

函数的零点的充要条件以及该条件下零点跟定义域的连续条件的证明

林威驰

南宁师范大学数学与统计学院, 广西 南宁

收稿日期: 2026年1月27日; 录用日期: 2026年2月27日; 发布日期: 2026年3月6日

摘要

在中学时我们曾经学过零点存在定理, 当我们随着做题以及学习的深入, 我们会发现一些函数似乎并不能采用零点存在定理来说明零点存在。例如在连续的函数中我们有函数 $f(x) = x^2$ 或者 $y = |x|$ 还有 $f(x) = [x](x \geq 0)$ 等等, 或者说一些间断的函数比如黎曼函数 $R(X)$, 在 $R(X)$ 中, 当 $x = 0$ 或者 $x = 1$ 时取到零点, 但是我们会发现, 因为在定义域 $(0, 1)$ 取的是无理数, 所以, 该函数的零点, 我们找不到零点存在定理的条件, 但又找得到零点。所以综上所述, 我们总能发现 $f(x) = 0$ 这个命题似乎跟零点存在定理的关系是满足零点存在定理一定是零点, 但零点不一定满足零点存在定理。那有没有跟任何函数的零点存在时, 会有一个命题会与之同时存在。或者说 $f(x) = 0$ 的充分必要条件的命题存在。带着这个问题, 我们来进行函数零点的讨论。

关键词

零点, 零点的充要条件, 任意函数

The Necessary and Sufficient Conditions for the Zero Point of a Function and the Proof of the Continuity Condition between the Zero Point and the Domain under This Condition

Weichi Lin

School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

Received: January 27, 2026; accepted: February 27, 2026; published: March 6, 2026

Abstract

In high school, we learned about the zero existence theorem. As we delve deeper into solving problems and learning, we may find that some functions cannot be explained by the zero existence theorem. For example, in continuous functions, we have functions $f(x) = x^2$ or $y = |x|$ and $f(x) = [x] (x \geq 0)$, or in some discontinuous functions such as the Riemann function $R(X)$, in $R(X)$, when $x = 0$ or $x = 1$, the zero point is taken. However, we will find that because we take irrational numbers in the domain, we cannot find the conditions for the existence theorem of the zero point of the function, but we can find the zero point. So, based on the above statements, we can always find that the proposition $f(x) = 0$ seems to be related to the existence theorem of zeros, that is, satisfying the existence theorem of zeros must be zeros, but zeros do not necessarily satisfy the existence theorem of zeros. When there is a zero point with any function, there will be a proposition that exists simultaneously with it. Or in other words, the proposition of sufficient and necessary conditions for $f(x) = 0$ exists. With this question in mind, let's discuss the function zeros.

Keywords

Zero, Necessary and Sufficient Conditions for Zero, Arbitrary Function

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 论函数零点的充要条件及其几何性质——证明与公式

翻折变换: 将函数分为左右两部分时, 将其中的左右两个部分的其中一个进行取相反数的几何变换。

零点的充要条件命题: 将一区间内通过某点, 将其分为左右两部分(无需关于该点进行的任一对称), 将其中一个部分的函数值取相反数得到一新函数, 新函数若跟原来的旧函数的连续区间不变(当然间断区间或者间断点不变), 则该点为零点[1]。

先提出一个观点: 在任意函数中我们将其中一个零点设为 x_0 , 通过这点 x_0 将其定义域分成左右两个区间, 于是就产生一个小于等于 x_0 , 还有大于 x_0 (当然也可以大于等于 x_0 和小于 x_0) 两个分成左右区间的两个部分, 将左边或者右边部分的区间中选其中一个, 并且将其所对应的全体函数值进行取反的相反数, 我们会发现该函数的连续区间以及间断区间依旧是之前的区间。

所以, 我们可以得到一个结论: 若有一个函数, 在他的定义域内存在若干个可数的零点或者存在一个区间的零点, 我们将其中一个零点的左边或者右边进行关于 x 轴的对折可以得到一个新函数, 这个新函数跟之前的旧函数的连续区间以及间断区间完全一致且不改变。

