

海森堡超代数上的转置泊松超代数的分类

朱玉颖

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2026年1月14日; 录用日期: 2026年2月5日; 发布日期: 2026年2月11日

摘 要

本文主要研究了海森堡超代数上的转置泊松超代数的自同构和分类。首先介绍了海森堡超代数和转置泊松超代数的定义, 然后对于任意维转置泊松超代数, 计算了海森堡超代数上的转置泊松超代数的代数运算的特点。最后, 研究海森堡超代数上的转置泊松超代数的分类, 找到两个海森堡超代数上的转置泊松超代数同构的条件, 利用转置泊松超代数的反对称双线性函数, 得到任意维海森堡超代数上的转置泊松超代数的完整分类。

关键词

海森堡超代数, 转置泊松超代数, 自同构

Classification of Transposed Poisson Superalgebras over Heisenberg Superalgebras

Yuying Zhu

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: January 14, 2026; accepted: February 5, 2026; published: February 11, 2026

Abstract

This paper mainly investigates the automorphisms and classification of transposed Poisson superalgebras over Heisenberg superalgebras. Firstly, we introduce the definitions of Heisenberg superalgebras and transposed Poisson superalgebras. Then, for transposed Poisson superalgebras of arbitrary dimensions, we calculate the properties of algebraic operations of transposed Poisson superalgebras over Heisenberg superalgebras. Finally, we study the classification of such transposed Poisson superalgebras, obtain the isomorphism conditions between two transposed Poisson

superalgebras over Heisenberg superalgebras, and further derive a complete classification of transposed Poisson superalgebras over Heisenberg superalgebras of arbitrary dimensions by virtue of antisymmetric bilinear functions on transposed Poisson superalgebras.

Keywords

Heisenberg Superalgebra, Transposed Poisson Superalgebra, Automorphism

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

海森堡超代数最早出现在[1]中, 是一类重要的幂零李超代数。海森堡超代数作为超对称量子力学的核心代数结构, 在弦理论与凝聚态物理的拓扑序研究中具有关键意义。转置泊松超代数作为经典与量子力学桥梁的超对称推广, 其在海森堡超代数上的系统分类仍有待深入。关于海森堡超代数有很多研究, 如[2]中研究了海森堡超代数的线性局部自同构, 随后[3]中研究了海森堡 Hom-李超代数的形变。转置泊松超代数是交换结合超代数和李超代数复合得到的一类代数结构, 转置泊松超代数的概念最早是在[4]中引入的, [5]中作者刻画了伽利略型李代数与李超代数上复转置泊松代数的结构, [6]中探讨了块李超代数上的转置泊松结构。类似[5]和[6]中的问题, 本文考虑任意维海森堡超代数上的转置泊松超代数的分类情况。

2. 预备知识

本文的向量空间都是特征不为 0 的代数闭域 K 上的向量空间。

定义 2.1 [1] 设 $A = A_0 \oplus A_1$ 为 $\mathbb{Z}_2$ -阶化的超向量空间, $[\cdot, \cdot]$ 为 A 上的超代数运算, 如果满足以下条件

(1) 超反对称性, 即

$$[x, y] = -(-1)^{|x||y|} [y, x], \quad \forall x, y \in A.$$

(2) 超雅可比恒等式, 即

$$(-1)^{|x||z|} [x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|} [y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|} [z, [x, y]] = 0, \quad \forall x, y, z \in A.$$

则称 $(A, [\cdot, \cdot])$ 为李超代数。

定义 2.2 [7] 设 $H = H_0 \oplus H_1$ 为 $2n+1$ 维超向量空间, e 为 H_0 的基, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 为 H_1 的基。在 H 上定义超反对称的代数运算 $[\cdot, \cdot]$, 其中

$$[a_i, b_j] = \delta_{ij} e, [a_i, a_j] = [b_i, b_j] = [a_i, e] = [b_i, e] = 0, i, j = 1, 2, \dots, n,$$

