

# 半张量积下可交换的Tropical矩阵

刘疏宇

重庆理工大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2026年1月29日; 录用日期: 2026年2月26日; 发布日期: 2026年3月5日

## 摘要

本文基于Tropical代数, 给出了Tropical代数框架下左(右)半张量积和张量积的定义及其基本性质。随后, 证明了两个置换矩阵的张量积仍然是置换矩阵, 并将这一结果推广到广义置换矩阵的情形。进一步, 利用上述结论, 证明了在半张量积下存在可与非奇异幂等矩阵交换的广义置换矩阵。此外, 将右半张量积下与非奇异幂等矩阵可交换的广义置换矩阵分块后, 得到满足条件的分块矩阵存在与之可交换的矩阵。

## 关键词

Tropical代数, (半)张量积, 非奇异幂等矩阵, 置换矩阵, 广义置换矩阵

# Commutative Semi-Tensor Product under Tropical Matrix

Shuyu Liu

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: January 29, 2026; accepted: February 26, 2026; published: March 5, 2026

## Abstract

Based on the tropical algebra, this paper presents the definitions and fundamental properties of the left (right) semi-tensor product and tensor product under the framework of tropical algebra. Subsequently, it is proved that the tensor product of two permutation matrices is still a permutation matrix, and this result is generalized to the case of generalized permutation matrices. Furthermore, by virtue of the above conclusions, it is demonstrated that there exist generalized permutation matrices commuting with non-singular idempotent matrices under the semi-tensor product. In addition, after block decomposition of the generalized permutation matrices that commute with non-singular idempotent matrices under the right semi-tensor product, it is obtained that there exist matrices commuting with the block matrices satisfying the given conditions.

## Keywords

**Tropical Algebra, (Semi) Tensor Product, Nonsingular Idempotent Matrix, Permutation Matrix, Generalized Permutation Matrix**

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

Tropical 代数是在实数代数的基础上, 通过添加一个无穷负元素  $-\infty$ , 并配备加法和极大值的二元运算而扩展得到的代数。Tropical 代数研究兴起于 20 世纪 60 年代, Tropical 代数理论是在 Tropical 半环上发展起来的代数学理论, 是代数理论的重要研究对象之一, 被广泛运用于组合优化和调度、控制理论、离散事件动态系统等许多其他科学领域都有应用[1]-[10]。这些应用中产生的许多问题都是用 Tropical 线性方程组表示的, 因此许多作者研究 Tropical 矩阵, 即 Tropical 代数上的矩阵。因此, Tropical 矩阵的研究备受国内外代数学者的关注。

例如, Yang [11]研究了有  $n \times n$  维 Tropical 矩阵在乘法下构成的半群  $M_n(T)$ , 描述了包含对角分块幂等矩阵的 Tropical 矩阵群, 其中主对角块为实矩阵, 其余块为零矩阵。他证明了每个非奇异对称幂等矩阵都等价于这种类型的分块对角矩阵。基于这一结果, 他给出了  $M_n(T)$  中包含对称幂等元的极大子群的一些分解。王晶和宫春梅[12]研究了 Tropical 矩阵乘法半群的(\*)-Green 关系和正则性, 给出了 Tropical 矩阵乘法半群上  $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{D}$  关系的等价刻画, 随后他们讨论了上三角 Tropical 矩阵乘法半群的正则性, 并证明了当且仅当  $n=1$  时  $n \times n$  维的上三角 Tropical 矩阵乘法半群是正则半群。Yang [13]给出了 Tropical 半环上矩阵集合的格林关系  $\mathcal{R}$ 、 $\mathcal{L}$  和  $\mathcal{D}$  的刻画。证明了如果一个  $n \times m$  维的 Tropical 矩阵  $X$  满足  $AXA = A$ , 那么一个  $m \times n$  维的 Tropical 矩阵  $A$  是正则的。此外, 他研究了所有  $n \times n$  维 Tropical 矩阵在乘法下构成的半群的正则  $\mathcal{D}$  类, 并给出了非奇异正则  $\mathcal{D}$  类的一个划分。Johnson 和 Kambites [14]从 Tropical 几何的思想出发研究了  $2 \times 2$  维 Tropical 矩阵乘法半群的代数结构, 利用代数几何的知识, 他们给出了  $2 \times 2$  维 Tropical 矩阵乘法半群的格林关系, 并对幂等元和极大子群进行了描述, 随后还证明了  $2 \times 2$  维 Tropical 矩阵在乘法下是正则半群。