当然, 我们要证明这个观点, 必须根据函数的特征将函数进行分类, 然后进行分类讨论并进行论证。因为, 我们提出的观点其实来自函数的零点进行左右两边的任意一边, 进行关于 x 轴的对折的几何变换, 得到新函数, 在该函数在某一点上是否存在定义, 所以, 这里我们这里将函数根据连续性分为以下类型函数:

连续函数(在定义域内连续)、不连续的函数(存在可数的间断点或者数列等离散型函数)。

以下为我们的证明:

通过之前的分析,我们发现任意连续函数 $f(x)$ 在定义域上除了零点的区间外的一点 x_0 将其左右区间的某一边关于横坐标的对折(接下来陈称之为翻折变换)时,我们会发现都这些不为零点进行翻折变换可以得到一个跳跃间断点,但是,倘若存在间断点的任意函数,进行关于的零点所进行的翻折变换,该存在任意间断点函数的连续区间以及间断点或者间断区间的个数不变。

1.1. 连续函数的零点的几何性质以及充分必要条件的证明

设任意在定义域内连续的函数为 $y = f(x)$, 将其用分段函数进行表达, 例如以下形式:

$$f(x) = \begin{cases} Q(X), & x \leq x_0 \\ P(X), & x > x_0 \end{cases}$$

现我们将其任意两端进行关于 x 轴中进行对折, 成为一个新函数有以下两种形式表达:

$$f_2(x) = \begin{cases} -Q(X), & x < x_0 \\ P(X), & x \geq x_0 \end{cases}$$

或

$$f_2(x) = \begin{cases} Q(X), & x \leq x_0 \\ -P(X), & x > x_0 \end{cases}$$

将 $f(x)$ 不为零点的部分代入 $f_2(x)$, 于是在 $f_2(x)$ 中我们会因为 $Q(X)$ 和 $P(X)$ 不相等而会发生跳跃间断, 且该间断点满足等式 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = P(X_0)$ 。 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = P(X_0)$ [2]。 ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = -P(X_0)$ 。 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = -P(X_0)$ 。)

该等式中, 函数的前半部分为将函数右边的区间进行翻折变换, 或者将函数的后半部分为将函数左边的区间进行关于 x 轴进行对折变换, 从而得到的一条等式。

于是, 我们总结结论: 连续函数在不为 0 的函数定义域内, 进行翻折变换后, 得到的新函数, 我们会跟原来的函数进行比较后, 得到跳跃间断点。

取其逆否命题: 连续的函数在为零点时, 进行翻折变换后, 我们会跟原来函数进行比较后, 得到该新的函数依旧为原来连续区间。

以上为充分条件的证明。

此时将函数 $f(x_0) = 0$, 代入我们会发现此时的函数 $f_2(x) = 0$, 然后我们又会有 $P(X_0) = Q(X_0) = 0 = -P(X_0) = -Q(X_0)$ 。于是可以得到 $f(x)$ 与 $f_2(x)$ 都为连续的函数。

以上为必要条件的证明。

综上所述, 该命题整合的内容为: 连续的函数在不为零点的区间内进行关于 x 轴的对折时会产生间断点而为零点存在的区间中进行之前的对折变换的连续函数依旧为连续函数。

1.2. 存在任意个间断点的函数的零点的几何性质以及充要条件的证明

在这之前我们发现: 连续的函数在零点内进行关于 x 轴的对折变换, 在连续函数的定义域内始终连续。

这是因为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = P(X_0)$ 。 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = P(X_0)$ 。在这条等式中 $f(x_0) = 0$ 代入的话, 我们会发现该等式再配合连续的性质, 该函数在 x_0 连续, 然后, 该连续函数依旧连续。