δ_{ij} 为 Kronecker 符号, 则 $(H, [\cdot, \cdot])$ 是李超代数, 称为海森堡超代数。

定义 2.3 [4] 设 $A = A_0 \oplus A_1$ 为 $\mathbb{Z}_2$ -阶化的超向量空间, $\cdot$ 和 $[\cdot, \cdot]$ 是 A 上的两个代数运算, 若 $(A, \cdot)$ 是交换结合超代数, $(A, [\cdot, \cdot])$ 是李超代数, 且满足

$$2z \cdot [x, y] = [z \cdot x, y] + (-1)^{|x||z|} [x, z \cdot y], \quad \forall x, y, z \in A, \quad (1)$$

则称 $(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 为转置泊松超代数。

3. 海森堡超代数的自同构

定理 3.1 设 $(H = H_0 + H_{\bar{1}}, [,])$ 是 $2n+1$ 维的海森堡超代数, $e, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 是 $(H, [,])$ 的一组基, 在 $H_{\bar{1}}$ 中任取 $X = \sum_{i=1}^n x_i a_i + \sum_{j=1}^n y_j b_j$, $Y = \sum_{s=1}^n z_s a_s + \sum_{t=1}^n k_t b_t$, 令 $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $Y^* = (z_1, z_2, \dots, z_n, k_1, k_2, \dots, k_n)^T$, 则

$$[X, Y] = \left((X^*)^T J Y^* \right) e,$$

其中 $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$, I_n 为 n 阶单位矩阵。

证: 利用 X, Y 的表达式可知

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n x_i z_s [a_i, a_s] + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n x_i k_t [a_i, b_t] + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n y_j z_s [b_j, a_s] + \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^n y_j k_t [b_j, b_t] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^n x_i k_t [a_i, b_t] + \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n y_j z_s [b_j, a_s] \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i k_i - y_i z_i) \right) e. \end{aligned}$$

同时直接计算得

$$\begin{aligned} (X^*)^T J Y^* &= (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \\ -z_1 \\ -z_2 \\ \vdots \\ -z_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i k_i - y_i z_i) \right) e. \end{aligned}$$

因此对任意的 $X, Y \in H_{\bar{1}}$, $[X, Y] = \left((X^*)^T J Y^* \right) e$ 。

定理 3.2 设 $(H, [,])$ 为 $2n+1$ 维海森堡超代数, 则 φ 是 $(H, [,])$ 的自同构当且仅当存在 $M \in \text{GL}(2n, K)$, $\lambda \in K$ 且 $\lambda \neq 0$, 使 $\varphi(e) = \lambda e$ 且

$$\varphi(X)^* = M X^*, \quad M^T J M = \lambda J, \quad \forall X \in H_{\bar{1}}.$$

其中 X^* 为 X 在 H_1^- 的基 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 下的坐标。

证：必要性。由 φ 是 $(H, [\cdot, \cdot])$ 的自同构知 φ 是偶的线性映射，因此 φ 在基 $e, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 下对应的矩阵形如 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ ，其中 $\lambda \in K$ ， $\lambda \neq 0$ ， $M \in \text{GL}(2n, K)$ 。由 φ 是自同构，利用 H 中的代数运算和定理 3.1 知，对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$ ，

$$\varphi([a_i, b_j]) = \delta_{ij} \varphi(e) = \delta_{ij} \lambda e,$$

且

$$[\varphi(a_i), \varphi(b_j)] = (\varphi(a_i))^* J \varphi(b_j) e = (Ma_i^*)^T J (Mb_j^*) e = (M^T JM)_{i, n+j} e,$$

其中 $(M^T JM)_{i, n+j}$ 表示矩阵 $M^T JM$ 中第 i 行，第 $n+j$ 列元素，因此

$$(M^T JM)_{i, n+j} = \lambda \delta_{ij}$$

同理，由定理 3.1 知

$$0 = \varphi([a_i, a_j]) = [\varphi(a_i), \varphi(a_j)] = (\varphi(a_i))^* J \varphi(a_j) e = (Ma_i^*)^T J (Ma_j^*) e = (M^T JM)_{i, j} e,$$

