Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(3), 83-92
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.163072

Hans汉斯

球空间中具有半平行第二基本形式的超曲面中的一个不等式

刘娅雪

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2026年2月7日；录用日期：2026年3月4日；发布日期：2026年3月12日

摘 要

本文研究了球空间 $S^{n+1}(n\geq 3)$ 中具有Möbius第二基本形式半平行的超曲面 M^n 上的Möbius第二基本形式 B 的二阶协变导数的分量 $B_{ij,kl}$ 的极小模张量，并且得到了关于Möbius第二基本形式 B 的二阶协变导数模平方的两个等价的不等式：$\|\nabla^2 B\|^2\geq\frac{n(5n-4)}{n+2}\|\nabla\Phi\|^2-\frac{3n^2}{(n+2)(n+4)}\|\delta\Phi\|^2$ 以及 $\|\nabla^2 B\|^2\geq\frac{n(n-1)}{n+2}\|\nabla\Phi\|^2+\frac{3n}{(n+2)(n+4)}\|\Delta B\|^2$。

关键词

Möbius第二基本形式，超曲面，极小模张量

An Inequality for Hypersurfaces with Semi-Parallel Second Fundamental Form in the Sphere

Yaxue Liu

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: February 7, 2026; accepted: March 4, 2026; published: March 12, 2026

Abstract

This paper studies the minimal norm tensor of the components $B_{ij,kl}$ of the second covariant

文章引用: 刘娅雪. 球空间中具有半平行第二基本形式的超曲面中的一个不等式[J]. 理论数学, 2026, 16(3): 83-92.
DOI: 10.12677/pm.2026.163072

derivative of the Möbius second fundamental form B on hypersurfaces M^n with semi-parallel Möbius second fundamental form in the sphere $S^{n+1}(n\geq 3)$. Thereby establishing two inequalities for the squared norm of the second covariant derivative of B: 1)
$\left\|\nabla^2 B\right\|^2 \geq \frac{n(5n-4)}{n+2}\|\nabla\Phi\|^2 - \frac{3n^2}{(n+2)(n+4)}\|\delta\Phi\|^2$, **2)** $\left\|\nabla^2 B\right\|^2 \geq \frac{n(n-1)}{n+2}\|\nabla\Phi\|^2 + \frac{3n}{(n+2)(n+4)}\|\Delta B\|^2$.

Keywords

Möbius Second Fundamental Form, Hypersurfaces, Minimal Modulus Tensor

1. 引言

在微分几何中，张量的分解是重要的研究方向之一。1926 年，Alexander 在[1]中给出了张量分解存在的条件。随后，Krupka [2]-[4]对张量 trace-free 分解做了许多研究，如：$(2,2)$ 型 Weyl 共形曲率张量是 $(2,2)$ 型黎曼曲率张量的 trace-free 分解，$(1,3)$ 型射影曲率张量是 $(1,3)$ 型黎曼曲率张量的 trace-free 分解等。2021 年，Guo 和 guan [5]提出了极小模张量的概念并且研究了一般的三阶协变张量以及四阶协变张量的极小模张量，给出 Wey 共形曲率张量和 Cotton 张量的新的解释，其中 Weyl 张量是黎曼曲率张量的极小模张量，Cotton 张量是黎曼曲率张量散度的极小模张量。并且利用极小模张量原理还可以得到一些有用的不等式。

Möbius 几何是几何学中一类重要的几何，它由球面上的反演生成，是球面上在 Möbius 变换群下子流形的共形几何。1998 年，王长平[6]利用光锥模型建立了单位球中子流形的 Möbius 完全不变系统，其中包括 n 维无脐子流形 $x:M^n\to S^{n+p}$ 上的 Möbius 度量 g，Möbius 第二基本形式 B，Möbius 形式 Φ 和 $(0,2)$ 型对称张量 Blaschke 张量 A，且在 $n\geq 3$ 时，x 的 Möbius 度量 g 与 Möbius 第二基本形式 B 一起完全决定了单位球 S^{n+1} 中 Möbius 等价的超曲面[7] [8]。在子流形的 Möbius 几何中，若对 Möbius 不变量施加不同的限制条件，就会得到有意义的不同的研究结果。其中包含了 Möbius 形式消失的超曲面分类[9]，Möbius 迷向子流形的分类[10]，具有常 Möbius 截面曲率的超曲面的分类[11]以及对 Blaschke 张量线性依赖于 Möbius 度量和 Möbius 第二基本形式超曲面的分类[12]。

特别地，对 Möbius 第二基本形式 B 施加平行性条件 $(\nabla B=0)$ 已经有很多学者对这一子流形的超曲面进行了研究，见[13]-[16]，球面中 Möbius 第二基本形式平行的子流形的完全分类问题已经得到彻底解决。最近，胡泽军在[17]率先提出了 Möbius 第二基本形式半平行的子流形并获得了丰富。胡泽军指出，所谓 Möbius 第二基本形式半平行，即设是由 Möbius 度量 g 所诱导的联络，曲率算子是 R。设 X,Y,Z 为子流形上的光滑向量场，则有 $R(X,Y)=-\nabla_X\nabla_Y+\nabla_Y\nabla_X+\nabla_{[X,Y]}$，如果 $R(X,Y)B=0$，则称 Möbius 第二基本形式 B 是半平行的。因此非常自然地想到研究单位球中 Möbius 第二基本形式半平行的一个不等式。本文从极小模张量出发，利用四阶协变张量的极小模张量的一般公式，得到了四阶阶协变张量 $B_{ij,kl}$ 在 Möbius 第二基本形式半平行下的极小模表达式。因此，利用极小模的非负性，我们得到了以下定理：