但是, 我们现在讨论的是存在任意个间断点的函数, 为了看出在该性质下的连续函数以及跟存在在任意个间断点的函数的零点所共有的共同点, 我们从函数的定义出发, 然后会发现, 函数在该区间中连续代表在该区间都有所对应的函数值。

那同样的, 我们会发现间断的函数, 在该间断的区间是没有所对应以及定义的函数值, 于是我们会以下猜测:

任意函数(包括连续的函数和存在间断点的函数), 若在其定义区间内, 我们会有一个零点, 在该零点的左侧或者右侧中的任意一侧的所有区间所对应的函数值进行取相反数(参考之前描述的翻折变换), 该函数在定义域依旧保持自己的连续性以及间断点的存在性。

因为之前我们已经证明了连续的函数, 但我们现在讨论的是存在间断点的函数。

所以不如将存在间断点函数中的黎曼函数进行研究。(因为黎曼函数, 在区间 $[0, 1]$ 是有无数个间断点, 若将函数进行仿射变换中的相似变换后, 我们将在其中找到若干个存在间断点的函数影子, 可以取相似变换后的黎曼函数的一个类似区间进行研究, 所以我们的证明方法可以用归纳法进行证明。)

先将黎曼函数 $R(X) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \cap \text{无理数数集} \\ 1/q, & x \in [0, 1] \cap \text{有理数数集} \end{cases}$ 表达出来, 然后, 我们取任意零点, 如 $x = e - 1$ 代入黎曼函数可知其该函数的零点, 将其函数 $R(X)$ 左部分或者右部分进行取相反数, 得到新的黎曼函数

$$R(X) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \cap \text{无理数数集} \\ 1/q, & x \in [0, e-1] \cap \text{有理数数集}, \\ -\frac{1}{q}, & x \in [e-1, 1] \cap \text{有理数数集} \end{cases}$$

或

$$R(X) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \cap \text{无理数数集} \\ 1/q, & x \in [0, e-1] \cap \text{有理数数集} \\ \frac{1}{q}, & x \in [e-1, 1] \cap \text{有理数数集} \end{cases}$$

这里我们会发现无论新的黎曼函数无论取以上哪一种, 我们都会发现, 他依旧保持跟原来黎曼函数在有理数集和无理数集的连续和间断的几何性质。

同理, 如果将 $x = e - 1$ 换成 $x = x_0$, $x_0 \in R$, R 为实数集, 且 $x = x_0$ 都为函数的零点集合, 为了使实数集为黎曼函数 $R(X)$ 的定义域, 将黎曼函数进行实数集的拓展, 变为 $R(X) = \begin{cases} 0, & x \in \text{无理数数集} \\ 1/q, & x \in \text{有理数数集} \end{cases}$ 。

(q 为有理数)于是将这个拓展的黎曼函数进行仿射变换[3]。(因为, 仿射变换具有结合性与同素性, 可以保持原来函数的一些性质, 如: 零点的个数, 连续区间或者间断区间的个数。)

当然, 此时我们要研究的对象是关于有限个间断点的函数的零点的几何性质, 在仿射变换中, 只有相似变换才可以将函数图像改变后保持其原有的几何性质, 于是, 我们又可以将函数 $R(X)$ 进行如下相似变换:

$$\begin{cases} x' = k_{11}x + k_{12}y + a_{13} \\ y' = k_{21}x + k_{22}y + a_{23} \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad a_{13} \text{ 和 } a_{23} \text{ 都为任意实数}$$

注意, 因为 $k_{ij} (i=1,2,3; j=1,2,3)$, a_{13} , a_{23} 都为实数, 所以函数的定义域将会拓展到全体实数, 且之前的函数值在有理数取到, 现在会在无理数数集一样可以取到。因为该变换属于仿射变换, 利用仿射变换的同素性, 结合性, 平行性。我们会在该仿射变换中的黎曼函数集的函数集合内找到存在任意间断区间或者点的函数的图像片段。