上述关于 Tropical 矩阵的讨论均基于传统矩阵乘法展开, 而传统矩阵乘法对矩阵维数有着严格的限制。为突破这一局限, 程[15]提出了一种新的矩阵乘法 - 矩阵半张量积。与传统矩阵乘法不同, 半张量积不再受维数匹配条件的约束, 具有更强的灵活性和适用性。目前, 矩阵半张量积已成功应用于布尔网络、图着色、密码学等多个领域[16]-[18]。程[19]将半张量积与合作博弈结合在一起, 在矩阵的框架下讨论了博弈的相关问题。周[20]基于半张量积提出一种城市绿地灌溉模糊系统的方法, 通过半张量积构造模糊关系矩阵, 将传统抽象的模糊规则语言信息进行量化并转化成矩阵运算。基于上述分析, 本文研究了 Tropical 代数下的半张量积, 它是对普通 Tropical 矩阵乘法的一种推广。与传统 Tropical 矩阵乘法不同, Tropical 代数下的半张量积突破了维数的限制, 使得任意两个 Tropical 矩阵均可进行乘法运算, 在很大程度上弥补了传统乘法的局限性, 同时保持了普通半张量积的基本性质与代数结构。

## 2. 预备知识

令  $S$  为一非空集合, 且具有  $\oplus$  (加法)和  $\otimes$  (乘法)两个二元运算, 使得

- $(S, \oplus)$  是可交换半群;
- $(S, \otimes)$  是半群;
- 对任意的  $a, b \in S$ , 有

$$\begin{aligned} a \otimes (b \oplus c) &= a \otimes b \oplus a \otimes c, \\ (b \oplus c) \otimes a &= b \otimes a \oplus c \otimes a. \end{aligned}$$

则称  $(S, \oplus, \otimes)$  为半环。

若对任意的  $a, b \in S$ , 有  $a \otimes b = b \otimes a$ , 则称半环  $S$  为可交换半环。若  $e \in S$  ( $\varepsilon \in S$ ), 且对任意的元素  $a \in S$  有  $a \otimes e = e \otimes a = a$  ( $a \oplus \varepsilon = a$ ), 则称  $e$  ( $\varepsilon$ ) 为半环  $S$  上的乘法(加法)恒等元。若半环  $S$  同时具有一个乘法恒等元和一个加法恒等元, 则称  $S$  为幂等半环[21][22]。若对任意的  $a \in S$ , 有  $a \otimes a = a \otimes a$ , 则称半环  $S$  为乘法幂等半环, 若此时半环  $S$  为交换的, 则称半环  $S$  为可交换乘法幂等半环。

令  $R$  为实数集,  $T = R \cup \{-\infty\}$ , 在  $T$  上定义两个二元运算  $\oplus$  和  $\otimes$  如下:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max\{a, b\}, \\ a \otimes b &= a + b. \end{aligned}$$

则称  $(T, \otimes, \oplus)$  为 tropical 代数。根据半环的定义,  $(T, \otimes, \oplus)$  是一个半环,  $-\infty$  和  $0$  分别是  $T$  的加法恒等元和乘法恒等元。

设  $M_{m \times n}(T)$  为半环  $T$  上所有  $m \times n$  维矩阵的集合。特别地, 当  $m = n$ , 简记为  $M_n(T)$ , 在  $M_n(T)$  上定义  $\oplus$  和  $\otimes$  运算: 对任意的  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(T)$  和  $a, b \in S$ , 有

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (a_{ij} \oplus b_{ij}), \quad A \otimes B = \left( \bigoplus_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj} \right), \\ a \otimes B &= (a \otimes b_{ij}), \quad A \otimes b = (a_{ij} \otimes b). \end{aligned}$$

