Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(3), 47-56
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.163067

Hans汉斯

三维不可压Leray-α-MHD方程的正则性准则

——基于Triebel-Lizorkin空间的研究

江祺婧[1]，盛美婷[2]

[1]景德镇学院教育学院，江西 景德镇
[2]江西师范大学数学与统计学院，江西 南昌

收稿日期：2026年2月5日；录用日期：2026年2月27日；发布日期：2026年3月6日

摘 要

本文围绕三维不可压Leray-α-MHD方程的正则性准则展开研究。基于变量分解思想，借助Littlewood-Paley分解理论将 ∇b 分解为三个子模块开展分析，再利用Bernstein不等式和Gagliardo-Nirenberg不等式的组合估计方法，推导得到该方程在Triebel-Lizorkin空间内的正则性判定条件。研究证实，Leray-α-MHD方程的解 (u,v,b) 当 $\nabla b\in L^{\frac{4q}{3q-3}}\left(0,T;\dot{F}^{0}_{q,\frac{4q}{q+3}}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$ 时，其光滑性可突破给定时间区间的限制实现延拓。

关键词

正则性准则，三维不可压Leray-α-MHD方程，Triebel-Lizorkin空间

Regularity Criteria for the Three-Dimensional Incompressible Leray-α-MHD Equations

—A Study Based on Triebel-Lizorkin Spaces

Qijing Jiang[1], Meiting Sheng[2]

[1]College of Education, Jingdezhen University, Jingdezhen Jiangxi
[2]School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi

Received: February 5, 2026; accepted: February 27, 2026; published: March 6, 2026

Abstract

This paper conducts a research on the regularity criterion for the three-dimensional incompressible Leray-α-MHD equations. Based on the idea of variable decomposition, we decompose ∇b into three

文章引用: 江祺婧, 盛美婷. 三维不可压 Leray-α-MHD 方程的正则性准则[J]. 理论数学, 2026, 16(3): 47-56.
DOI: 10.12677/pm.2026.163067

sub-modules for analysis by means of the Littlewood-Paley decomposition theory. Then, we employ the combined estimation method of the Bernstein inequality and the Gagliardo-Nirenberg inequality to derive the regularity judgment condition for the equation in the Triebel-Lizorkin space. It is verified that when the solution (u,v,b) of the Leray-α-MHD equation satisfies $\nabla b \in L^{\frac{4q}{3q-3}}\left(0,T;\dot{F}^{0}_{q,\frac{4q}{q+3}}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, its smoothness can be extended beyond the limitation of the given time interval.

Keywords

Regularity Criteria, Three-Dimensional Incompressible Leray-α-MHD Equations, Triebel-Lizorkin Spaces

1. 引言

磁流体动力学是流体力学与电磁学交叉融合形成的重要学科分支，其核心方程 MHD 方程能够精准刻画等离子体运动、地球磁场演化、太阳风与行星相互作用等复杂物理过程。Leray-α-MHD 方程作为经典 MHD 方程的正则化修正模型，通过引入过滤算子有效改善了方程解的光滑性，为研究 MHD 方程的本质特性提供了理想的数学框架。

Leray-α-MHD 方程能够精准刻画流体运动与磁场耦合作用下的各类物理过程，同时可用于模拟解析湍流演化、边界层分离等多种复杂流动现象。该方程的爆破判别准则，为阐释 MHD 方程所对应复杂物理现象提供了坚实的理论支撑，是当前流体力学领域的研究热点。由此可见，对 Leray-α-MHD 方程正则性准则开展探究，具备重要的理论价值与应用前景。

本文探究定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的不可压 Leray-α-MHD 方程

$$\begin{cases} \partial_t v+(u\cdot\nabla)v-\Delta v+\nabla\pi+\frac{1}{2}\nabla|b|^2=(b\cdot\nabla)b, \\ \partial_t b+(u\cdot\nabla)b-(b\cdot\nabla)v-\Delta b=0, \\ v=\left(Id-\alpha^2\Delta\right)u, \\ \nabla\cdot u=\nabla\cdot v=\nabla\cdot b=0, \\ v(x,0)=v_0(x), b(x,0)=b_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $v=(v_1,v_2,v_3)$ 是流体速度场，$u=(u_1,u_2,u_3)$ 表示“过滤的”流体速度，$b=(b_1,b_2,b_3)$ 表示磁场。π 表示流体压力，$\alpha>0$ 代表过滤器宽度的长度尺度参数，该参数的取值直接影响方程解的正则化程度。

