Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(3), 76-82
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.163071

Hans汉斯

巴拿赫代数上伪n强Drazin逆的可加性质

王炜锋

浙江邮电职业技术学院继续教育学院，浙江 绍兴

收稿日期：2026年2月6日；录用日期：2026年3月4日；发布日期：2026年3月12日

摘 要

本文研究伪n强Drazin逆在巴拿赫代数上的可加性质，证明了在a和b可交换的条件下，$a+b$和$1+a^{pnsD}b$的伪n强Drazin可逆性是等价的，同时我们还给出了它们伪n强Drazin逆之间的关系。

关键词

伪n强Drazin逆，可加性质，巴拿赫代数

Additive Property of Pseudo n-Strong Drazin Inverse of Elements in Banach Algebras

Weifeng Wang

School of Continuing Education, Zhejiang Post and Telecommunication College, Shaoxing Zhejiang

Received: February 6, 2026; accepted: March 4, 2026; published: March 12, 2026

Abstract

This paper studies the additive properties of pseudo n-strong Drazin inverses in Banach algebras, proving that under the condition that a and b are commutative, the pseudo n-strong Drazin Invertibility of $a+b$ and $1+a^{pnsD}b$ is equivalent. At the same time, we also provide the relationship between their pseudo n-strong Drazin inverses.

Keywords

Pseudo n-Strong Drazin Inverse, Additive Properties, Banach Algebra

文章引用: 王炜锋. 巴拿赫代数上伪 n 强 Drazin 逆的可加性质[J]. 理论数学, 2026, 16(3): 76-82.
DOI: 10.12677/pm.2026.163071

1. 引言

在本文中，$\mathcal{A}$ 表示一个含单位元的巴拿赫代数。$\mathcal{A}^{-1}$ 和 $\mathcal{A}^{\mathrm{nil}}$ 分别表示 $\mathcal{A}$ 中可逆元和幂零元全体。$\binom{n}{k}$ 表示二项式系数 $\frac{n!}{k!(n-k)!}(0\le k\le n)$。$a\in\mathcal{A}$ 的换位子和二重换位子分别定义为

$$\mathrm{comm}(a)=\{x\in\mathcal{A}:ax=xa\},$$
$$\mathrm{comm}^2(a)=\{x\in\mathcal{A}:xy=yx,\text{对所有 } y\in\mathrm{comm}(a)\}.$$

我们将

$$J(\mathcal{A})=\{a\in\mathcal{A}:1+ax\in\mathcal{A}^{-1},\text{对所有 } x\in\mathcal{A}\}$$

称作巴拿赫代数上的 Jacobson 根，关于 Jacobson 根的更多等价刻画详见[1]和[2]。记

$$\sqrt{J(\mathcal{A})}=\{a\in\mathcal{A}:a^n\in J(\mathcal{A}),\text{对某个 } n\ge 1\}.$$

Drazin 逆理论在算子理论、微分方程、马尔科夫链和数值分析等领域中都有着重要应用。1958 年，Drazin [3]提出了 Drazin 逆的概念。若存在一个元素 $x\in\mathcal{A}$ 使得

$$ax=xa,\ xax=x \text{ 且 } a-axa\in\mathcal{A}^{\mathrm{nil}}.$$

则称 $a\in\mathcal{A}$ 为 Drazin 可逆的。记 $x=a^D$ 为 a 的 Drazin 逆，a 的 Drazin 逆若存在则唯一。2012 年，Wang 和 Chen [4]在巴拿赫代数中引入了伪 Drazin 逆的概念。若存在一个元素 $x\in\mathcal{A}$ 使得

$$ax=xa,\ xax=x \text{ 且 } a-axa\in\sqrt{J(\mathcal{A})}.$$

则称 $a\in\mathcal{A}$ 为伪 Drazin 可逆的。记 $x=a^{pD}$ 为 a 的伪 Drazin 逆，a 的伪 Drazin 逆若存在则唯一。2021 年，Mos1ć [5]进一步定义了伪 n 强 Drazin 逆的概念。设 $n\in\mathbb{N}$，若存在一个元素 $x\in\mathcal{A}$ 使得

$$ax=xa,\ xax=x \text{ 且 } a^n-ax\in\sqrt{J(\mathcal{A})}.$$

则称 $a\in\mathcal{A}$ 为伪 n 强 Drazin 可逆的。记 $x=a^{pnsD}$ 为 a 的伪 n 强 Drazin 逆，a 的伪 n 强 Drazin 逆若存在则唯一。令 $\mathcal{A}^{psdD}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有伪 n 强 Drazin 可逆元素的集合。