根据半环的定义,  $(M_n(T), \otimes, \oplus)$  也是一个半环, 所有元素都为  $-\infty$  的  $n \times n$  矩阵  $Z$  是  $M_n(T)$  的加法恒等元, 主对角线上的元素为  $0$ , 其余元素为  $-\infty$  的矩阵  $I_n$  是  $M_n(T)$  的乘法恒等元。

为后续叙述方便, 对任意的  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(T)$  和  $a, b \in S$ , 我们用  $AB$  代替  $A \otimes B$ ,  $aA$  代替  $a \otimes A$ ,  $ab$  代替  $a \otimes b$ ; 对于给定的大于  $1$  的整数  $n$ , 我们记  $A^n = AA \cdots A$ ; 对任意的  $n \in \mathbb{N}$ , 我们用  $[n]$  表示  $\{1, 2, \dots, n\}$ , 即  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ; 对任意的  $i, j \in [n]$ , 我们用  $a_{ij}$  表示矩阵  $A$  第  $i$  行和第  $j$  列相交位置处的元素; 对任意的  $a, b \in R$ , 其中  $R$  表示实数集, 我们用  $ab$  表示  $a \cdot b$ , 其中  $\cdot$  表示普通的乘法。

主对角线上的元素为  $d_1, d_2, \dots, d_n \in R$ , 其余元素为  $-\infty$  的矩阵  $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  叫做对角矩阵。显然,  $I_n = \text{diag}(0, 0, \dots, 0)$ 。对矩阵  $A \in M_n(T)$ , 若存在  $B \in M_n(T)$  满足  $A \otimes B = B \otimes A = I_n$ , 则称  $A$  可逆,  $B$  叫做  $A$  唯一的逆矩阵, 用  $A^{-1}$  表示  $B$ , 即  $B = A^{-1}$ 。通过重排  $I_n$  (对角矩阵) 的行或列得到的矩阵称为置换(广义置换)矩阵。置换矩阵是特殊的广义置换矩阵, 置换矩阵  $A$  的逆  $A^{-1}$  是它的转置  $A^T$ , 即  $A^{-1} = A^T$ 。广义置换矩阵是唯一可逆的 tropical 矩阵。 $\text{Sym}(\Omega)$  表示集合  $\Omega$  所有置换的集合。对任意的置换矩阵  $P = (p_{ij})$ , 存在唯一的  $\sigma \in \text{Sym}([n])$  有  $p_{i\sigma(i)} = 0$ , 其余元素为  $-\infty$ , 其中  $i \in [n]$ 。通常用  $P$  表示  $P_\sigma$ , 即  $P = P_\sigma$ 。显然,  $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$  [22]。 $Q \in M_n(T)$  是广义置换矩阵当且仅当存在  $\sigma \in \text{Sym}([n])$  有  $Q = P_\sigma \otimes \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , 并且  $Q$  的逆, 我们可以用  $Q^{-1} = \text{diag}(-d_1, -d_2, \dots, -d_n) \otimes P_\sigma^{-1}$  来表示。我们用  $GL_n(T)$  表示所有  $n$  阶广义置换矩阵的集合。

用  $T^n$  表示  $T$  的  $n$  维向量空间, 那么  $T^n$  构成一个半环, 半环  $T^n$  中的元素叫做向量。如果存在  $m_1, m_2, \dots, m_k \in T$ , 使得  $T^n$  中的子集  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , 满足  $\alpha = m_1 \alpha_1 \oplus m_2 \alpha_2 \oplus \dots \oplus m_k \alpha_k$ 。则称向量  $\alpha$  是  $T^n$  中的一个线性组合。对于  $T^n$  的子集  $S$ , 有

$$\text{span}(S) = \left\{ \bigoplus_{i=1}^k m_i \alpha_i \mid k \in N, \alpha_i \in S, m_i \in T, i=1, 2, \dots, k \right\},$$

其中  $N$  表示自然数集。如果  $\text{span}(\alpha_i \mid i \in I) = S$ ，则称  $\{\alpha_i \mid i \in I\}$  是线性无关的[9]。