定义 1.1 [1] 对于 $s\in\mathbb{R}, p,q\in[1,\infty]$，齐次 Triebel-Lizorkin 空间 $\dot{F}^s_{p,q}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 定义如下

$$f\in\mathcal{S}'_h:\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}\left(\mathbb{R}^n\right)}<\infty$$

其中

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}\left(\mathbb{R}^n\right)}=\begin{cases} \left\|\left(\sum_{j\in Z}2^{jsq}\left|\dot{\Delta}_j f\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^p}, & 1\le q<\infty, \\ \left\|\sup_{j\in Z}\left|2^{js}\dot{\Delta}_j f\right|\right\|_{L^p}, & q=\infty, \end{cases}$$

这里 $\mathcal{S}_h'$ 表示速降函数空间Schwartz类的对偶空间，$\dot{\Delta}_j$ 是定义在环形区域 $|\xi| \sim 2^j$ 上的时频投影算子，其作用是将函数分解为不同频率的分量。

注 1.2 [2] 当 $1 < p < \infty$ 时，$\dot{F}^0_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 空间等价。当 $0 < p \le 1$ 时，$\dot{F}^0_{p,2}(\mathbb{R}^n)$ 和 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 空间等价。这一等价关系搭建起了 Triebel-Lizorkin 空间与经典函数空间之间的桥梁，为相关问题的研究提供了灵活的工具选择。

定义 1.3 [1] 对于 $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, \infty], L^r\left(0, T; \dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)$ 空间定义如下：

$$f : \|f\|_{L^r\left(0,T;\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)} < \infty$$

其中

$$\|f\|_{L^r\left(0,T;\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)\right)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|f\|^r_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)} \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r}}, & 1 \le r < \infty, \\ \operatorname*{esssup}_{0 \le t \le T} \|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}, & r = \infty, \end{cases}$$

这里 $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ 表示齐次 Triebel-Lizorkin 空间，该时空空间能够同时刻画函数在时间与空间上的正则性。

在该方程的研究进程中，Linshiz 和 Titi [3]于 2006 年率先运用能量估计与紧致性方法，论证了 Leray-α-MHD 方程弱解的全局存在性。2011 年，Zhou 和 Fan [4]针对速度变量构建了多类正则性准则，明确了速度在正则性定理中的核心地位。考虑到 Leray-α-MHD 方程的解比 MHD 方程的解更光滑，2009 年 Fan 和 Ozawa [5]利用这一点借助局部化与 Boney 仿积分解，考虑磁场光滑解的爆破准则，更精确地说，他们得到若 b 满足 $\int_0^T \|b(\cdot,t)\|^2_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \mathrm{d}t < \infty$，则弱解 (v,u,b,π) 在 $t = T$ 时是光滑的。此后，众多学者围绕这一方向展开深入研究，Omrane 等人于 2019 年得到了对数改进型的爆破判别准则[6]。Wan 和 Chen 则利用压力变量在 Triebel-Lizorkin 空间中的性质，建立了三维不可压 Navier-Stokes 方程的正则性准则[7]。本文借鉴文献[3]-[8]的研究思路与方法，重点分析磁场梯度属于 Triebel-Lizorkin 空间，Leray-α-MHD 方程弱解的正则性准则，得到如下核心定理：

定理 1.1 假设初始速度场与初始磁场满足 $v_0, b_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$，同时有 $\nabla \cdot v_0 = \nabla \cdot u_0 = \nabla \cdot b_0 = 0$，且 (u,v,b) 是方程(1.1)在 $(0,T)$ 上的一个 Leray-hopf 弱解，若磁场梯度满足

$$\int_0^T \|\nabla b\|^{\frac{4q}{3q-3}}_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}(\mathbb{R}^3)} \mathrm{d}\tau < \infty, \quad q > 3,$$