也就是说我们可以在有一函数的某一区间内的函数值的集合中, 会有在这个仿射变换的黎曼函数里存在并且符合。

所以, 在任意的存在间断点的函数, 都可在相似变换中的黎曼函数集合函数中可以找到, 有了以上条件, 任意存在可数的间断点函数有零点时, 将该零点的左右的任意一个区间的全体函数值取其的相反数, 得到新的函数, 该函数会有跟原函数一样的连续区间以及间断区间。

综上所述, 无论是连续的函数或者存在可数的任意间断点的函数, 当他们存在零点时, 通过零点将其定义域分为两部分, 经过关于 x 轴的变换后, 该函数连续的区间以及间断区间还是原来的区间。

2. 函数的零点的充要条件以及该命题的几何性质——应用以及推广

2.1. 零点充要条件的推广

先提出推广命题: 若将函数进行关于 x 轴进行对折得到新的函数后若跟原函数有一交点, 则这一点为两个函数的零点。

之前的证明我们得到了一个等式 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = P(X_0)$ 。 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = P(X_0)$ 。这个等式里的函数如 $f_2(x)$ 等跟之前证明里说的一致。

应用之前的分段函数:

$$f(x) = \begin{cases} Q(X), & x \leq x_0 \\ P(X), & x \geq x_0 \end{cases}$$

将以上的函数表达式推广至任意函数的同时我们设另一函数 $f_2(x)$ 。且表达式如下:

$$f_2(x) = \begin{cases} -Q(X), & x \leq x_0 \\ P(X), & x \geq x_0 \end{cases}$$

当然, 也可以为以下表达式:

$$f_2(x) = \begin{cases} Q(X), & x \leq x_0 \\ -P(X), & x \geq x_0 \end{cases}$$

这时我们会发现 $f(x) = 0$ 时, 正如证明里得到的另外等式 $\pm P(X) = \pm Q(X) = 0$, 利用

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = P(X_0)$ 。 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = P(X_0)$ 。我们可以得到 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x_0) = f_2(x_0) = f(x_0) = 0$ 及为该函数的零点。

当我们取其逆否命题, 可以得到: 当等式 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = P(X_0)$ 。

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_2(x) = -Q(X_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = P(X_0)$ 。所以有条件当 $-Q(X_0) \neq f_2(x_0)$ 则 $f(x_0)$ 不是零点。

证明结束后我们开始利用这个推广进行总结: 若将函数进行关于 x 轴进行对折得到新的函数后若跟原函数有一交点, 则这一点为两个函数的零点。

2.2. 函数的零点充要条件的命题的运用

最近我们在某娱乐短视频平台中看到过一个等式 $\boxed{x+a=x}$, 求解其方程, 这里的 $a \in R$, 一些娱乐博主就是两边平方, 移项求得一个实数根为 $x = -a/2$, 如果, a 不为 0 代入原式, 我们就会明白它并不是方

程的解，然而，该方程的解法的过程似乎是对的。

这是因为该方程将其平方后同时全部移项左边化为函数，得到的方程解代入该函数得到的点为 $\left(\frac{-a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$ ，于是我们就明白了，由于平方后两边的方程的有一边的式子在 $\left(\frac{-a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$ 上原本不连续，现在却在这一点连续，才导致如此的结果。

现在，我们将该方程左右两边平方，然后都分别赋予函数，然后有函数 $f(x) = (x+a)^2$ ， $g(x) = x^2$ 于是该图像在笛卡尔平面上，会有一个交点，也就是 $\left(\frac{-a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$ 将该交点的对应的函数值取相反数也就为 $-\frac{a^2}{4}$ ，然后，会有将式子 $(x+a)^2 - x^2$ 赋给函数 $T(X)$ ，于是该函数 $T(X) = 2ax + a^2$ 。令 $2a = k$ 且 $k \in R$ ，再将 $a^2 = b$ ，于是 $b > 0$ 。将 $T(X) = kx + b$ ，其中 $b > 0$ ，当然不能忘记该函数的定点 $\left(\frac{-a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$ ，先将该函数的定点的函数值化成相反数 $\left(\frac{-a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$ 。因为经过对折变换过的函数在原本的定点中并不连续了，所以，该方程是没有解的。