$A$  的行秩(列秩)用  $r(A)$ ( $c(A)$ )表示， $m \times n$  维矩阵若满足  $r(A) = m$ ， $c(A) = n$ ，则称矩阵  $A$  为非奇异矩阵。显然矩阵  $I_n$  满足  $r(A) = c(A) = n$ ，则乘法恒等元是非奇异矩阵[11]。

下面给出 tropical 矩阵在张量积和半张量积下的一些基本概念。

定义 1: [15] 设  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(T)$ ， $B = (b_{ij}) \in M_{p \times q}(T)$ 。定义  $A$  和  $B$  的张量积 ( $\boxtimes$ ) 为:

$$A \boxtimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix},$$

通过张量积的定义，我们将  $A \boxtimes B$  内的每块矩阵展开，有

$$A \boxtimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & a_{1n}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & a_{1n}b_{p1} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & a_{mn}b_{11} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & a_{mn}b_{p1} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{pmatrix} \in M_{mp \times nq}(T),$$

则有，

$$A \boxtimes B = (A_{*1} \boxtimes B_{*1}, \dots, A_{*1} \boxtimes B_{*q}, \dots, A_{*n} \boxtimes B_{*1}, \dots, A_{*n} \boxtimes B_{*q})$$

和

$$A \boxtimes B = \begin{pmatrix} A_{1*} \boxtimes B_{1*} \\ \vdots \\ A_{1*} \boxtimes B_{p*} \\ \vdots \\ A_{m*} \boxtimes B_{1*} \\ \vdots \\ A_{m*} \boxtimes B_{p*} \end{pmatrix}.$$

定义 2: [15] 设  $A = (a_{ij}) \in M_n(T)$ ， $B = (b_{ij}) \in M_p(T)$ 。则  $A$  和  $B$  的左半张量积 ( $\ltimes$ ) 的定义如下:

$$A \ltimes B = (A \boxtimes I_{t/n}) \otimes (B \boxtimes I_{t/p}),$$

其中  $t$  表示为  $n$  和  $p$  的最小公倍数，记作  $t = \text{lcm}(n, p)$ 。

定义 3: [15] 设  $A = (a_{ij}) \in M_n(T)$ ， $B = (b_{ij}) \in M_p(T)$ 。则  $A$  和  $B$  的左半张量积 ( $\ltimes$ ) 的定义如下:

$$A \ltimes B = (I_{t/n} \boxtimes A) \otimes (I_{t/p} \boxtimes B),$$

其中  $t$  表示为  $n$  和  $p$  的最小公倍数，记作  $t = \text{lcm}(n, p)$ 。

特别地，当  $n = p$  时， $A \ltimes B = A \otimes B$  ( $A \ltimes B = A \otimes B$ )，即两个矩阵的左(右)半张量积为普通 Tropical 矩阵乘法 ( $\otimes$ ) 的推广。

下面介绍 tropical 矩阵下张量积的一些基本性质。

引理 1: [15] 设  $A \in M_{m \times n}(T)$ ,  $B \in M_{p \times q}(T)$ ,  $C \in M_{n \times r}(T)$ ,  $D \in M_{q \times s}(T)$ 。则有

$$(A \boxtimes B) \otimes (C \boxtimes D) = (A \otimes C) \boxtimes (B \otimes D),$$

特别地, 有

$$(A \boxtimes B) = (A \otimes I_p) \boxtimes (B \otimes I_n).$$

### 3. 主要结果

引理 2: 设  $A = (a_{ij}) \in M_n(T)$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_p(T)$ ,  $A = (a_{ij}) \in M_n(T)$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_p(T)$ 。若  $A$  和  $B$  是置换矩阵, 则  $A$  和  $B$  的张量积也是置换矩阵。

证明: 设  $A = (a_{ij}) \in M_n(T)$  和  $B = (b_{ij}) \in M_p(T)$  为置换矩阵, 则分别存在集合为  $n$  和  $p$  的置换  $\sigma$  和  $\pi$ , 对任意的  $i, j \in [n]$  和  $k, r \in [p]$ , 有

