Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(2), 194-199
Published Online February 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.162048

Hans汉斯

向量优化问题Benson真有效解最优性的二阶弱次微分刻画

马　聪[1,2]，**王其林**[1,2*]

[1]重庆交通大学数学与统计学院，重庆
[2]重庆交通大学复杂系统优化与智能控制重庆市高校重点实验室，重庆

收稿日期：2026年1月12日；录用日期：2026年2月4日；发布日期：2026年2月11日

摘　要

本文主要讨论向量优化问题Benson真有效解最优性条件。利用向量值映射的二阶弱次微分，在较弱的假设条件下，建立了向量优化问题Benson真有效解最优性必要条件和充分条件。同时，建立了复合优化问题最优解的2个充分条件。所获的主要结果改进并推广了文献中相应的结果。

关键词

向量优化问题，Benson真有效解，最优性条件，二阶弱次微分

Second-Order Weak Subdifferential Characterization of Optimality for Benson Properly Efficient Solutions in Vector Optimization Problems

Cong Ma[1,2], **Qilin Wang**[1,2*]

[1]College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing
[2]Key Laboratory of Complex Systems Optimization and Intelligent Control of Chongqing Municipal Education Commission, Chongqing Jiaotong University, Chongqing

Received: January 12, 2026; accepted: February 4, 2026; published: February 11, 2026

Abstract

This paper mainly discusses the optimality conditions for Benson properly efficient solutions in

*通讯作者。

文章引用: 马聪, 王其林. 向量优化问题 Benson 真有效解最优性的二阶弱次微分刻画[J]. 理论数学, 2026, 16(2): 194-199. DOI: 10.12677/pm.2026.162048

vector optimization problems. Using the second-order weak subdifferential of vector-valued mappings, necessary and sufficient conditions for the optimality of Benson properly efficient solutions in vector optimization problems are established under weaker assumptions. Meanwhile, two sufficient conditions for the optimal solution of composite optimization problems are established. The main results obtained improve and generalize the corresponding results in the literature.

Keywords

Vector Optimization Problems, Benson Properly Efficient Solutions, Optimality Conditions, Second-Order Weak Subdifferentials

1. 引言

次微分作为研究最优化问题的重要工具，得到了国内外学者的广泛关注。Rockafellar [1]首先对于实值函数提出了次微分的概念。Borwein [2]利用锥序替代实数序将经典的次微分概念从实值函数的情形推广到向量值函数的情形，同时也提出了向量值函数的近似次微分，并讨论了向量值函数意义下的次微分与共轭函数之间的联系。1990 年，Chen 和 Craven [3]用代数形式定义了一种向量值函数的弱次微分并利用凸集分离定理讨论了这种弱次微分的存在性。2012 年，Mordukhovich 和 Rockafellar [4]建立了实值函数的二阶次微分链式法则，并讨论了其在约束优化问题的一些应用。2021 年，İnceoğlu [5]定义了一种新的二阶弱次微分的概念，证明了该二阶弱次可微函数具有全局最小值的充要条件，并且证明了二阶弱次可微函数是下半连续和下 Lipschitz 的。2023 年，Zhai 等人[6]利用标量化函数推广文献[5]中的次微分。2024 年，Wang 和 Zhang [7]通过标量化的方法引入了向量值映射的新的二阶弱次微分，探讨了其一些性质，并且借助该次微分建立了向量优化问题和复合向量优化问题的弱有效解最优性必要条件和充分条件。据我们所知，到目前为止，还没有利用向量值映射的二阶弱次微分[7]讨论向量优化问题 Benson 真有效解最优性条件。

2. 预备知识

在本文中，设 X 是实赋范线性空间，Y 是实拓向量空间。X^* 和 Y^* 分别为 X 和 Y 的拓扑对偶空间。0_X 和 0_Y 分别为 X 和 Y 的原点。设 $K \subseteq Y$ 为非空闭凸尖锥，$\mathrm{cl}\,K$ 和 $\mathrm{int}\,K$ 定义为 K 的闭包和 K 的内部。