因此， $(M^T JM)_{i, j} = 0$ 。

由

$$0 = \varphi([b_i, b_j]) = [\varphi(b_i), \varphi(b_j)] = (\varphi(b_i))^* J \varphi(b_j) e = [\varphi(b_i), \varphi(b_j)] = (\varphi(b_i))^* J \varphi(b_j) e = (M^T JM)_{n+i, n+j} e,$$

知 $(M^T JM)_{n+i, n+j} = 0$ 。

由

$$\varphi([b_i, a_j]) = -\delta_{ij} \varphi(e) = -\delta_{ij} \lambda e,$$

且

$$[\varphi(b_i), \varphi(a_j)] = (\varphi(b_i))^* J \varphi(a_j) e = (Mb_i^*)^T J (Ma_j^*) e = (M^T JM)_{n+i, j} e,$$

知 $(M^T JM)_{n+i, j} = -\delta_{ij} \lambda$ 。综上可知 $M^T JM = \lambda J$ 。

充分性。若存在 $M \in \text{GL}(2n, K)$ ， $\lambda \in K$ 使得 $\varphi(e) = \lambda e$ ， $\varphi(X)^* = MX^*$ ，则 φ 在 H 的基下对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ 。由 $\lambda \neq 0$ 知 φ 可逆。由定理 3.1 及 $M^T JM = \lambda J$ 知 $\forall X, Y \in H_1^-$ ，

$$\varphi([X, Y]) = \left((\varphi(X))^* J \varphi(Y)^* \right) e = \lambda \left((X^*)^T J Y^* \right) e, \text{ 且}$$

$$[\varphi(X), \varphi(Y)] = \left((\varphi(X))^* J \varphi(Y)^* \right) e = (X^*)^T (M^T JM) Y^* e = \lambda \left((X^*)^T J Y^* \right) e.$$

因此， $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ ， $\forall X, Y \in H_1^-$ 。

当 $X \in H_0$ 或 $Y \in H_0$ 时， $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] = 0$ 。因此， $\forall X, Y \in H$ ， $\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ ，即 φ 为 H 的自同构。

4. 海森堡超代数上的转置泊松超代数

定理 4.1 设 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 为转置泊松超代数， $(H, [\cdot, \cdot])$ 为海森堡超代数，则乘法运算满足

$$H_{\bar{0}} \cdot H_{\bar{0}} = H_{\bar{0}} \cdot H_{\bar{1}} = 0.$$

反之, 设 $(H, [\cdot, \cdot])$ 为海森堡超代数, 在 H 上定义超交换乘法运算, 使得 $H_{\bar{0}} \cdot H_{\bar{0}} = H_{\bar{0}} \cdot H_{\bar{1}} = 0$, 则 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 为转置泊松超代数。

证: 设 e 为 $H_{\bar{0}}$ 的基, $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 为 $H_{\bar{1}}$ 的基, $e \cdot e = \lambda e$,

$$e \cdot a_i = \sum_{s=1}^n k_s a_s + \sum_{j=1}^n l_j b_j, \quad e \cdot b_i = \sum_{s=1}^n c_s a_s + \sum_{j=1}^n d_j b_j,$$

其中 $\lambda, k_s, l_j, c_s, d_j \in K, i, t = 1, 2, \dots, n$ 。

由 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 为转置泊松超代数, 因此

$$2b_i \cdot [e, a_i] = [b_i \cdot e, a_i] + [e, b_i \cdot a_i], \quad i, t = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{因此 } 0 = \left[\sum_{s=1}^n c_s a_s + \sum_{j=1}^n d_j b_j, a_i \right], \text{ 即 } d_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