则方程(1.1)的解 (u,v,b) 可以延拓到 $t = T$。

2. 预备知识和相关引理

为了完成定理 1.1 的证明，本节将引入速降函数空间、时频投影算子等基础概念，并列出证明过程中所需的关键不等式引理，为后续的能量估计与不等式放缩提供理论工具。

定义 2.1 [9] 速降函数空间 Schwartz 类 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 是指集合

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \forall k \in N, \sup_{\substack{|\alpha| \le k \\ x \in \mathbb{R}^d}} (1+|x|)^k \left|\partial^\alpha f(x)\right| < \infty,$$

其范数为

$$\|u\|_{k,\mathcal{S}} = \sup_{\substack{|\alpha| \le k \\ x \in \mathbb{R}^d}} (1+|x|)^k \left|\partial^\alpha f(x)\right| < \infty.$$

由定义可以看出，对速降函数 f 有 $\left|f(x)\right| \le C\dfrac{1}{\left(1+|x|\right)^k}$，$\forall k \in N, \forall x \in \mathbb{R}^d$，因此 $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$。故速降函数 f 的傅里叶变换为

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其傅里叶逆变换为

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}\xi.$$

定义 2.2 [9] 齐次频投算子 $\dot{\Delta}_j$ 和 $\dot{S}_j$ 定义如下：

$$\begin{aligned}
\forall j \in Z, \dot{\Delta}_j u &= \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(2^{-j}\xi\right)\hat{u}(\xi)\right)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(2^{-j}\xi\right)\right) \star u \\
&= 2^{jn}\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)\left(2^j\cdot\right) \star u = 2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)\left(2^j y\right)u(x-y)\,\mathrm{d}y, \\
\forall j \in Z, \dot{S}_j u &= \mathcal{F}^{-1}\left(\chi\left(2^{-j}\xi\right)\hat{u}(\xi)\right)(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\chi\left(2^{-j}\xi\right)\right) \star u \\
&= 2^{jn}\left(\mathcal{F}^{-1}\chi\right)\left(2^j\cdot\right) \star u = 2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\mathcal{F}^{-1}\chi\right)\left(2^j y\right)u(x-y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中 $\chi, \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^n\right)$ 是非负径向函数，满足 $\operatorname{supp}\chi \subset B = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \le \dfrac{4}{3}\right\}$ 及 $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$，

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \mathcal{C} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{4} \le |\xi| \le \frac{8}{3}\right\}$$

使得 $\sum_{j\in Z}\varphi\left(2^{-j}\xi\right) = 1,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 和 $\chi(\xi) + \sum_{j\ge 0}\varphi\left(2^{-j}\xi\right) = 1.$

下文列出三维 Leray-*α*-MHD 方程正则性准则证明过程中所需的关键引理，这些引理涵盖了不等式估计、函数空间嵌入等多个方面，是偏微分方程正则性理论研究的核心工具。

引理 2.3 [9] (Bernstein 不等式)设 $\lambda > 0$，令 $\mathcal{C}$ 是环，B 是球，则存在常数 C 使得对任意非负整数 k，$1 \le p \le q \le \infty$ 及函数 $u \in L^p$，有

$$\operatorname{supp}\hat{u} \subset \lambda B \Rightarrow \sup_{|\alpha|=k}\left\|D^\alpha u\right\|_{L^q} \le C^{k+1}\lambda^{k+d\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{L^p},$$

$$\operatorname{supp}\hat{u} \subset \lambda\mathcal{C} \Rightarrow C^{-k-1}\lambda^k\|u\|_{L^p} \le \left\|D^\alpha u\right\|_{L^p} \le C^{k+1}\lambda^k\|u\|_{L^p}.$$

引理 2.4 [10] (Hölder 不等式)设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个可测集，$1 \le p, q \le \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，若

$$u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega),$$

则 $uv \in L^1(\Omega)$，并且 $\int|uv|\,\mathrm{d}x \le \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}$。

引理 2.5 (离散的 Hölder 不等式)设 $p > 1$，q 是其共轭指标，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p < +\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q < +\infty,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$。

该不等式是在离散情形下的推广，常用于处理序列求和问题。

引理 2.6 [10] (Young 不等式)设 $a, b > 0, p, q > 1$ 且满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则有 $ab \le \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$。

注 2.7 [10] (带 ε 的 Young 不等式)设 $a,b,\varepsilon>0$， $p,q>1$ 且满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则有

$$ab\le\varepsilon a^{p}+(\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}\cdot q^{-1}b^{q}.$$

