**Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(3), 57-60**
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.163068

# 链条件对有限群结构的影响

**曾瑜柔，黄泓珲**

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2026年1月27日；录用日期：2026年2月27日；发布日期：2026年3月6日

## 摘 要

主要利用主对角子群的嵌入性质以及相应的链条件给出有限群超可解性的刻画。此外，还刻画了满足链条件的有限群的极大子群。

## 关键词

有限群，主对角子群，置换化子，超可解群，链条件

# The Influence of the Chain Conditions on the Structure of Finite Groups

**Yurou Zeng, Honghui Huang**

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: January 27, 2026; accepted: February 27, 2026; published: March 6, 2026

## Abstract

**The hyper-solvability of finite groups is characterized primarily by employing embedding properties of chief diagonal subgroups and the corresponding chain conditions. In addition, maximal subgroups of finite groups satisfying chain conditions are also characterized.**

## Keywords

**Finite Group, Main Diagonal Subgroup, Permutizer, Supersoluble Group, Chain Condition**



文章引用：曾瑜柔，黄泓珲．链条件对有限群结构的影响[J]．理论数学, 2026, 16(3): 57-60.
DOI: 10.12677/pm.2026.163068

## 1. 引言

本文所考虑的群都是有限群，$G$ 总是表示有限群。子群的嵌入性质对有限群结构有非常重要的影响。比如，$G$ 的每个极大子群都是正规的充要条件是 $G$ 是幂零的；$G$ 的每个极大子群都是素数指数的充要条件是 $G$ 是超可解的。

令 $G$ 为有限群。记 $D(G)=\{(g,g)\mid g\in G\}$，为 $G\times G$ 的主对角子群。许多学者通过主对角子群的嵌入性质研究有限群的结构，并获得了不少有意义的结果。在文献[1]中，乔守红等学者证明了，$G$ 是交换群的充分必要条件是 $D(G)$ 在 $G\times G$ 中是正规的；$G$ 是幂零群的充分必要条件是 $D(G)$ 在 $G\times G$ 中是次正规的。

在最近的研究中，黄泓珲和乔守红等人在文献[2]中提出链条件，通过研究主对角子群在直积中的置换化子来刻画有限群的群结构，给出了有限群 $G$ 满足链条件时的结构特征。在本文中，我们将继续这方面的研究，利用链条件刻画有限群 $G$ 的性质和结构。

## 2. 预备知识

为了定理叙述及证明的需要，在本节中，我们给出后文所需要的一些定义和引理。

**定义 2.1** [2]：设 $H$ 为群 $G$ 的子群，则 $H$ 在 $G$ 中的置换化子定义为：

$$P_G(H)=\langle x\in G\mid H\langle x\rangle=\langle x\rangle H\rangle。$$

**定义 2.2** [2]：我们称有限群 $G$ 满足链条件，如果存在一条由 $D(G)$ 到 $G\times G$ 的子群链

$$D(G)=M_0\le M_1\le\cdots\le M_t=G\times G$$

使得 $M_{i+1}\le P_{G\times G}(M_i)$ 对 $i=0,1,\cdots,t-1$ 成立。

**定义 2.3** [3]：设 $\lambda:G\to S_4$ 是一个 $G$ 到 $S_4$ 的满同态，令 $D_\lambda(G)$ 为 $\lambda$ 下 4 阶正规子群的原像，则定义 *Kegel’s* $D$ -子群为：