同理, 由 $2a_i \cdot [e, b_i] = [a_i \cdot e, b_i] + [e, a_i \cdot b_i]$ 知 $k_i = 0$, 由 $2e \cdot [a_i, b_i] = [e \cdot a_i, b_i] + [a_i, e \cdot b_i]$ 知 $\lambda = 0$, 由 $2b_i \cdot [e, b_i] = [b_i \cdot e, b_i] + [e, b_i \cdot b_i]$ 知 $c_i = 0$, 由 $2a_i \cdot [e, a_i] = [a_i \cdot e, a_i] + [e, a_i \cdot a_i]$ 知 $l_i = 0$, 其中 $i, t = 1, 2, \dots, n$, 因此, $H_{\bar{0}} \cdot H_{\bar{0}} = H_{\bar{0}} \cdot H_{\bar{1}} = 0$ 。

反之, 由已知条件, H 上定义的乘法运算满足超交换性。

$\forall x, y, z \in H$, 若 x, y, z 中有一个在 $H_{\bar{0}}$ 中, 由 $H_{\bar{0}} \cdot H_{\bar{0}} = H_{\bar{0}} \cdot H_{\bar{1}} = H_{\bar{1}} \cdot H_{\bar{0}} = 0$ 知 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = 0$ 。若 $\forall x, y, z \in H_{\bar{1}}$, 由 $H_{\bar{1}} \cdot H_{\bar{1}} \subseteq H_{\bar{0}}$ 知 $(x \cdot y) \cdot z = 0 = x \cdot (y \cdot z)$, 因此, $(H, \cdot)$ 为交换结合超代数。

$\forall x, y, z \in H$, 若 x, y, z 中有一个在 $H_{\bar{0}}$ 中, 由 $[H_{\bar{0}}, H_{\bar{1}}] = H_{\bar{0}} \cdot H_{\bar{1}} = 0$ ($i = 0, 1$) 知此时(1)式成立。若 $\forall x, y, z \in H_{\bar{1}}$, 则 $2z \cdot [x, y] \in 2z \cdot H_{\bar{0}} = 0$, 又因为 $[z \cdot x, y] - [x, z \cdot y] \in [H_{\bar{0}}, y] - [x, H_{\bar{0}}] = 0$ 。

因此此时(1)式也成立。综上所述, $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 为转置泊松超代数。

定义 4.1 [4] 设 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot]), (H', \cdot', [\cdot, \cdot]')$ 是转置泊松超代数, φ 为 H 到 H' 的线性映射, 若满足

$$(1) \quad \varphi(x) \cdot' \varphi(y) = \varphi(x \cdot y), \quad \forall x, y \in H,$$

$$(2) \quad [\varphi(x), \varphi(y)]' = \varphi([x, y]), \quad \forall x, y \in H,$$

则称转置泊松超代数 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 与 $(H', \cdot', [\cdot, \cdot]')$ 同构, 记作 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot]) \cong (H', \cdot', [\cdot, \cdot]')$ 。

设 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 为转置泊松超代数, 在 H 上定义 $x \cdot y = B(x, y)e, \forall x, y \in H_{\bar{1}}$, 则 B 为 $H_{\bar{1}}$ 上的双线性函数, 称为转置泊松超代数 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 对应的双线性函数。

定理 4.2 设 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 和 $(H, \cdot', [\cdot, \cdot]')$ 为 $2n+1$ 维转置泊松超代数, $(H, [\cdot, \cdot])$ 为海森堡超代数, φ 为海森堡超代数 $(H, [\cdot, \cdot])$ 的自同构。设 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot]), (H, \cdot', [\cdot, \cdot]')$ 对应的双线性函数分别为 B, B' , C, C' 分别为 B, B' 的度量矩阵, 则 φ 为转置泊松超代数 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 和 $(H, \cdot', [\cdot, \cdot]')$ 的同构当且仅当 φ 在 H 的基 $e, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 下的矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ 满足 $\lambda \neq 0, M \in GL(2n, K)$, 且 $\lambda C = M^T C' M$ 。