两个 Drazin 可逆元素的和是否是 Drazin 可逆的?这是 Drazin 逆理论研究中的一个重要问题。1958 年，Drazin 在[3]中开创性地研究了环中 Drazin 可逆元的可加性问题，证明了当满足条件 $ab=ba=0$ 时，有 $(a+b)^D=a^D+b^D$。此后，诸多学者致力于在更弱的条件下探讨各类广义逆的可加性，详见[6]和[7]。华氏恒等式是数学家华罗庚提出的一个关于除环的恒等式，在证明 Hua 定理中具有重要的应用[8]。设 a,b 为除环 $\mathcal{R}$ 中的元素且 $ab\ne 0,1$，华氏恒等式陈述为:

$$(a+b)^{-1}=a^{-1}-a^{-1}\left(1+b^{-1}a\right)^{-1}.$$

2011 年，Wei 和 Deng [9]针对可交换复矩阵 A，B，给出了 $(A+B)^D$ 关于 $A,A^D,B,B^D,\left(I+A^DB\right)^D$ 的具体表达式。随后，Zhuang 等人[10]于 2012 年将此结果拓展至环上可交换元 a,b 的情形，进一步证明了

$a+b$ 是 Drazin 可逆的当且仅当 $1+a^D b$ 是 Draizn 可逆的，并给出了它们关于彼此的 Drazin 逆表达式。这一等价刻画后被 Wang [11]于 2017 年推广至强 Drazin 逆的情形。继而由 Zou 等人[12]在 2019 年延伸至 n 强 Drazin 逆的情况。近期，Yan 和 Wang 在[13]中进一步将之拓展至广义 n 强 Drazin 逆的情形。本文致力于将上述结果继续推广至伪 n 强 Drazin 逆的情形，并建立相应的具体表达公式。

2. 预备知识与重要引理

首先，我们介绍一个关于 Jacobson 根性质的引理，这在后续的定理证明中将会非常有用。

引理 2.1 [14] 设 $a,b\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$ 满足 $ab=ba$，则下列结论成立：

1) 若 $a\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$ (或 $b\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$)，则 $ab\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$。

2) 若 $a,b\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$，则 $a+b\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$。

引理 2.2 [5] 设 $a\in\mathcal{A}^{pnsD}$，则 a 有且仅有一个伪 n 强 Drazin 逆。令 $x=a^{pnsD}$，则 $x\in\mathrm{comm}^2(a)$。

下面我们讨论伪 n 强 Drazin 逆与伪 Drazin 逆之间的关系。

引理 2.3 设 $n\in\mathbb{N}$ 并且 $a\in\mathcal{A}^{pnsD}$，则 $a\in\mathcal{A}^{pD}$ 且 $a^{pD}=a^{pnsD}$。

证明：因为 $a\in\mathcal{A}^{pnsD}$，根据定义可得存在一个元素 $x\in\mathcal{A}$ 使得

$$ax=xa,\ xax=x \text{ 且 } a^n-ax\in\sqrt{J(\mathcal{A})}.$$

根据引理 2.1 可得

$$(a-axa)^n=a^n-a^{n+1}x=(a^n-ax)(1-ax)\in\sqrt{J(\mathcal{A})}.$$

所以 $a-axa\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$。因此 $a\in\mathcal{A}^{pD}$ 且 $a^{pD}=a^{pnsD}$。命题得证。

下面我们讨论 n 的取值对逆元存在性的影响。

引理 2.4 设 $n\in\mathbb{N}$ 并且 $a\in\mathcal{A}^{pnsD}$，则 $a\in\mathcal{A}^{p2nsD}$ 且 $a^{p2nsD}=a^{pnsD}=a^{pD}$。

证明：因为 $a\in\mathcal{A}^{pnsD}$，根据([14]，定理 2.6)可得 $a-a^{n+1}\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$。观察到

$$a-a^{2n+1}=\left(a-a^{n+1}\right)\left(1+a^n\right),$$

所以由引理 2.1 可得 $a-a^{2n+1}\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$，因此再次根据([14]，定理 2.6)可得 $a\in\mathcal{A}^{p2nsD}$。此外，根据引理 2.3 可得 $a^{p2nsD}=a^{pnsD}=a^{pD}$。命题得证。