引理 2.8 [10] (插值不等式)设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个可测集， $1\le p\le r\le q\le\infty$，若 $u\in L^{p}(\Omega)\cup L^{q}(\Omega)$，则 $u\in L^{r}(\Omega)$，并且

$$\|u\|_{L^{r}(\Omega)}\le\|u\|_{L^{p}(\Omega)}^{\alpha}\|u\|_{L^{q}(\Omega)}^{1-\alpha},$$

其中 $0\le\alpha\le1,\ \frac{\alpha}{p}+\frac{1-\alpha}{q}=\frac{1}{r}$。

引理 2.9 [10] (Gronwall 不等式)设 η 是一个定义在 $[0,T]$ 上的非负绝对连续函数并且满足如下微分不等式

$$\eta'(t)\le\phi(t)\eta(t)+\psi(t),$$

其中 ϕ 和 ψ 是非负可积函数，则对任意 $t\in[0,T]$ 有

$$\eta(t)\le e^{\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}s}\left[\eta(0)+\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}s\right].$$

Gronwall 不等式是处理微分不等式的核心工具，在能量估计中常用于证明解的一致有界性。

引理 2.10 [11] [12] (Gagliardo-Nirenberg 不等式)设 $1<p,q<\infty$， $0\le\theta\le1$， $s,s_1,s_2\in\mathbb{R}$，则

$$\left\|\Lambda^{s}u\right\|_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}\le\left\|\Lambda^{s_1}u\right\|_{L^{q}(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}\left\|\Lambda^{s_2}u\right\|_{L^{r}(\mathbb{R}^n)}^{\theta},$$

其中

$$\frac{1}{p}-\frac{s}{n}=(1-\theta)\left(\frac{1}{q}-\frac{s_1}{n}\right)+\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{s_2}{n}\right),\quad s\le(1-\theta)s_1+\theta s_2.$$

该不等式建立了函数不同阶导数范数之间的插值关系，在高阶能量估计中发挥着关键作用。

3. 定理 1.1 的证明

本节将完成 Triebel-Lizorkin 空间中 Leray-α-MHD 方程弱解的爆破判别准则的证明。证明的核心思路是通过建立解的高阶能量估计，结合 Gronwall 不等式证明能量的一致有界性，进而得到解的全局正则性。

本节的核心目标是建立方程(1.1)的光滑先验界估计

$$\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\le CM^{\exp\left\{C_T\int_0^T\|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{4q}{3q-3}}\mathrm{d}\tau\right\}},$$

其中常数 C 仅依赖于初始数据和时间 T，于解本身无关。

第一步：L^2-能量估计。

用 $(1.1)_1,(1.1)_2$ 分别与 v 和 b 做 L^2 内积后将两式相加，再利用 $\nabla\cdot v=\nabla\cdot b=0$ 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|v\|_2^2+\|b\|_2^2\right)+\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2=0.$$

上式对时间在 $(0,t)$ 上积分得

$$\frac{1}{2}\left(\|v\|_2^2+\|b\|_2^2\right)+\int_0^t\|\nabla v\|_2^2\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|\nabla b\|_2^2\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\left(\|v_0(x)\|_2^2+\|b_0(x)\|_2^2\right).$$

于是有

$$\frac{1}{2}\left(\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2+\|b\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2\right)+\|v\|_{L^2(0,T;H^1)}^2+\|b\|_{L^2(0,T;H^1)}^2\le C.$$

从而可得到

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;L^2)}+\|v\|_{L^2(0,T;H^1)}\le C.$$

由于在方程(1.1)中 $\alpha=1$ 时有 $v=(Id-\Delta)u$, 所以可以推出

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2)}+\|u\|_{L^2(0,T;H^3)}\le C.$$

结合方程(1.1)中的 $\alpha=1$ 约束条件，能够推出速度场与磁场的 L^2 模估计是一致有界的，这一结论是后续高阶能量估计的基础。

第二步：H^1-能量估计。

用 $(1.1)_1$ 与 $-\Delta v$ 做 L^2 内积，并利用 $\nabla\cdot v=0$ 和 $\nabla\cdot b=0$ 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla^2 v\|_2^2=\int_{R^3}\left[(u\cdot\nabla)v\cdot\Delta v-(b\cdot\nabla)b\cdot\Delta v\right]\mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