K 的对偶锥 K^+ 定义为

$$K^+ = \left\{ y^* \in Y^* : \left\langle y^*, y \right\rangle \geq 0, \forall y \in K \right\}.$$

K 的严格对偶锥 K^{+i} 定义为

$$K^{+i} = \left\{ y^* \in Y^* : \left\langle y^*, y \right\rangle > 0, \forall y \in K \setminus \left\{ 0_Y \right\} \right\}.$$

设 $A \subseteq Y$ 为非空集合，$\mathrm{cone}(A) = \left\{ \lambda a : a \in A, \lambda \in \mathbb{R}_+ \right\}$ 为 A 的生成锥。

定义 2.1 [7] 设 $S \subseteq X$ 为非空集合，$F : S \to Y$ 是一个向量值映射，$\bar{x} \in S$，$\left(x^*, \lambda, c \right) \in X^* \times K^+ \times \mathbb{R}_+$。如果

$$\left\langle \lambda, F(x) - F(\bar{x}) \right\rangle \geq \left\langle x^*, x - \bar{x} \right\rangle^2 - c\left\| x - \bar{x} \right\|^2, \forall x \in S,$$

则称向量组$\left(x^{*},\lambda,c\right)$为$F$在$\bar{x}$处的二阶弱次梯度。称集合

$$\partial_{w}^{2}F\left(\bar{x}\right)=\left\{\left(x^{*},\lambda,c\right)\in X^{*}\times K^{+}\times\mathbb{R}_{+}:\left\langle\lambda,F\left(x\right)-F\left(\bar{x}\right)\right\rangle\right.$$
$$\left.\geq\left\langle x^{*},x-\bar{x}\right\rangle^{2}-c\left\|x-\bar{x}\right\|^{2},\forall x\in S\right\}$$

是F在$\bar{x}$处的二阶弱次微分。如果$\partial_{w}^{2}F\left(\bar{x}\right)\neq\varnothing$，则称$F$在$\bar{x}$处是二阶弱次可微的。

定义 2.2 [8] 设$S\subseteq X$为非空集合，$F:S\to Y$是一个向量值映射。如果存在$\theta\in\operatorname{int}K$，使得对任意的$\alpha\in\left(0,1\right)$，$x,y\in S$和$\varepsilon>0$，存在$z\in S$和$\eta>0$有

$$\varepsilon\theta+\alpha F\left(x\right)+\left(1-\alpha\right)F\left(y\right)-\eta F\left(z\right)\in K,$$

则称F在S上是广义K-次似凸的。

引理 2.1 [8] 设$S\subseteq X$为非空集合，$F:S\to Y$是一个向量值映射。F在S上是广义K-次似凸的当且仅当$\operatorname{cone}\left(F\left(S\right)\right)+\operatorname{int}K$是凸的。

根据文献[9]中引理 2.2 和引理 2.3，我们可以得到下面的引理 2.2。

引理 2.2 [9] 设$K\subseteq Y$是凸锥且$\operatorname{int}K\neq\varnothing$。设$S\subseteq X$为非空集合，$F:S\to Y$是一个向量值映射，$\bar{x}\in S$，则

$$\operatorname{cl}\left(\operatorname{cone}\left(F\left(S\right)-F\left(\bar{x}\right)\right)+\operatorname{int}K\right)=\operatorname{cl}\left(\operatorname{cone}\left(F\left(S\right)+K-F\left(\bar{x}\right)\right)\right).$$

3. 最优性条件

设S是X的非空子集，$F:S\to Y$是一个向量值映射。本文考虑如下向量优化问题：

$$(\mathrm{VOP})\quad\begin{cases}\min & F\left(x\right),\\ s.t. & x\in S.\end{cases}$$

定义 3.1 [10] 设$\bar{x}\in S$。如果

$$\operatorname{cl}\left(\operatorname{cone}\left(F\left(S\right)+K-F\left(\bar{x}\right)\right)\right)\cap\left(-K\right)=\left\{0_{Y}\right\},$$