$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow j = \sigma(i), \quad b_{kr} = 0 \Leftrightarrow r = \pi(k).$$

对  $A$  和  $B$  的张量积  $A \boxtimes B$ , 令  $C = A \boxtimes B$ , 则  $C \in M_{np}(T)$ , 那么有

$$C = (c_{st}) = \{(a_{ij} \otimes b_{kr}) \mid s = p(i-1) + k; t = p(j-1) + r; i, j \in [n]; k, r \in [p]; s, t \in [np]\}.$$

因为对任意的  $a, b \in T$ ,  $a \otimes b = 0$  当且仅当  $a = b = 0$ , 有

$$\begin{aligned} c_{s,t} = 0 &\Leftrightarrow a_{i,j} \otimes b_{k,r} = 0, \\ &\Leftrightarrow a_{i,j} = 0, b_{k,r} = 0, \\ &\Leftrightarrow j = \sigma(i), r = \pi(k), \\ &\Leftrightarrow t = p[\sigma(i) - 1] + \pi(k), s = p(i-1) + k. \end{aligned}$$

因  $\bigcup_{i \in [n], k \in [p]} p(i-1) + k = np$ , 故  $C$  矩阵每行有一个 0 元素。利用反证法, 得  $C$  矩阵每列有一个 0 元素。

即证  $A$  和  $B$  的张量积也是置换矩阵。

推论 1: 若  $A$  和  $B$  是置换矩阵。则  $(A \boxtimes B)^{-1} = (A \boxtimes B)^T = A^T \boxtimes B^T = A^{-1} \boxtimes B^{-1}$ 。

定理 1: 设  $A = (a_{ij}) \in M_n(T)$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_p(T)$ , 且  $A$  和  $B$  是广义置换矩阵。则有

- 1)  $(A \boxtimes B)^{-1} = A^{-1} \boxtimes B^{-1}$ ,
- 2)  $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$ ,
- 3)  $(A \bowtie B)^{-1} = B^{-1} \bowtie A^{-1}$ 。

证明: 在证明这几个结论之前, 首先要证明两个广义置换矩阵的张量积也是广义置换矩阵。设  $A$  和  $B$  是广义置换矩阵, 令  $A = P_\sigma \otimes \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $B = P_\pi \otimes \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , 其中,  $\sigma \in \text{Sym}([n])$ ,  $\pi \in \text{Sym}([p])$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in R$ 。则有

$$\begin{aligned} A \boxtimes B &= [P_\sigma \otimes \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)] \boxtimes [P_\pi \otimes \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)] \\ &= (P_\sigma \boxtimes P_\pi) \otimes [\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \boxtimes \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)], \end{aligned}$$

由引理 1, 有  $P_\sigma \boxtimes P_\pi$  是置换矩阵, 故  $A \boxtimes B$  是广义置换矩阵。

证(1), 由推论 1 及上述分析有

$$\begin{aligned} (A \boxtimes B)^{-1} &= [\text{diag}(-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \boxtimes \text{diag}(-b_1, -b_2, \dots, -b_n)] \otimes (P_\sigma \boxtimes P_\pi)^{-1} \\ &= [\text{diag}(-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \boxtimes \text{diag}(-b_1, -b_2, \dots, -b_n)] \otimes (P_\sigma^{-1} \boxtimes P_\pi^{-1}) \\ &= [\text{diag}(-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \otimes P_\sigma^{-1}] \boxtimes [\text{diag}(-b_1, -b_2, \dots, -b_n) \otimes P_\pi^{-1}] \\ &= A^{-1} \boxtimes B^{-1}, \end{aligned}$$

即证,  $(A \boxtimes B)^{-1} = A^{-1} \boxtimes B^{-1}$ 。

证(2), 由(1)有

$$\begin{aligned}(A \times B)^{-1} &= \left[ (A \boxtimes I_{t/n}) \otimes (B \boxtimes I_{t/p}) \right]^{-1} (t = \text{lcm}(n, p)) \\ &= (B \boxtimes I_{t/p})^{-1} \otimes (A \boxtimes I_{t/n})^{-1} \\ &= (B^{-1} \boxtimes I_{t/p}) \otimes (A^{-1} \boxtimes I_{t/n}) \\ &= B^{-1} \times A^{-1}.\end{aligned}$$