下面介绍一个关于伪 n 强 Drazin 逆的等价刻画，这将用来证明定理 3.1。

引理 2.5 设 $a,x\in\mathcal{A}$，$n\in\mathbb{N}$，则下列命题等价：

1) $a\in\mathcal{A}^{pnsD}$ 且 $a^{pnsD}=x$；

2) $ax=xa$，$xax=x$ 且 $a-a^{n+2}x\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$。

证明：(1) $\Rightarrow$ (2)设 $a\in\mathcal{A}^{pnsD}$，令 $x=a^{pnsD}$，则我们只需证明 $a-a^{n+2}x\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$。根据([15]，定理 3.2)可得

$$\left(a-a^{n+2}x\right)^n=\left(a^n-ax\right)\left[1-ax+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}-1\right)a^{ni+1}x\right].$$

由于 $a^n-ax\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$，并且

$$1-ax+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}-1\right)a^{ni+1}x\in\mathrm{comm}\left(a^n-ax\right),$$

所以根据引理 2.1 可得 $\left(a-a^{n+2}x\right)^n\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$，因此 $a-a^{n+2}x\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$。

(2) $\Rightarrow$ (1)设 $ax=xa$， $xax=x$ 且 $a-a^{n+2}x\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$。因此，我们只需证明 $a^n-ax\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$。由于 $a^{n-1}-x-a^nx\in\mathrm{comm}\left(a-a^{n+2}x\right)$，所以根据引理 2.1 可得

$$a^n-ax=\left(a-a^{n+2}x\right)\left(a^{n-1}-x-a^nx\right)\in\sqrt{J(\mathcal{A})}.$$

引理 2.6 设 $n\in\mathbb{N}$ 并且 $a,b\in\mathcal{A}^{pnsD}$ 满足 $ab=ba$，则 $ab\in\mathcal{A}^{pnsD}$ 且 $(ab)^{pnsD}=a^{pnsD}b^{pnsD}=b^{pnsD}a^{pnsD}$。

证明：根据引理 2.2 可知 $a^{pnsD}\in\mathrm{comm}^2(a)$，$b^{pnsD}\in\mathrm{comm}^2(b)$，所以由 $ab=ba$ 可得 a,b,a^{pnsD} 和 b^{pnsD} 彼此交换。因此

$$aba^{pnsD}b^{pnsD}=a^{pnsD}b^{pnsD}ab,$$

并且

$$a^{pnsD}b^{pnsD}aba^{pnsD}b^{pnsD}=a^{pnsD}aa^{pnsD}b^{pnsD}bb^{pnsD}=a^{pnsD}b^{pnsD}.$$

此外，由引理 2.1 可得

$$(ab)^n-aba^{pnsD}b^{pnsD}=a^n\left(b^n-bb^{pnsD}\right)+bb^{pnsD}\left(a^n-aa^{pnsD}\right)\in\sqrt{J(\mathcal{A})}.$$

命题得证。

引理 2.7 设 $n\in\mathbb{N}$ 并且 $a,b\in\mathcal{A}^{pnsD}$ 满足 $ab=ba=0$。则 $a+b\in\mathcal{A}^{pnsD}$ 且 $(a+b)^{pnsD}=a^{pnsD}+b^{pnsD}$。

证明：由于 $ab=ba$，所以根据引理 2.2 可得 a,b,a^{pnsD} 和 b^{pnsD} 彼此交换。令 $x=a^{pnsD}$， $y=b^{pnsD}$。可知

$$ax=xa,xax=x,a^n-ax\in\sqrt{J(\mathcal{A})},$$

$$by=yb,yby=y,b^n-by\in\sqrt{J(\mathcal{A})}.$$

由 $ab=ba=0$ 可得 $ay=aby^2=0$。同理有 $ya=bx=xb=0$。所以

$$(a+b)(x+y)=ax+by=xa+yb=(x+y)(a+b),$$

$$(x+y)(a+b)(x+y)=xax+yby=x+y,$$

并且由引理 2.1 可得

$$(a+b)^n-(a+b)(x+y)=\left(a^n-ax\right)+\left(b^n-by\right)\in\sqrt{J(\mathcal{A})}.$$