则称$\bar{x}$为问题(VOP)的 Benson 真有效解。

为了讨论问题(VOP)的 Benson 真有效解的最优性条件，我们借助于标量化思想，构造如下复合优化问题：

$$(\mathrm{VOP})_{\lambda}\quad\begin{cases}\min & \left\langle\lambda,F\left(x\right)\right\rangle,\\ s.t. & x\in S,\end{cases}$$

其中$\lambda\in Y^{*}\setminus\left\{0_{Y^{*}}\right\}$。

定义 3.2 设$\bar{x}\in S$。如果

$$\left\langle\lambda,F\left(x\right)-F\left(\bar{x}\right)\right\rangle\geq0,\forall x\in S,$$

则称$\bar{x}$是复合优化问题$\left(\mathrm{VOP}\right)_{\lambda}$的最优解。

引理 3.1 [11] 设$N,K\subseteq Y$是闭凸锥且$N\cap K=\left\{0_{Y}\right\}$。若$K$是尖的且满足局部紧性，则

$$\left(-N^{+}\right)\cap\left(K^{+i}\right)\neq\varnothing.$$

根据文献[8]中定理 4.1，我们得到如下引理 3.2。

引理 3.2 [8] 设$\bar{x}\in S$。若存在$\lambda\in K^{+i}$，使得$\bar{x}$是问题$\left(\mathrm{VOP}\right)_{\lambda}$的最优解，则$\bar{x}$是向量优化问题$\left(\mathrm{VOP}\right)$

的 Benson 真有效解。

首先，我们建立问题(VOP) Benson 真有效解的最优性必要条件。

定理 3.1 设 $\bar{x}\in S$， $F-F(\bar{x})$ 在 S 上是广义 K-次似凸的且 K 是局部紧的。若 $\bar{x}$ 是向量优化问题 (VOP) 的 Benson 真有效解，则 F 在 $\bar{x}$ 处是二阶弱次可微的，存在 $\lambda\in K^{+i}$，使得

$$\left(0_{X^*},\lambda,c\right)\in\partial_w^2F(\bar{x}),\forall c\in\mathbb{R}_+.$$

证明： 设 $\bar{x}$ 是向量优化问题 (VOP) 的 Benson 真有效解，则

$$\text{cl}\left(\text{cone}\left(F(S)+K-F(\bar{x})\right)\right)\cap(-K)=\{0_Y\}. \tag{3.1}$$

由 $F-F(\bar{x})$ 在 S 上是广义 K-次似凸的，可得 $\text{cone}\left(F(S)-F(\bar{x})\right)+\text{int}\,K$ 是凸的。根据引理 2.2 可知 $\text{cl}\left(\text{cone}\left(F(S)+K-F(\bar{x})\right)\right)$ 是闭凸锥。

因为 K 是闭凸尖锥且为局部紧集，则根据引理 3.1 与式(3.1)可知

$$\left(\text{cl}\left(\text{cone}\left(F(S)+K-F(\bar{x})\right)\right)\right)^+\cap K^{+i}\neq\varnothing.$$

因此，存在 $\lambda\in K^{+i}$，使得

$$\lambda\in\left(\text{cl}\left(\text{cone}\left(F(S)+K-F(\bar{x})\right)\right)\right)^+.$$

因为

$$\begin{aligned}F(x)-F(\bar{x})&\subseteq F(x)+K-F(\bar{x})\\&\subseteq\text{cl}\left(\text{cone}\left(F(x)+K-F(\bar{x})\right)\right),\forall x\in S,\end{aligned}$$

所以

$$\left\langle\lambda,F(x)-F(\bar{x})\right\rangle\geq 0,\forall x\in S. \tag{3.2}$$

设 $c\in\mathbb{R}_+$。由式(3.2)可得

$$\left\langle\lambda,F(x)-F(\bar{x})\right\rangle\geq\left\langle 0_{X^*},x-\bar{x}\right\rangle^2-c\|x-\bar{x}\|^2,\forall x\in S.$$

故

$$\left(0_{X^*},\lambda,c\right)\in\partial_w^2F(\bar{x}),\forall c\in\mathbb{R}_+,$$

从而，F 在 $\bar{x}$ 处是二阶弱次可微的。 (证毕)