对右端两项分别进行分部积分处理：

$$\begin{aligned}\int_{R^3}-(b\cdot\nabla)b\cdot\Delta v\mathrm{d}x&=-\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(b_j\partial_j b\right)\partial_k^2 v\mathrm{d}x\\&=\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\left(b_j\partial_j b\right)\partial_k v\mathrm{d}x\\&=\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k b_j\partial_j b\partial_k v+b_j\partial_j\partial_k b\partial_k v\right)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.2}$$

综合(3.1)和(3.2)式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla^2 v\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)v\cdot\Delta v\mathrm{d}x+\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k b_j\partial_j b+b_j\partial_j\partial_k b\right)\partial_k v\mathrm{d}x, \tag{3.3}$$

类似地用 $(1.1)_2$ 与 $-\Delta b$ 做 L^2 内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla b\|_2^2+\|\nabla^2 b\|_2^2=\int_{R^3}\left[(u\cdot\nabla)b\cdot\Delta b-(b\cdot\nabla)v\cdot\Delta b\right]\mathrm{d}x \tag{3.4}$$

利用分部积分和 $\nabla\cdot b=0$ 可得

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^3}(b\cdot\nabla)v\cdot\Delta b\mathrm{d}x&=-\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(b_j\partial_j v\right)\cdot\partial_k^2 b\mathrm{d}x\\&=-\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\left(b_j v\right)\cdot\partial_k^2 b\mathrm{d}x=-\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k\left(b_j v\right)\partial_j\partial_k b\mathrm{d}x\\&=-\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k b_j\partial_j\partial_k b v+b_j\partial_k v\partial_j\partial_k b\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k b v\partial_k\partial_j b_j+\partial_k b\partial_j v\partial_k b_j-b_j\partial_k v\partial_j\partial_k b\right)\mathrm{d}x\\&=\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k b_j\partial_k b\partial_j v-b_j\partial_j\partial_k b\partial_k v\right)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.5}$$

综合(3.4)式和(3.5)式可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla b\|_2^2+\|\nabla^2 b\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^3}(u\cdot\nabla)b\cdot\Delta b\mathrm{d}x+\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\partial_k b_j\partial_k b\partial_j v-b_j\partial_j\partial_k b\partial_k v\right)\mathrm{d}x, \tag{3.6}$$

将(3.3)式和(3.6)式相加可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)+\|\nabla^2 v\|_2^2+\|\nabla^2 b\|_2^2\\&=\int_{R^3}\left[(u\cdot\nabla)v\cdot\Delta v+(u\cdot\nabla)b\cdot\Delta b\right]\mathrm{d}x+\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k b_j\left(\partial_j b\partial_k v+\partial_k b\partial_j v\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式，Sobolev 嵌入 $H^2\left(\mathbb{R}^3\right)\to L^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ 和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}\left[(u\cdot\nabla)v\cdot\Delta v+(u\cdot\nabla)b\cdot\Delta b\right]\mathrm{d}x\\&\le\|u\|_\infty\|\nabla v\|_2\|\Delta v\|_2+\|u\|_\infty\|\nabla b\|_2\|\Delta b\|_2\\&\le C\|\nabla v\|_2\|\nabla^2 v\|_2+C\|\nabla b\|_2\|\nabla^2 b\|_2\\&\le\frac{1}{8}\|\nabla^2 v\|_2^2+\frac{1}{4}\|\nabla^2 b\|_2^2+C\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right),\end{aligned}$$

同时

$$\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_k b_j\left(\partial_j b\partial_k v+\partial_k b\partial_j v\right)\mathrm{d}x\le C\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v||\nabla b||\nabla b|\mathrm{d}x=I,$$

利用 Littlewood-Paley 分解，将 ∇b 分解为

$$\nabla b=\sum_{j<-N}\dot{\Delta}_j(\nabla b)+\sum_{j=-N}^{N}\dot{\Delta}_j(\nabla b)+\sum_{j>N}\dot{\Delta}_j(\nabla b),$$