命题得证。

3. 主要结果

定理 3.1 设 $n\in\mathbb{N}$ 并且 $a,b\in\mathcal{A}^{pnsD}$ 满足 $ab=ba$，则 $a+b\in\mathcal{A}^{pnsD}$ 当且仅当 $1+a^{pnsD}b\in\mathcal{A}^{pnsD}$。此外，我们可知

$$(a+b)^{pnsD}=\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}a^{pnsD}+b^{pnsD}\left[1+\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^{-1}\left(1-aa^{pnsD}\right)$$

且

$$\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}=1-aa^{pnsD}+a^2a^{pnsD}(a+b)^{pnsD}.$$

证明：$\Leftarrow$：由于 $ab=ba$，所以根据引理 2.2 可得 a,b,a^{pnsD} 和 b^{pnsD} 彼此交换。设 $1+a^{pnsD}b\in\mathcal{A}^{pnsD}$。因为 $a\in\mathcal{A}^{pnsD}$，由引理 2.5 可得 $a-a^{n+2}a^{pnsD}\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$，所以存在某个正整数 k 使得 $\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)^k\in J(\mathcal{A})$，若 k 为偶数，由([16]，引理 2.3)可得 $\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)^{k+1}\in J(\mathcal{A})$，即可进一步将 k 取成奇数，因此

$$1+\left[\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^k=1+\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)^k\left(b^{pnsD}\right)^k\in\mathcal{A}^{-1}.$$

由于 n 是奇数，根据 n 次方和公式可得

$$\begin{aligned}1+\left[\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^k&=1-\left[-\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^k\\&=\left[1+\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]\sum_{j=0}^{k-1}\left[-\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^j,\end{aligned}$$

所以由 $1+\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}$ 与 $\sum_{j=0}^{k-1}\left[-\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^j$ 的交换性可得

$$1+\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\in\mathcal{A}^{-1}.$$

为方便后续记号，记 $w=1+\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}$ 。因此我们可设

$$x=\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}a^{pnsD}+b^{pnsD}w^{-1}\left(1-aa^{pnsD}\right).$$

下证 $(a+b)^{pnsD}=x$ 。根据定理 2.5，我们需要证明

1) $(a+b)x=x(a+b)$，2) $x(a+b)x=x$，3) $(a+b)-(a+b)^{n+2}x\in\sqrt{J(\mathcal{A})}$ 。

1) 由 a,b,a^{pnsD},b^{pnsD} 的交换性易得。

2) 由 $a^{pnsD}\left(1-aa^{pnsD}\right)=0$，$1-aa^{pnsD}$ 是幂等的可知

$$x^2=\left[\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}\right]^2\left(a^{pnsD}\right)^2+\left(b^{pnsD}\right)^2w^{-2}\left(1-aa^{pnsD}\right).$$

下面我们将 x^2 的长公式前后两部分分别乘以 $a+b$，根据

$$\begin{aligned}&\left[\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}\right]^2\left(a^{pnsD}\right)^2(a+b)\\&=\left[\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}\right]^2a^{pnsD}\left(1+a^{pnsD}b\right)\\&=\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}a^{pnsD}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\left(b^{pnsD}\right)^2w^{-2}\left(1-aa^{pnsD}\right)(a+b)\\&=w^{-2}\left(b^{pnsD}\right)^2(a+b)\left(1-aa^{pnsD}\right)\\&=w^{-2}b^{pnsD}\left(1+ab^{pnsD}\right)\left(1-aa^{pnsD}\right)\\&=w^{-2}b^{pnsD}w\left(1-aa^{pnsD}\right)\\&=b^{pnsD}w^{-1}\left(1-aa^{pnsD}\right)\end{aligned}$$

可得

$$x(a+b)x=\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}a^{pnsD}+b^{pnsD}w^{-1}\left(1-aa^{pnsD}\right)=x.$$

3) 观察到

$$\begin{aligned}&a^{pnsD}(a+b)^{n+2}\\&=a^{n+2}\left(a^{pnsD}\right)^{n+3}\sum_{j=0}^{n+2}\binom{n+2}{0}a^{n+2-j}b^j\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^{n+2}\sum_{j=0}^{n+2}\binom{n+2}{0}\left(a^{pnsD}\right)^{j+1}b^{j} \\
&= a^{n+2}a^{pnsD}\sum_{j=0}^{n+2}\binom{n+2}{0}\left(a^{pnsD}\right)^{j}b^{j} \\
&= a^{n+2}a^{pnsD}\left(1+a^{pnsD}b\right)^{n+2}.
\end{aligned}
$$