同理, 可证(3), 则有  $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$ 。

定理 2: 若  $E \in M_n(T)$  是非奇异幂等矩阵, 存在广义置换矩阵  $M_1, M_2 \in M_p(T)$ , 满足  $E \times M_1 = M_2 \times E$  或  $E \times M_1 = M_2 \times E$ , 则  $M_1 = M_2$ 。

证明: 设  $E$  是  $n \times n$  维的非奇异幂等矩阵, 若存在广义置换矩阵  $M_1, M_2 \in M_p(T)$ , 满足  $E \times M_1 = M_2 \times E$ , 则有,

$$E \times M_1 = M_2 \times E \Rightarrow (E \boxtimes I_{t/n}) \otimes (M_1 \boxtimes I_{t/p}) = (M_2 \boxtimes I_{t/n}) \otimes (E \boxtimes I_{t/n}),$$

其中  $t = \text{lcm}(n, p)$ 。又因为

$$(E \boxtimes I_{t/n})^2 = (E \boxtimes I_{t/n}) \otimes (E \boxtimes I_{t/n}) = (E \otimes E) \boxtimes (I_{t/n} \otimes I_{t/n}) = E^2 \boxtimes (I_{t/n})^2 = E \boxtimes I_{t/n},$$

且

$$\text{rank}(E \boxtimes I_{t/n}) = \text{rank}(E) \text{rank}(I_{t/n}) = t,$$

故  $E \boxtimes I_{t/n}$  是非奇异幂等矩阵。那么由定理 1 及引理[17]中的命题 4.5 有,

$$\begin{aligned}E \times M_1 = M_2 \times E &\Rightarrow E \boxtimes I_{t/n} = (M_2 \boxtimes I_{t/p}) \otimes (E \boxtimes I_{t/n}) \otimes (M_1 \boxtimes I_{t/p})^{-1}, \\ &\Rightarrow (E \boxtimes I_{t/n}) \otimes (M_1 \boxtimes I_{t/p}) = (M_2 \boxtimes I_{t/n}) \otimes (E \boxtimes I_{t/n}), \\ &\Rightarrow (M_2 \boxtimes I_{t/p}) \otimes (E \boxtimes I_{t/n}) \otimes (M_1 \boxtimes I_{t/p})^{-1} \otimes (M_2 \boxtimes I_{t/p}) \otimes (E \boxtimes I_{t/n}) \otimes (M_1 \boxtimes I_{t/p})^{-1}, \\ &\Rightarrow (M_2 \boxtimes I_{t/p}) \otimes (E \boxtimes I_{t/n}) \otimes (M_1 \boxtimes I_{t/p})^{-1}, \\ &\Rightarrow (E \boxtimes I_{t/n}) \otimes (M_1 \boxtimes I_{t/p})^{-1} \otimes (M_2 \boxtimes I_{t/p}) \otimes (E \boxtimes I_{t/n}) = E \boxtimes I_{t/n}, \\ &\Rightarrow (M_1 \boxtimes I_{t/p})^{-1} \otimes (M_2 \boxtimes I_{t/p}) = I_t, \\ &\Rightarrow (M_1^{-1} \boxtimes I_{t/p}) \otimes (M_2 \boxtimes I_{t/p}) = I_t, \\ &\Rightarrow (M_1^{-1} \otimes M_2) \boxtimes I_{t/p} = I_t, \\ &\Rightarrow M_1^{-1} \otimes M_2 = I_t, \\ &\Rightarrow M_1 = M_2.\end{aligned}$$

同理, 对  $E \times M_1 = M_2 \times E$ , 有  $M_1 = M_2$ 。即证若  $E \in M_n(T)$  是非奇异幂等矩阵, 则存在广义置换矩阵  $M_1, M_2 \in M_p(T)$ , 满足  $E \times M_1 = M_2 \times E$  或  $E \times M_1 = M_2 \times E$ , 则  $M_1 = M_2$ 。