其中正整数 N 将在后续取定，则 I 可分解为

$$\begin{aligned}I&\le C\int_{\mathbb{R}^3}\left|\sum_{j<-N}\dot{\Delta}_j\nabla b\right||\nabla b||\nabla v|\mathrm{d}x\\&+C\int_{\mathbb{R}^3}\left|\sum_{j=-N}^{N}\dot{\Delta}_j\nabla b\right||\nabla b||\nabla v|\mathrm{d}x+C\int_{\mathbb{R}^3}\left|\sum_{j>N}\dot{\Delta}_j\nabla b\right||\nabla b||\nabla v|\mathrm{d}x\\&:=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

对于 I_1。利用 Hölder 不等式，Bernstein 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式得

$$\begin{aligned}I_1&=C\int_{\mathbb{R}^3}\left|\sum_{j<-N}\dot{\Delta}_j\nabla b\right||\nabla b||\nabla v|\mathrm{d}x\\&\le C\sum_{j<-N}\left\|\dot{\Delta}_j\nabla b\right\|_\infty\|\nabla b\|_2\|\nabla v\|_2\\&\le C\sum_{j<-N}2^{\frac{3j}{2}}\left\|\dot{\Delta}_j\nabla b\right\|_2\|\nabla b\|_2\|\nabla^2 v\|_2^{\frac{1}{2}}\|v\|_2^{\frac{1}{2}}\\&\le C2^{-\frac{3N}{2}}\|\nabla b\|_2^2\|\nabla^2 v\|_2^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant C2^{-2N}\|\nabla b\|_2^{\frac{8}{3}}+\frac{1}{8}\|\nabla^2 v\|_2^2,\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中利用了不等式

$$\|\nabla v\|_2\le C\|\nabla^2 v\|_2^{\frac{1}{2}}\|v\|_2^{\frac{1}{2}}.$$

DOI: 10.12677/pm.2026.163067

下面估 I_2。利用 Hölder 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{j=-N}^{N} \dot{\Delta}_j \nabla b \right| |\nabla b| |\nabla v| \mathrm{d}x \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^3} N^{\frac{3q-3}{4q}} \left(\sum_{j=-N}^{N} \left| \dot{\Delta}_j \nabla b \right|^{\frac{4q}{q+3}} \right)^{\frac{q+3}{4q}} |\nabla b| |\nabla v| \mathrm{d}x \\
&\le CN^{\frac{3q-3}{4q}} \|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}} \|\nabla b\|_2 \|\nabla v\|_{\frac{2q}{q-2}} \\
&\le CN^{\frac{3q-3}{4q}} \|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}} \|\nabla b\|_2 \|\nabla^2 v\|_2^{\frac{q+3}{2q}} \|v\|_2^{\frac{q-3}{2q}} \\
&\le CN^{\frac{3q-3}{4q}} \|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}} \|\nabla b\|_2 \|\nabla^2 v\|_2^{\frac{q+3}{2q}} \\
&\le CN \|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}}^{\frac{4q}{3q-3}} \|\nabla b\|_2^{\frac{4q}{3q-3}} + \frac{1}{8} \|\nabla^2 v\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

这里利用了不等式

$$\|\nabla v\|_{\frac{2q}{q-2}} \le C \|\nabla^2 v\|_2^{\frac{q+3}{2q}} \|v\|_2^{\frac{q-3}{2q}}, \quad q > 3.$$