证: 必要性。由 φ 是海森堡超代数 $(H, [\cdot, \cdot])$ 的自同构知 φ 可逆, 因此 φ 在基 $e, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 下的矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ 满足 $\lambda \neq 0, M$ 可逆。再由 B, B' 定义知 $\forall x, y \in H_{\bar{1}}$,

$$\varphi(x \cdot y) = \lambda B(x, y)e = \lambda (x^*)^T C y^* e,$$

$$\varphi(x) \cdot' \varphi(y) = B'(\varphi(x), \varphi(y))e = (Mx^*)^T C'(My^*)e = (x^*)^T (M^T C' M) y^* e,$$

因此 $\lambda C = M^T C' M$ 。

充分性。由 $\lambda \neq 0$, $M \in GL(2n, K)$ 知 φ 可逆。由 B 的定义, $\forall x, y \in H_{\bar{1}}$,

$$\varphi(x \cdot y) = B(x, y) \varphi(e) = \lambda B(x, y) e = \lambda (x^*)^T C y^* e,$$

另一方面,

$$\varphi(x) \cdot' \varphi(y) = B'(\varphi(x) \cdot \varphi(y)) e = (Mx^*)^T C' (My^*) = (x^*)^T (M^T C' M)(y)^* e.$$

由 $\lambda C = M^T C' M$ 得 $\varphi(x) \cdot' \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$ 。

$\forall x \in H_{\bar{0}}, y \in H$, 由定理 4.1 知 $H_{\bar{0}} \cdot H = 0$, 从而

$$\varphi(x \cdot y) = 0 = \varphi(x) \cdot' \varphi(y),$$

综上可知, φ 是转置泊松超代数 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 到 $(H, \cdot', [\cdot, \cdot])$ 的同构映射。

命题 4.1 [4] 设 V 是 $2n$ 维向量空间, B 是 V 上的反对称双线性函数, B 的度量矩阵为 C , 则存在矩阵 $M \in GL(2n, K)$, 使得 $M^T C M = \text{diag}(J_r, 0_{2n-2r})$, 其中

$$J_r = \underbrace{\text{diag}(J_1, J_1, \dots, J_1)}_{r \text{ 个}}, J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

0_{2n-2r} 为 $2n-2r$ 阶零矩阵。

定理 4.3 $2n+1$ 维的海森堡超代数 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上的转置泊松超代数 $(H, \cdot', [\cdot, \cdot])$ 共有 $n+1$ 类, 用 $H_0, H_1, \dots, H_n$ 表示, 其中 H_r 的双线性函数对应的度量矩阵为 C_{2r} , $C_{2r} = \text{diag}(J_r, 0_{2n-2r})$, 即 H_r 的基 $e, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 关于超结合代数的代数运算为

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \dots = a_r \cdot b_r = e,$$

其余运算为 0, 其中 $r = 0, 1, \dots, n$ 。

证: 设海森堡超代数 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上的转置泊松超代数 $(H, \cdot', [\cdot, \cdot])$ 的双线性函数分别为 B, B' , C, C' 分别为 B, B' 的度量矩阵, 由定理 4.2 知存在可逆矩阵 M 使得 $\lambda C = M^T C' M$, 由 $\lambda \neq 0$ 知 $r(C) = r(C')$ 。

反之, 若 $r(C) = r(C') = 2r$, 由命题 4.1, 存在矩阵 $M_1, M_2 \in GL(2n, K)$, 使得

$$M_1^T J M_1 = \lambda_1 J, M_2^T J M_2 = \lambda_2 J, M_1^T C M_1 = \text{diag}(J_r, 0_{2n-2r}), M_2^T C' M_2 = \text{diag}(J_r, 0_{2n-2r})$$

令 $M = M_1 M_2^{-1}$, 则

$$M^T J M = (M_1 M_2^{-1})^T J (M_1 M_2^{-1}) = (M_2^{-1})^T M_1^T J M_1 M_2^{-1} = \lambda_1 \lambda_2^{-1} J.$$

$$C' = (M_2^{-1})^T \text{diag}(J_r, 0_{2n-2r}) M_2^{-1} = (M_1 M_2^{-1})^T \text{diag}(J_r, 0_{2n-2r}) M_1 M_2^{-1} = M^T C M.$$