推论 2: 若非奇异幂等矩阵  $E$  满足  $E \infty M = M \infty E$ 。则  $(E \times M)^2 = E^2 \times M^2$ 。

上述定理在左半张量积和右半张量积下都成立, 下面介绍的定理只在右张量积下成立, 在左半张量积下不成立。若  $F$  是一个  $n \times n$  维的非奇异幂等矩阵, 我们用  $G_F$  表示在 tropical 矩阵乘法下所有与  $F$  可交换的广义置换矩阵的集合, 即  $G_F = \{M \mid M \in GL_n(T), MF = FM\}$ 。

定理 3: 若  $F \in M_n(T)$  是实非奇异幂等矩阵, 存在广义置换矩阵  $M \in M_p(T)$ , 满足  $F \bowtie M = M \bowtie F$ ,  $\text{lcm}(n, p) = p$ ,  $k = p/n$ , 有

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kk} \end{pmatrix},$$

那么存在  $\sigma \in \text{Sym}([k])$ , 对任意的  $i, j \in [k]$  有

$$\begin{cases} M_{ij} \in G_F, j = \sigma(i); \\ M_{ij} = -\infty, j \neq \sigma(i). \end{cases}$$

证明: 设  $F \in M_n(T)$  是实非奇异幂等矩阵, 有广义置换矩阵  $M \in M_p(T)$ , 满足  $F \bowtie M = M \bowtie F$ , 其中  $\text{lcm}(n, p) = p$ ,  $k = p/n$ , 又

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1k} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kk} \end{pmatrix},$$

其中  $M = (M_{ij}) \in M_p(T)$ ,  $M_{ij} \in M_n(T)$ , 则有

$$\begin{aligned} F \bowtie M = M \bowtie F &\Rightarrow (I_{p/n} \boxtimes F) \otimes (I_{p/p} \boxtimes M) = (I_{p/p} \boxtimes M) \otimes (I_{p/n} \boxtimes F), \\ &\Rightarrow (I_k \boxtimes F) \otimes M = M \otimes (I_k \boxtimes F), \\ &\Rightarrow FM_{ij} = M_{ij}F, \end{aligned}$$

其中  $i, j \in [k]$ 。

一方面, 若  $M_{ij} \notin GL_n(T)$ , 则  $M_{ij} = -\infty$ 。因为  $M_{ij}$  是广义置换矩阵  $M$  的子矩阵, 如果  $M_{ij} \notin GL_n(T)$ , 那么  $M_{ij}$  的某每一行或某一列元素全为  $-\infty$ , 不妨设  $M_{ij}$  中的第一列元素全为  $-\infty$ , 易得  $FM_{ij}$  的第一列元素全为  $-\infty$ , 由题知  $F$  中的元素全为实数, 故要满足  $FM_{ij} = M_{ij}F$ ,  $M_{ij}$  中所有元素必须全为  $-\infty$ 。

另一方面, 若  $M_{ij} \in GL_n(T)$ , 根据  $FM_{ij} = M_{ij}F$ , 则  $M_{ij} = G_F$ 。定理得证。

#### 4. 总结

本文基于 tropical 代数的理论框架, 首先证明了两个置换矩阵的张量积仍为置换矩阵这一基础结论; 在此基础上, 进一步推导出两个广义置换矩阵的张量积同样属于广义置换矩阵。基于上述结论, 证明了在半张量积运算下, 存在与非奇异幂等矩阵可交换的广义置换矩阵。此外, 针对右半张量积下与非奇异幂等矩阵可交换的广义置换矩阵, 对其进行分块处理后, 得到满足该条件的分块矩阵均存在与之可交换的矩阵。

#### 参考文献

- [1] Butkovič, P. (2003) Max-Algebra: The Linear Algebra of Combinatorics? *Linear Algebra and Its Applications*, **367**, 313-335. [https://doi.org/10.1016/s0024-3795\(02\)00655-9](https://doi.org/10.1016/s0024-3795(02)00655-9)
- [2] Cohen, G., Gaubert, S. and Quadrat, J.P. (1999) Max-Plus Algebra and System Theory: Where We Are and Where to Go Now. *Annual Reviews in Control*, **23**, 207-219. [https://doi.org/10.1016/s1367-5788\(99\)00023-1](https://doi.org/10.1016/s1367-5788(99)00023-1)
- [3] Cuninghame-Green, R.A. (2012) *Minimax Algebra*. Springer.
- [4] Cuninghame-Green, R.A. and Butkovic, P. (2008) Generalised Eigenproblem in Max-Algebra. 2008 *9th International*