最后估计 I_3。利用 Hölder 不等式，Bernstein 不等式和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \sum_{j>N} \dot{\Delta}_j \nabla b \right| |\nabla b| |\nabla v| \mathrm{d}x \\
&\le C \sum_{j>N} \left\| \dot{\Delta}_j \nabla b \right\|_5 \|\nabla b\|_2 \|\nabla v\|_{\frac{10}{3}} \\
&\le C \sum_{j>N} 2^{-j} \left\| \dot{\Delta}_j \nabla^2 b \right\|_5 \|\nabla b\|_2 \|\nabla^2 v\|_2^{\frac{4}{5}} \|v\|_2^{\frac{1}{5}} \\
&\le C \sum_{j>N} 2^{-\frac{j}{10}} \left\| \dot{\Delta}_j \nabla^2 b \right\|_2 \|\nabla b\|_2 \|\nabla^2 v\|_2^{\frac{4}{5}} \\
&\le C 2^{-\frac{N}{10}} \|\nabla^2 b\|_2 \|\nabla b\|_2 \|\nabla^2 v\|_2^{\frac{4}{5}} \\
&\le C 2^{-\frac{N}{6}} \|\nabla^2 b\|_2^{\frac{5}{3}} \|\nabla b\|_2^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{8} \|\nabla^2 v\|_2^2 \\
&\le C 2^{-\frac{N}{6}} \|\nabla^2 b\|_2^{\frac{5}{3}} \|\nabla b\|_2^{\frac{2}{3}} \|\nabla b\|_2 + \frac{1}{8} \|\nabla^2 v\|_2^2 \\
&\le C 2^{-\frac{N}{6}} \|\nabla^2 b\|_2^{\frac{5}{3}} \|\nabla^2 b\|_2^{\frac{1}{3}} \|b\|_2^{\frac{1}{3}} \|\nabla b\|_2 + \frac{1}{8} \|\nabla^2 v\|_2^2 \\
&\le C 2^{-\frac{N}{6}} \|\nabla^2 b\|_2^2 \|\nabla b\|_2 + \frac{1}{8} \|\nabla^2 v\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中利用了

$$\|\nabla v\|_{\frac{10}{3}} \le C \|\nabla^2 v\|_2^{\frac{4}{5}} \|v\|_2^{\frac{1}{5}},$$

$$\|\nabla b\|_2^{\frac{2}{3}} \le C\left\|\nabla^2 b\right\|_2^{\frac{1}{3}}\|b\|_2^{\frac{1}{3}}.$$

综合(3.7)式，(3.8)式和(3.9)式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)+\frac{1}{2}\left\|\nabla^2 v\right\|_2^2+\frac{3}{4}\left\|\nabla^2 b\right\|_2^2 \\
&\le C2^{-2N}\|\nabla b\|_2^{\frac{8}{3}}+CN\|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}}^{\frac{4q}{3q-3}}\|\nabla b\|_2^{\frac{4q}{3q-3}}+C2^{-\frac{N}{6}}\left\|\nabla^2 b\right\|_2^2\|\nabla b\|_2+C\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right) \\
&\le\left[C2^{-\frac{3}{2}N}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\right]^{\frac{4}{3}}+CN\|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}}^{\frac{4q}{3q-3}}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right) \\
&\quad+\left[CN^{-\frac{N}{3}}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left\|\nabla^2 b\right\|_2^2+C\left(\|\nabla b\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2\right).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

选取(3.10)式中的 N，使得

$$\left[C2^{-\frac{N}{3}}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{4},$$

N 可取为

$$N=3\left(\frac{\log\left(C\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\right)}{\log 2}+4\right).$$

另一方面可验证得

$$\left[C2^{-\frac{3}{2}N}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le \left[C2^{-\frac{N}{3}}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{4},$$

即可得出

$$\left[C2^{-\frac{3}{2}N}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)\right]^{\frac{4}{3}} \le C.$$

因此由(3.10)式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)+\frac{1}{2}\left(\left\|\nabla^2 v\right\|_2^2+\left\|\nabla^2 b\right\|_2^2\right) \\
&\le C\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2\right)+C\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right)\|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}}^{\frac{4q}{3q-3}}\log\left(\left\|\nabla^2 v\right\|_2^2+\left\|\nabla^2 b\right\|_2^2\right).
\end{aligned}$$

整理得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right)+\left\|\nabla^2 v\right\|_2^2+\left\|\nabla^2 b\right\|_2^2 \\
&\le C\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right)+C\left(\left\|\nabla^2 v\right\|_2^2+\left\|\nabla^2 b\right\|_2^2+e\right)\|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}}^{\frac{4q}{3q-3}}\log\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right) \\
&\le C\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right)\left[\|\nabla b\|_{\dot{F}^0_{q,\frac{4q}{q+3}}\left(\mathbb{R}^3\right)}^{\frac{4q}{3q-3}}\log\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right)+1\right],
\end{aligned} \tag{3.11}$$