$$D(G)=\bigcap\nolimits_\lambda D_\lambda(G)。$$

**引理 2.4** [4]：设 $G$ 为有限群，若 $A$ 为 $G$ 的一个交换正规子群满足 $\Phi(G)\cap A=1$，则存在子群 $H$ 使得 $G=HA$ 并且 $H\cap A=1$。

**引理 2.5** [4]：超可解群为饱和群系，即 $G/\Phi(G)$ 超可解蕴含 $G$ 超可解。

**引理 2.6** [5]：设 $G$ 为超可解群，则 $G$ 的任一子群 $N$ 也超可解。

**引理 2.7** [2]：设 $G$ 是有限群。则 $G$ 满足链条件当且仅当 $G$ 的所有主因子 $T$ 要么是循环的，要么阶等于 4 且 $G/C_G(T)\cong S_3$。

**注**：由引理 2.7，若有限群 $G$ 满足链条件且 4 不整除 $|G|$，则主因子的阶必为素数。此时，$G$ 满足链条件等价于 $G$ 超可解。

另外，根据引理 2.7，4 次对称群 $S_4$ 满足链条件。但是其导群 $A_4$ 却不满足链条件。因此链条件并不是(正规)子群遗传的。

**引理 2.8** [2]：设 $G$ 为有限群且满足链条件。那么 $G/O_2'(G)$ 是一个 $\{2,3\}$ -群。

**引理 2.9** [2]：设 $G$ 为有限群且满足链条件。那么 $G$ 为超可解群当且仅当 $G$ 没有同构于 $S_4$ 的商群。

## 3. 主要结果及其证明

**定理 3.1**：有限群 $G$ 超可解当且仅当 $G$ 与导群 $G'$ 均满足链条件。

**证明**：只需要证明定理的必要性，充分性是显然的。

假设 $G$ 与 $G'$ 满足链条件且 $G$ 为非超可解群的极小阶反例。由链条件是商群遗传的，有 $G/A$ 满足链条件，且 $G'A/A \cong G'/A \cap G'$ 也满足链条件。由归纳法，$G$ 存在极小正规子群 $A$ 使得 $G/A$ 是超可解群。此时，$A$ 是唯一的。若 $A$ 不唯一，设 $A$、$B$ 为任意两个不同的极小正规子群。考虑其商群 $G/A$ 与 $G/B$，其中 $G/A$ 与 $G/B$ 均是超可解的。由于超可解群类是群系，故 $G \cong G/A \cap B$ 超可解，矛盾。

由引理 2.7 以及 $G$ 为极小阶反例，可知 $G$ 是可解的且 $|A| = 4$。若 $\Phi(G) \neq 1$，则取 $A \le \Phi(G)$。此时，$G/A$ 的超可解性蕴含了 $G$ 的超可解性，矛盾于 $G$ 为极小阶反例。因此 $\Phi(G) = 1$。由引理 2.4，$A$ 在 $G$ 有补 $X$ 且 $X \cap A = 1$。又因 $A$ 是唯一的极小正规子群，$C_X(A) = 1$。故有 $C_G(A) = A$。由 $G/C_G(A) \cong S_3$，我们有 $G \cong S_4$ 且 $G' \cong A_4$。根据引理 2.7 及其注，$A_4$ 不满足链条件，矛盾。我们证明了此定理。

下面我们来探讨满足链条件的有限群的极大子群具有的性质，这对进一步研究链条件有重要意义。

**定理 3.2：**设有限群 $G$ 满足链条件，则有下列结论成立：

1) $G$ 的极大子群 $M$ 的指数为 4 或者某个素数 $p$。

2) $G$ 的极大子群 $M$ 存在素数幂阶的循环补。

**证明：**

1) 任取 $G$ 的主群列

$$G = H_0 > H_1 > \cdots > H_n = 1，$$

则存在某个 $i$ 使得 $H_i \le M$ 且 $H_{i-1} \not\le M$。因此 $MH_{i-1} = G$。取 $M/H_i$ 为商群 $G/H_i$ 的极大子群。因为 $H_{i-1}/H_i$ 为商群 $G/H_i$ 的极小正规子群，根据引理 2.7，$H_{i-1}/H_i$ 的阶为 4 或者某个素数 $p$。由于 $(M/H_i)(H_{i-1}/H_i) = G/H_i$，$M/H_i$ 在 $G/H_i$ 中的指数为 4 或者某个素数 $p$。因此，$M$ 在 $G$ 中的指数为 4 或者素数 $p$。

2) 根据定理(1)的证明可以得到 $|G:M| = p$ 或 4。当 $|G:M| = p$ 时，任取 $x \in M$，但 $x \notin G$。我们可以得到 $M$ 存在素数幂阶的循环补。下面考虑 $|G:M| = 4$ 的情况。

设 $|G:M| = 4$。考虑 $G$ 在右陪集集合 $[G:X]$ 上的右乘作用。由于 $M$ 的指数为 4，故

$$G/M_G \lesssim S_4。$$

当 $M_G \neq 1$ 时，对 $G$ 的阶做归纳。有 $G/M_G = (M/M_G)\langle xM_G \rangle$。此时，$G = M\langle x \rangle$。假设 $M_G = 1$，即：$G \lesssim S_4$。考虑 $S_4$ 中存在指数为 4 的极大子群的子群，即考虑 $S_4$ 中阶整除 4 的所有子群，在同构的意义下包括：$S_4$，$A_4$，$D_8$。

对于 $A_4$，根据引理 2.7 及其注，$A_4$ 不满足链条件；对于 $D_8$，考虑 $M$ 为 $D_8$ 中指数为 4 的群。因此 $M$ 为其 2 阶极大子群，矛盾。因此，$G \cong S_4$，$M \cong S_3$，即同构于指数为 4 的 $S_4$ 的极大子群，则 $M$ 存在循环补。由此得到结论：$M$ 存在素数幂阶的循环补。定理得证。