- Workshop on Discrete Event Systems*, Gothenburg, 28-30 May 2008, 236-241.  
<https://doi.org/10.1109/wodes.2008.4605951>
- [5] d'Alessandro, F. and Pasku, E. (2003) A Combinatorial Property for Semigroups of Matrices. *Semigroup Forum*, **67**, 22-30. <https://doi.org/10.1007/s00233-001-0002-0>
- [6] Murfitt, L. (2000) Discrete Event Dynamic Systems in Max-Algebra: Realisation and Related Combinatorial Problems. University of Birmingham.
- [7] Bieri, R. and Groves, J.R.J. (1984) The Geometry of the Set of Characters Induced by Valuations. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **347**, 168-195.
- [8] Butkovič, P. (2010) Max-Linear Systems: Theory and Algorithms. Springer.
- [9] Mikhalkin, G. (2005) Enumerative Tropical Algebraic Geometry in  $\mathbb{R}^2$ . *Journal of the American Mathematical Society*, **18**, 313-377. <https://doi.org/10.1090/s0894-0347-05-00477-7>
- [10] Richter-Gerbert, J., Sturmfels, B., Theobald, T. (2003) First Steps in Tropical Geometry. arXiv: math/0306366.
- [11] Yang, L. (2018) The Tropical Matrix Groups with Symmetric Idempotents. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2018**, Article ID: 4797638. <https://doi.org/10.1155/2018/4797638>
- [12] 王晶, 宫春梅. Tropical 矩阵半群[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(2): 50-55.
- [13] Yang, L. (2018) Regular  $\mathcal{D}$ -Classes of the Semigroup of  $n \times n$  Tropical Matrices. *Turkish Journal of Mathematics*, **42**, 2061-2070. <https://doi.org/10.3906/mat-1803-80>
- [14] Johnson, M. and Kambites, M. (2011) Multiplicative Structure of  $2 \times 2$  Tropical Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **435**, 1612-1625. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.12.030>
- [15] 程代展, 齐洪胜, 著. 矩阵半张量积讲义, 卷一: 基本理论与多线性运算[M]. 北京: 科学出版社, 2020.
- [16] Feng, J.E., Yao, J. and Cui, P. (2013) Singular Boolean Networks: Semi-Tensor Product Approach. *Science China Information Sciences*, **56**, 1-14.
- [17] Xu, M., Wang, Y. and Wei, A. (2014) Robust Graph Coloring Based on the Matrix Semi-Tensor Product with Application to Examination Timetabling. *Control Theory and Technology*, **12**, 187-197. <https://doi.org/10.1007/s11768-014-0153-7>
- [18] Zou, C., Wang, X. and Li, H. (2021) Image Encryption Algorithm with Matrix Semi-Tensor Product. *Nonlinear Dynamics*, **105**, 859-876. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06542-9>
- [19] Cheng, D. and Xu, T. (2013) Application of STP to Cooperative Games. 2013 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), Hangzhou, 12-14 June 2013, 1680-1685. <https://doi.org/10.1109/icca.2013.6565205>
- [20] 周琳超, 吕红丽, 冯俊娥. 基于半张量积方法的绿地灌溉模糊系统设计[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2026, 39(1): 1-10.
- [21] Pouly, M. (2010) Semirings for Breakfast. [http://marcpouly.ch/pdf/internal\\_100712.pdf](http://marcpouly.ch/pdf/internal_100712.pdf)
- [22] Deng, W. and Yu, B. (2022) Surjective Linear Transformations of Tropical Matrices Preserving Transitive Closures. *Communications in Algebra*, **51**, 2183-2198. <https://doi.org/10.1080/00927872.2022.2153254>