注 3.1 众所周知，广义 K-次似凸性的存在条件比 K-次似凸性的存在条件弱。因此定理 3.1 改进并推广了文献[7]中定理 4.3，例 3.1 说明了这个情况。

例 3.1 设 $S=\{(2,0),(0,2)\}\subseteq X=\mathbb{R}^2$， $Y=\mathbb{R}^2$， $K=\mathbb{R}_+^2$ 和 $F:S\to Y$ 为恒等映射。取 $\bar{x}=(2,0)$。则

$$\text{cone}\left(F(S)-F(\bar{x})\right)+\text{int}\,K=\{(y_1,y_2)\in Y:y_2>-y_1\}$$

和

$$\text{cl}\left(\text{cone}\left(F(S)+K-F(\bar{x})\right)\right)\cap(-K)=\{0_Y\}.$$

因此 $F-F(\bar{x})$ 在 S 上是广义 K-次似凸的，并且 $\bar{x}$ 是向量优化问题 (VOP) 的 Benson 真有效解。

取 $\lambda=(1,1)$。则 $\lambda\in K^{+i}=\mathbb{R}_{++}^2$ 和

$$\left(0_{X^*},\lambda,c\right)\in\partial_w^2F\left(\overline{x}\right),\forall c\in\mathbb{R}_+.$$

因为$F\left(S\right)+\operatorname{int}K$不是凸的，则根据[8]中命题3.2，我们可知$F$在$S$上不是$K$-次似凸的。于是，文献[7]中定理4.3在此处不适用。

根据定理3.1的证明可得如下推论。

推论3.1 设$\overline{x}\in S$，$F-F\left(\overline{x}\right)$在$S$上是广义$K-$次似凸的且$K$是局部紧的。若$\overline{x}$是向量优化问题$\left(\text{VOP}\right)$的Benson真有效解，则存在$\lambda\in K^{+i}$，使得$\overline{x}$是复合优化问题$\left(\text{VOP}\right)_\lambda$的最优解。

定理3.2 设$\overline{x}\in S$。若存在$\lambda\in K^{+i}$，使得

$$\left(0_{X^*},\lambda,c\right)\in\partial_w^2F\left(\overline{x}\right),\forall c\in\mathbb{R}_+,$$

则$\overline{x}$是向量优化问题$\left(\text{VOP}\right)$的Benson真有效解。

证明： 因为$0\in\mathbb{R}_+$和

$$\left(0_{X^*},\lambda,c\right)\in\partial_w^2F\left(\overline{x}\right),\forall c\in\mathbb{R}_+,$$

所以，由定义2.1可得

$$\left\langle\lambda,F\left(x\right)-F\left(\overline{x}\right)\right\rangle\geq\left\langle0_{X^*},x-\overline{x}\right\rangle^2-0\left\|x-\overline{x}\right\|^2=0,\forall x\in S.$$

因此

$$\left\langle\lambda,F\left(x\right)\right\rangle\geq\left\langle\lambda,F\left(\overline{x}\right)\right\rangle,\forall x\in S.$$

故$\overline{x}$是问题$\left(\text{VOP}\right)_\lambda$的最优解。因为$\lambda\in K^{+i}$，则根据引理3.2可知，$\overline{x}$是向量优化问题$\left(\text{VOP}\right)$的Benson真有效解。 (证毕)

注3.2 由于文献[12]中定理3.1是在高阶锥凸的假设条件下得到的，而在定理3.2不涉及高阶锥凸的假设条件，因此定理3.2改进并推广了文献[12]中定理3.1。例3.2说明了这个情况。

例3.2 设$S=X=\mathbb{R}$，$Y=\mathbb{R}^2$，$K=\mathbb{R}_+^2$和$F:S\to Y$定义为$F\left(x\right)=\left(x^2,x^2\right)$。取$\overline{x}=0$和$\lambda=\left(1,1\right)$。则$\lambda\in K^{+i}=\mathbb{R}_{++}^2$，

$$\begin{aligned}&\left(0_{X^*},\lambda,c\right)\in\partial_w^2F\left(\overline{x}\right)\\&\qquad=\left\{\left(x^*,\left(y_1,y_2\right),c\right)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}_+:y_1+y_2+c\geq\left(x^*\right)^2\right\},\forall c\in\mathbb{R}_+\end{aligned}$$