同理，$b^{pnsD}\left(a+b\right)^{n+2}=b^{n+2}b^{pnsD}\left(1+b^{pnsD}a\right)^{n+2}$。由$\left(1-aa^{pnsD}\right)a^{pnsD}=0$可得

$$
\begin{aligned}
&b^{pnsD}\left(a+b\right)^{n+2}\left(1-aa^{pnsD}\right) \\
&= b^{n+2}b^{pnsD}\left(1+b^{pnsD}a\right)^{n+2}\left(1-aa^{pnsD}\right) \\
&= b^{n+2}b^{pnsD}w^{n+2}\left(1-aa^{pnsD}\right).
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\left(a+b\right)-\left(a+b\right)^{n+2}x \\
&=\left(a+b\right)-a^{pnsD}\left(a+b\right)^{n+2}\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD} \\
&\quad -b^{pnsD}\left(a+b\right)^{n+2}\left(1-aa^{pnsD}\right)\left[1+\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^{-1} \\
&=\left(a+b\right)-a^{n+2}a^{pnsD}\left(1+a^{pnsD}b\right)^{n+2}\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD} \\
&\quad -b^{n+2}b^{pnsD}\left(1-aa^{pnsD}\right)\left[1+\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^{n+1} \\
&=\left(a+b\right)-a^{n+2}a^{pnsD}\left(1+a^{pnsD}b\right)^{n+2}\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}-b^{n+2}b^{pnsD}\left(1-aa^{pnsD}\right) \\
&\quad -b^{n+2}b^{pnsD}\left(1-aa^{pnsD}\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left[\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^{j} \\
&=\left[\left(1+a^{pnsD}b\right)-\left(1+a^{pnsD}b\right)^{n+2}\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}\right]a^{n+2}a^{pnsD} \\
&\quad +\left(1+a^{pnsD}b\right)\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)+\left(b-b^{n+2}b^{pnsD}\right)\left(1-aa^{pnsD}\right) \\
&\quad -b^{n+2}b^{pnsD}\left(1-aa^{pnsD}\right)\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left[\left(a-a^{n+2}a^{pnsD}\right)b^{pnsD}\right]^{j}.
\end{aligned}
$$

由于a,b和$1+a^{pnsD}b$都是伪n强Drazin可逆的，根据引理2.5可知

$$a-a^{n+2}a^{pnsD}\in\sqrt{J\left(\mathcal{A}\right)},b-b^{n+2}b^{pnsD}\in\sqrt{J\left(\mathcal{A}\right)}$$

和

$$\left(1+a^{pnsD}b\right)-\left(1+a^{pnsD}b\right)^{n+2}\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}\in\sqrt{J\left(\mathcal{A}\right)}.$$

所以根据引理2.1可得$\left(a+b\right)-\left(a+b\right)^{n+2}x\in\sqrt{J\left(\mathcal{A}\right)}$。

综上所述，$a+b\in\mathcal{A}^{pnsD}$，并且

$$\left(a+b\right)^{pnsD}=x=\left(1+a^{pnsD}b\right)^{pnsD}a^{pnsD}+b^{pnsD}w^{-1}\left(1-aa^{pnsD}\right).$$

$\Rightarrow$：设$a+b\in\mathcal{A}^{pnsD}$。令$a_1=1-aa^{pnsD}$，$b_1=a^{pnsD}\left(a+b\right)$。显然

$$1+a^{pnsD}b=1-aa^{pnsD}+a^{pnsD}\left(a+b\right)=a_1+b_1.$$

观察到 a_1 是幂等的，因此 $a_1 \in \mathcal{A}^{pnsD}$ 且 $a_1^{pnsD} = a_1 = 1 - aa^{pnsD}$。根据([5]，性质 3.1)可知 $a^{pnsD} \in \mathcal{A}^{pnsD}$ 且 $\left(a^{pnsD}\right)^{pnsD} = a^2 a^{pnsD}$，又由于 $a + b \in \mathcal{A}^{pnsD}$ 并且 a^{pnsD} 与 $a + b$ 可交换，所以根据定理 2.6 可知 $b_1 \in \mathcal{A}^{pnsD}$ 且

$$b_1^{pnsD} = \left[a^{pnsD}(a+b)\right]^{pnsD} = \left(a^{pnsD}\right)^{pnsD}(a+b)^{pnsD} = a^2 a^{pnsD}(a+b)^{pnsD}.$$