其中， a 不为零，所以该函数是没有零点的，利用该零点的充分必要条件的性质我们似乎不会再有对类似的方程中有“解法过程是对的，但结果出错”的情况而产生疑问且命题：方程 $\boxed{x+a=x}$ 在两边平方这种运算是导致两边函数在某点 $x = x_0$ 互为相反数时，将二者的平方数相等后，得到的一个错误的解。

2.3. 补充——关于离散函数的零点解决问题以及几何性质

当我们有时会因为函数的一边没有定义，或者说我们的函数在区间 $[a, b]$ 上有定义，但零点却在 a 和 b 这两个实数上，导致无法将定义域拆成两个区间。

这时我们可将函数进行链接，如将原本定义域在区间 $[a, b]$ 中的函数，在小于等于 a 或者大于等于 b 的区间中随意定义一个在任意实数中连续或者在该区间中连续的函数进行链接，从而成为一个分段的函数。再将该函数用定理进行检验其结果来确认是否为该函数的零点。

以下为证明：

有函数 $f(x)$ 为在区间 $[a, b]$ 上有定义，先将该函数进行如下变换：

当函数 $f(x) = \begin{cases} P(X), & x \leq b \\ Q(X), & x \geq a \end{cases}$ ，在区间 $[a, b]$ 为函数 $G(x)$ ，在这里 $P(x)$ 与 $Q(X)$ 还有 $G(x)$ 中这三个函

数为任意函数但在各个区间上，这三个函数在对应的区间中都会连续。

若函数 $f(x)$ 在实数集上连续，假设 a 或者 b 为该函数的零点，利用之前的证明 1.1 或者 1.2 都可行。很快我们就会发现这个之前跟这节开头说的结果完全一致。

现在，我们将举个例子：

先假设一个函数为 $f(x) = \ln(1+x)$ ，定义域 $x \in [0, +\infty]$ 容易发现，该函数在 $x = 0$ 上有零点，现有赋予函数在小于 0 的区间上为 $y = x$ ，所以有新的函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ ，不难看出该函数在 $x = 0$ 的区间上，这个新的函数在区间 R 上依旧连续。

然后将函数 x 小于 0 的部分进行关于 x 轴进行对折，得到新的函数 $g(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ，可以看出该函数依旧在实数集上连续。

所以可以得到该函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 上是一个零点，并且 $g(x)$ 在该点也为一个零点。

当然我们还有，如果一函数他的区间是离散的例如：数列，离散型随机分布，离散函数的函数列等等[4]。当然遇到这种情况，他们的间断点无穷多不可数，且将其的函数值全部用线段连接后，变成一个连续的函数，再将其利用函数的一端进行关于 x 轴的对折，观察其在原来函数的区间来检验是否保持连续。(这个方法只可用在间断点无穷多，或者有间断区间是连续或者部分连续的情况下进行的。)

综上所述，这个函数的零点充分必要条件可以检验任意函数的零点的存在情形，以及得到该函数的零点的解法是否存在问题。

这里说明下，为什么会在这里说明离散函数这些存在无穷多的间断点的函数关于零点的证明——因为这些证明并不是所谓要独立讨论的函数，他们也可以用证明 1.2 那样证明，同时，这个证明有点类似连续函数的零点的几何性质以及充分必要条件的证明的应用，故而放在此处进行讨论。

参考文献

- [1] 人民出版社, 课程教材研究所, 数学课教材研究. 高中数学人教版(必修一) [M]. 北京: 人民教育出版社, 1970.
- [2] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(上) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [3] 梅向明, 刘增贤, 王汇淳, 王智秋. 高等几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [4] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析(下) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.