和$\overline{x}$是向量优化问题$\left(\text{VOP}\right)$的Benson真有效解。

取$m=2$，$x_1=2$，$x_2=1$和$\alpha=\frac{1}{2}$。则

$$\alpha^2F\left(x_1\right)+\left(1-\alpha^2\right)F\left(x_2\right)=\left(\frac{7}{4},\frac{7}{4}\right)$$

和

$$F\left(\alpha x_1+\left(1-\alpha\right)x_2\right)=\left(\frac{9}{4},\frac{9}{4}\right).$$

因此

$$\alpha^2F\left(x_1\right)+\left(1-\alpha^2\right)F\left(x_2\right)\notin F\left(\alpha x_1+\left(1-\alpha\right)x_2\right)+K.$$

从而F在S上不是二阶K-凸的。于是文献[12]中定理3.1在此处不适用。

推论 3.2 设 $\bar{x}\in S$。若存在 $\lambda\in K^{+i}$，使得

$$\left(0_{X^*},\lambda,c\right)\in\partial_w^2 F\left(\bar{x}\right),\forall c\in\mathbb{R}_+,$$

则 $\bar{x}$ 是复合优化问题 $\left(\mathrm{VOP}\right)_\lambda$ 的最优解。

基金项目

本文受重庆市教委科学技术研究计划项目(No.KJZD-K202300708)和重庆市研究生科研创新项目(No.CYS240517)资助。

参考文献

[1] Rockafellar, R.T. (1970) Convex Analysis. Princeton University Press.

[2] Borwein, J.M. (1981) A Lagrange Multiplier Theorem and a Sandwich Theorem for Convex Relations. *Mathematica Scandinavica*, **48**, 189-204. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-11911

[3] Chen, G.Y. and Craven, B.D. (1990) A Vector Variational Inequality and Optimization over an Efficient Set. *ZOR Zeitschrift für Operations Research Methods and Models of Operations Research*, **34**, 1-12. https://doi.org/10.1007/bf01415945

[4] Mordukhovich, B.S. and Rockafellar, R.T. (2012) Second-Order Subdifferential Calculus with Applications to Tilt Stability in Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, **22**, 953-986. https://doi.org/10.1137/110852528

[5] Inceoğlu, G. (2021) Some Properties of Second-Order Weak Subdifferentials. *Turkish Journal of Mathematics*, **45**, 955-960. https://doi.org/10.3906/mat-2010-22

[6] Zhai, Y.W., Wang, Q.L. and Tang, T. (2023) Robust Duality for Robust Efficient Solutions in Uncertain Vector Optimization Problems. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **40**, 907-928. https://doi.org/10.1007/s13160-022-00562-7

[7] Wang, Q.L. and Zhang, Y.S. (2024) Second-Order Weak Subdifferentials of Vector-Valued Maps and Its Applications to Optimality Conditions. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **25**, 1853-1865.

[8] Chen, G.Y. and Rong, W.D. (1998) Characterizations of the Benson Proper Efficiency for Nonconvex Vector Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **98**, 365-384. https://doi.org/10.1023/a:1022689517921

[9] Xu, Y.H. and Liu, S.Y. (2003) Benson Proper Efficiency in the Nearly Cone-Subconvexlike Vector Optimization with Set-Valued Functions. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, **18**, 95-102. https://doi.org/10.1007/s11766-003-0089-z

[10] Benson, H.P. (1979) An Improved Definition of Proper Efficiency for Vector Maximization with Respect to Cones. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **71**, 232-241. https://doi.org/10.1016/0022-247x(79)90226-9

[11] Borwein, J.M. (1977) Proper Efficient Points for Maximizations with Respect to Cones. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **15**, 57-63. https://doi.org/10.1137/0315004

[12] Anh, N.L.H. (2018) Higher-Order Generalized Studniarski Epiderivative and Its Applications in Set-Valued Optimization. *Positivity*, **22**, 1371-1385. https://doi.org/10.1007/s11117-018-0582-5