令 $\lambda = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$, 得 $M^T J M = \lambda J$ 定义映射 φ , 使得 φ 在基 $e, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$,

由定理 4.2 知 φ 为转置泊松超代数 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 到 $(H, \cdot', [\cdot, \cdot])$ 的同构映射。

综上可知, 对于 $2n+1$ 维的海森堡超代数 $(H, [\cdot, \cdot])$ 上的转置泊松超代数, 它的双线性函数的度量矩阵的秩只有 $0, 1, 2, \dots, n$ 这 $n+1$ 种情况。当转置泊松超代数的双线性函数对应的度量矩阵的秩为 r 时, 度量矩阵为 $\text{diag}(J_r, 0_{2n-2r})$, 基中的非零运算为 $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = \dots = a_r \cdot b_r = e$ 。

低维例子

当 $n=1$ 时, 设 e 为 $H_{\bar{0}}$ 的基, a_1, b_1 为 $H_{\bar{1}}$ 的基, $e \cdot e = \lambda e$, $e \cdot a_1 = k a_1 + l b_1$, $e \cdot b_1 = c a_1 + d b_1$ 。

由 $(H, \cdot, [\cdot, \cdot])$ 为转置泊松超代数, 因此

$$2b \cdot [e, a_1] = [b_1 \cdot e, a_1] + [e, b_1 \cdot a_1].$$

因此 $0 = [ca_1 + db_1, a_1]$, 即 $d = 0$ 。

同理, 由 $2a_1 \cdot [e, b_1] = [a_1 \cdot e, b_1] + [e, a_1 \cdot b_1]$ 知 $k = 0$, 由 $2e \cdot [a_1, b_1] = [e \cdot a_1, b_1] + [a_1, e \cdot b_1]$ 知 $\lambda = 0$, 由 $2b_1 \cdot [e, b_1] = [b_1 \cdot e, b_1] + [e, b_1 \cdot b_1]$ 知 $c = 0$, 由 $2a_1 \cdot [e, a_1] = [a_1 \cdot e, a_1] + [e, a_1 \cdot a_1]$ 知 $l = 0$, 因此, $e \cdot a_1 = 0$, $e \cdot b_1 = 0$, $a_1 \cdot b_1 = he, e \cdot e = 0$, 其中 h 为任意系数。

参考文献

- [1] Kac, V.G. (1977) A Sketch of Lie Superalgebra Theory. *Communications in Mathematical Physics*, **53**, 31-64. <https://doi.org/10.1007/bf01609166>
- [2] Sheng, Y., Liu, W. and Miao, X. (2025) Local and Linear 2-Local Automorphisms of Heisenberg Lie (Super)Algebras. *Frontiers of Mathematics*, **20**, 335-346. <https://doi.org/10.1007/s11464-023-0061-6>
- [3] Zhu, J. and Chen, L. (2021) Cohomology and Deformations of 3-Dimensional Heisenberg Hom-Lie Superalgebras. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **71**, 335-350. <https://doi.org/10.21136/cmj.2021.0310-19>
- [4] Abramov, V. and Liivapuu, O. (2024) Transposed Poisson Superalgebra. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, **73**, 50-59. <https://doi.org/10.3176/proc.2024.1.06>
- [5] Kaygorodov, I., Lopatkin, V. and Zhang, Z. (2023) Transposed Poisson Structures on Galilean and Solvable Lie Algebras. *Journal of Geometry and Physics*, **187**, Article 104781. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2023.104781>
- [6] Kaygorodov, I. and Khrypchenko, M. (2023) Transposed Poisson Structures on Block Lie Algebras and Superalgebras. *Linear Algebra and its Applications*, **656**, 167-197. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2022.09.024>
- [7] Corwin, L., Ne'eman, Y. and Sternberg, S. (1975) Graded Lie Algebras in Mathematics and Physics (Bose-Fermi Symmetry). *Reviews of Modern Physics*, **47**, 573-603. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.47.573>