S., Coit, D.W. and Feng, Q. (2016) Reliability Analysis of Multiple-Component Series Systems Subject to Hard and Soft Failures with Dependent Shock Effects. *IIE Transactions*, **48**, 720-735. <https://doi.org/10.1080/0740817x.2016.1140922>
- [11] Bian, L., Wang, G. and Duan, F. (2021) Reliability Analysis for Systems Subject to Mutually Dependent Degradation and Shock Processes. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*,

235, 1009-1025. <https://doi.org/10.1177/1748006x211011448>

- [12] Bian, L., Sun, Q., Liu, Y. and Wang, Y. (2023) Reliability Analysis for k-out-of-n (g) Systems Subject to Dependent Competing Failure Processes. *Computers & Industrial Engineering*, **177**, Article ID: 109084.