为了研究群结构，参考文献[3]中我们引入 $Kegel's\ D$-子群的定义(定义 2.3)，下面我们证明一个相关定理。

**定理 3.3：**设 $G$ 为有限群且满足链条件，令 $N$ 为 $G$ 的非平凡正规子群。则以下结论等价：

1) $N$ 是超可解群；

2) $S_4$ 和 $A_4$ 都不是 $N$ 的像；

3) $N \le D(G)$。

**证明：**

(1) $\to$ (2)由 $N$ 为超可解群，且链条件对商群遗传，则 $N$ 的商群满足链条件且超可解。则 $N/Ker(\lambda)$ 超可解且满足链条件。由引理 2.9，$N/Ker(\lambda)$ 不同构 $S_4$。又 $A_4$ 不满足链条件可得 $S_4$ 和 $A_4$ 都不是 $N$ 的像。

(2) $\to$ (3)设满足(2)但不满足(3)，即对于一些满同态 $\lambda$，$N$ 不是 $D_\lambda(G)$ 的子群。又正规子群的同态

像为正规子群，故 $N$ 的像是 $S_4$ 或 $A_4$，矛盾。

(3) $\rightarrow$ (1)由定理 3.2(2)，所有 $G$ 的极大子群都有素数幂阶的循环补。根据参考文献[6]，$D(G)$ 超可解。由引理 2.6 且 $N \le D(G)$，可得 $N$ 超可解。

完成证明。

**定理 3.4：** 设 $G$ 为有限群且满足链条件，则 $G$ 超可解当且仅当 $G$ 的所有正规极大子群 $H$，且对 $H$ 的任一极大子群 $K$，有 $P_H(K) = H$。

**证明：** 定理的必要性是显然的，下面仅证明充分性。

设 $G$ 为最小阶反例。由引理 2.7，$G$ 是可解的。令 $M$ 为 $G$ 的任一极大正规子群，则有 $G/M$ 是素数阶的。从而，$G' \le M$。

令 $N$ 为 $G$ 的极小正规子群。由归纳假设，链条件被商群遗传，故 $G/N$ 满足此定理。由假设条件，可以得到 $N$ 是唯一的，所以 $N$ 包含于 $G'$ 中，且 $G/N$ 超可解。

由于 $G$ 可解，其中 $N$ 为初等交换 $p$-群，其中 $p$ 为某素数。因为 $G$ 非超可解，故存在 $|N| = 4$。若 $\Phi(G) \ne 1$，有 $N \le \Phi(G)$。但 $G/\Phi(G) \cong (G/N)/(\Phi(G)/N)$，则 $G/\Phi(G)$ 超可解。根据引理 2.6 可得 $G$ 超可解，矛盾。于是我们可以假设 $\Phi(G) = 1$。又 $N$ 初等交换，故 $N$ 在 $G$ 中有补 $X$，且 $N \cap X = 1$，其中 $G = NX$。由于 $N$ 是唯一的，可以得到 $X_G = 1$。考虑 $G$ 在右陪集集合 $[G:X]$ 上的右乘作用，有 $G \lesssim S_{[G:X]} = S_4$。

因为 $S_4$ 的子群中只有 $S_4$ 和 $A_4$ 是不超可解的，所以 $G \cong A_4$ 或 $S_4$。根据引理 2.7 及其注，$A_4$ 不满足链条件。因此，$G \cong S_4$。然而，$G$ 的极大正规子群 $A_4$ 的 3 阶极大子群 $K$ 的置换化子 $P_{A_4}(K) = K \ne A_4$，矛盾于我们的假设。由此我们证明了定理。

## 4. 结论

本文进一步利用文献[2]中链条件的定义刻画了有限群的超可解性，同时探讨了满足链条件的有限群的极大子群的性质。此外，引入了 *Kegel's* $D$-子群的定义，给出了满足链条件的有限群中的非平凡正规子群为超可解群时的等价条件。

## 参考文献


[1] Qiao, S., Qian, G. and Wang, Y. (2016) How Does Diagonal Subgroup Embedding Determine the Structure of a Group? *Communications in Mathematics and Statistics*, **4**, 423-433. https://doi.org/10.1007/s40304-016-0092-3

[2] Huang, H., Meng, H., Qiao, S. and Su, N. (2024) The Permutizer of the Main Diagonal Subgroups in Direct Products. *Ricerche di Matematica*, **74**, 1157-1163. https://doi.org/10.1007/s11587-024-00866-5

[3] Kegel, O.H. (1965) On Huppert's Characterization of Finite Supersoluble Groups. *Proceedings of the International Conference on the Theory of Groups*, Canberra, 209-215.

[4] Baer, R. (1940) Nilpotent Groups and Their Generalizations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **47**, 393-434. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1940-0002121-0

[5] Johnson, D.L. (1971) A Note on Supersoluble Groups. *Canadian Journal of Mathematics*, **23**, 562-564. https://doi.org/10.4153/cjm-1971-063-5

[6] Jennings, S.A. (1941) The Structure of the Group Ring of a P-Group over a Modular Field. *Transactions of the American Mathematical Society*, **50**, 175-185. https://doi.org/10.2307/1989916