易知 $a_1 b_1 = b_1 a_1 = 0$，所以根据引理 2.7 可得 $1 + a^{pnsD} b = a_1 + b_1 \in \mathcal{A}^{pnsD}$，并且

$$\left(1 + a^{pnsD} b\right)^{pnsD} = \left(a_1 + b_1\right)^{pnsD} = a_1^{pnsD} + b_1^{pnsD} = 1 - aa^{pnsD} + a^2 a^{pnsD}(a+b)^{pnsD}.$$

最后我们通过一个具体的例子来验证定理 3.1。

例 3.2 设 X 是巴拿赫空间，$B(X)$ 表示从 X 到 X 的有界线性算子。$A, B \in B(X)$。令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因为 A，B 都是幂等矩阵，所以 A, B 都是伪 n 强 Drazin 可逆的且 $A^{pnsD} = A$，$B^{pnsD} = B$。此外，易知 $AB = BA = 0$，$A + B = I$，$I + A^{pnsD} B = I$。直接计算可验证得上述定理 3.1 的公式成立。

参考文献

[1] Lam, T.Y. (1991) A First Course in Noncommutative Rings (Vol. 131). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0406-7

[2] Müller, V. (2007) Spectral Theory of Linear Operators: And Spectral Systems in Banach Algebras. Birkhäuser Basel.

[3] Drazin, M.P. (1958) Pseudo-inverses in Associative Rings and Semigroups. *The American Mathematical Monthly*, **65**, 506-514. https://doi.org/10.1080/00029890.1958.11991949

[4] Wang, Z. and Chen, J. (2012) Pseudo Drazin Inverses in Associative Rings and Banach Algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, **437**, 1332-1345. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.04.039

[5] Mosić, D. (2019) The Generalized and Pseudo *n*-Strong Drazin Inverses in Rings. *Linear and Multilinear Algebra*, **69**, 361-375. https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1599806

[6] Hartwig, R.E., Wang, G. and Wei, Y. (2001) Some Additive Results on Drazin Inverse. *Linear Algebra and Its Applications*, **322**, 207-217. https://doi.org/10.1016/s0024-3795(00)00257-3

[7] Zhu, H. and Chen, J. (2014) Additive Property of Pseudo Drazin Inverse of Elements in Banach Algebras. *Filomat*, **28**, 1773-1781. https://doi.org/10.2298/fil1409773z

[8] Hua, L. (1949) On the Automorphisms of a Sfield. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **35**, 386-389. https://doi.org/10.1073/pnas.35.7.386

[9] Wei, Y. and Deng, C. (2011) A Note on Additive Results for the Drazin Inverse. *Linear and Multilinear Algebra*, **59**, 1319-1329. https://doi.org/10.1080/03081087.2010.496110

[10] Zhuang, G., Chen, J., Cvetković-Ilić, D.S. and Wei, Y. (2011) Additive Property of Drazin Invertibility of Elements in a Ring. *Linear and Multilinear Algebra*, **60**, 903-910. https://doi.org/10.1080/03081087.2011.629998

[11] Wang, Z. (2017) A Class of Drazin Inverses in Rings. *Filomat*, **31**, 1781-1789. https://doi.org/10.2298/fil1706781w

[12] Zou, H., Mosić, D., Zuo, K. and Chen, Y. (2019) On Then-Strong Drazin Invertibility in Rings. *Turkish Journal of Mathematics*, **43**, 2659-2679. https://doi.org/10.3906/mat-1905-50

[13] Yan, K. and Wang, W. (2025) Additive Results for the Generalized N-Strong Drazin Inverse in Banach Algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*. https://doi.org/10.1142/s0219498826502269

[14] Cui, J., Danchev, P. and Zeng, Y (2023) Some New Results on Pseudo N-Strong Drazin Inverses in Rings. arXiv: 2312.02347.

[15] Zou, H., Chen, J., Zhu, H. and Wei, Y. (2020) Characterizations for the N-Strong Drazin Invertibility in a Ring. *Journal of Algebra and Its Applications*, **20**, Article ID: 2150141. https://doi.org/10.1142/s0219498821501413

[16] Zou, H. and Chen, J. (2017) On the Pseudo Drazin Inverse of the Sum of Two Elements in a Banach Algebra. *Filomat*, **31**, 2011-2022. https://doi.org/10.2298/fil1707011z