对(3.11)式利用 Gronwall 不等式得

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_{22}^{22}+e+\int_0^T\left(\|\nabla^2 v\|_2^2+\|\nabla^2 b\|_2^2\right)\mathrm{d}\tau \\
&\le C\left(\|\nabla v_0\|_2^2+\|\nabla b_0\|_2^2+e\right)\exp\left\{\int_0^T\|\nabla b\|_{\dot F^0_{q,\frac{4q}{q+3}}\left(\mathbb{R}^3\right)}^{\frac{4q}{q+3}}\log\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right)\mathrm{d}\tau+T\right\} \qquad (3.12)\\
&\le C_T\left(\|\nabla v_0\|_2^2+\|\nabla b_0\|_2^2+e\right)\exp\left\{\int_0^T\|\nabla b\|_{\dot F^0_{q,\frac{4q}{q+3}}\left(\mathbb{R}^3\right)}^{\frac{4q}{q+3}}\log\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right)\mathrm{d}\tau\right\},
\end{aligned}
$$

令 $Y(t)=\log\left(\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\right)$，则对(3.12)式两边取对数可得

$$
Y(t)\le\log\left(\|\nabla v_0\|_2^2+\|\nabla b_0\|_2^2+e\right)+C_T\int_0^T\|\nabla b\|_{\dot F^0_{q,\frac{4q}{q+3}}\left(\mathbb{R}^3\right)}^{\frac{4q}{q+3}}Y(s)\mathrm{d}s,
$$

于是

$$
Y(t)\le\log\left(\|\nabla v_0\|_2^2+\|\nabla b_0\|_2^2+e\right)\exp\left(C_T\int_0^T\|\nabla b\|_{\dot F^0_{q,\frac{4q}{q+3}}}^{\frac{4q}{3q-3}}\mathrm{d}s\right), \qquad (3.13)
$$

令 $M=\|\nabla v_0\|_2^2+\|\nabla b_0\|_2^2+e$, 则由(3.13)式有

$$
\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla b\|_2^2+e\le M^{\exp\left\{C_T\int_0^T\|\nabla b\|_{\dot F^0_{q,\frac{4q}{q+3}}}^{\frac{4q}{3q-3}}\mathrm{d}s\right\}},
$$

从而得到结论，即完成定理 1.1 的证明。

参考文献

[1] Sawano, Y. (2012) New Characterizations of Besov-Triebel-Lizorkin-Type Spaces Including Interpretations as Coorbits. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **18**, 1067-1111.

[2] Frazier, M., Jawerth, B. and Weiss, G. (1991). Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbms/079

[3] Linshiz, J. and Titi, S. (2006) Analytical Study of Certain Magnetohydrodynamic-α Models. *Journal of Mathematical Physics*, **48**, Article 065504.

[4] Zhou, Y. and Fan, J. (2011) On the Cauchy Problem for a Leray-α Model. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **12**, 648-657.

[5] Fan, J. and Ozawa, T. (2009) Regularity Criteria for the Magnetohydrodynamic Equations with Partial Viscous Terms and the Leray-α-MHD Model. *Kinetic and Related Models*, **2**, 293-305.

[6] Omrane, I., Gala, S., Kim, J. and Ragusa, M. (2019) Logarithmi-Cally Improved Blow-Up Criterion for Smooth Solutions to the Leray-α-Magnetohydrodynamic Equations. *Archiv der Mathematik*, **55**, 55-68.

[7] Wan, Y. and Chen, X. (2022) Regularity Criterion for 3D Incompressible Navier-Stokes Equations via the Pressure in Triebel-Lizorkin Spaces. *Acta Mathematica Scientia*, **42**, 1437-1481.

[8] Zheng, X. (2014) A Regularity Criterion for the Tridimensional Navier-Stokes Equations in Term of One Velocity Component. *Journal of Differential Equations*, **256**, 283-309. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.09.002

[9] Bahouri, H., Chemin, J. and Danchin. R. (2011) Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. In: *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer.

[10] Robinson, J.C., Rodrigo, J.L. and Sadowski, W. (2016) The Three-Dimensional Navier-Stokes Equations. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/cbo9781139095143

[11] Gagliardo, E. (1959) Ulteriori proprirtà di alcune classi di funzioni in più variabili. *Ricerche di Matematica*, **8**, 24-51.

[12] Nirenberg, L. (1959) On Elliptic Partial Differential Equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, **13**, 115-162.