定理 1 设 $x:M^n\to S^{n+1}(n\geq 3)$ 是具有半平行 Möbius 第二基本形式 B 无脐浸入超曲面，则有下列两个等价的不等式成立

1) $\left\|\nabla^2 B\right\|^2 \geq \frac{n(5n-4)}{n+2}\|\nabla\Phi\|^2 - \frac{3n^2}{(n+2)(n+4)}\|\delta\Phi\|^2$.

2) $\left\|\nabla^2 B\right\|^2 \geq \frac{n(n-1)}{n+2}\|\nabla\Phi\|^2 + \frac{3n}{(n+2)(n+4)}\|\Delta B\|^2$.

上面两个不等式等号成立当且仅当

$$\begin{aligned} B_{ij,kl} &= -\frac{n}{n+4}\left(C_{i,j}\delta_{kl} + C_{i,k}\delta_{jl} + C_{i,l}\delta_{jk} + C_{j,k}\delta_{il} + C_{j,l}\delta_{ik}\right) + \frac{4}{n+4}C_{k,l}\delta_{ij} \\ &\quad + \frac{n}{(n+2)(n+4)}\sum_m C_{m,m}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 Φ 是 Möbius 形式，C_i 为 Φ 的分量，$C_{i,j}$ 为 C_i 的一阶协变导数。

2. 预备知识

1998 年，王长平利用光锥模型建立了子流形的完全不变系统，本节将对 S^{n+p} 中子流形的 Möbius 几何作简单介绍，更多细节见文献[6]。

设 R_1^{n+p+2} 是 $n+p+2$ 维 Lortentz 空间，其内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 定义如下：

$$\langle U,V\rangle = -u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \cdots + u_{n+p+1}v_{n+p+1}, \tag{2.1}$$

其中

$$U = (u_0,u_1,\cdots,u_n);\ V = (v_0,v_1,\cdots,v_n). \tag{2.2}$$

设 H^{n+p} 为常截面曲率为−1 的 $n+p$ 维双曲空间，定义为

$$H^{n+p} = \left\{(y_0,y_1,\cdots,y_n) \in R_1^{n+p+1} \mid -y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_{n+p}^2 = -1, y_0^2 \geq 1\right\}. \tag{2.3}$$

设 S_+^{n+p} 为 $S^{n+P} \in R^{n+P+1}$ 中的第一个坐标为正的开半球，则可定义共形映射 $\sigma: R^{n+p} \to S^{n+p}\setminus\{(-1,0)\}$ 以及共形映射 $\tau: H^{n+p} \to S_+^{n+p}$ 分别为

$$\sigma(u) = \left(\frac{1-|u|^2}{1+|u|^2}, \frac{2u}{1+|u|^2}\right), u \in R^{n+P}, \tag{2.4}$$

$$\tau(y_0,y_1) = \left(\frac{1}{y_0}, \frac{y_1}{y_0}\right), (y_0,y_1) \in H^{n+1}. \tag{2.5}$$

设 $x: M^n \to S^{n+P} \in R^{n+P+1}$ 是无脐浸入子流形，x 的 Möbius 位置向量定义为

$$Y = \rho(1,x): M^n \to R_1^{n+p+2},\quad \rho^2 = \frac{n}{n-1}\left\|\mathrm{II} - \frac{1}{m}tr(\mathrm{II})\mathrm{I}\right\|^2 > 0. \tag{2.6}$$

则有如下定理：

定理 2 [6]子流形 $x,\tilde{x}: M^n \to S^{n+P}$ 是 Möbius 等价的当且仅当存在 R_1^{n+p+2} 中的 Lorentz 变换 $T \in O(n+p+1,1)$，使得 $Y = \tilde{Y}T$。

其中 $O(n+p+1,1)$ 是 R_1^{n+p+2} 中保持内积 $\langle,\rangle$ 不变的 Lorentz 群，也说明 $O(n+p+1,1)$ 是 Lorentz 正交群。因此

$$g = \langle dY,dY\rangle = \rho^2 dx\cdot dx, \tag{2.7}$$

是 S^{n+P} 中共形群下的 Möbius 不变量，称为子流形上的 Möbius 度量或由子流形 x 诱导的 Möbius 第一基本

形式。

设 Δ 为 $\left(M^n, g\right)$ 的 Laplace 算子。

$$\langle\Delta Y, \Delta Y\rangle = 1 + n^2\kappa, \tag{2.8}$$

其中 κ 为法化纯量曲率。

设 $\left\{E_1, E_2, \cdots, E_n\right\}$ 是 $\left(M^n, g\right)$ 上的一个局部正交切标架场，$\left\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\right\}$ 为其对偶标架场。且 $E_i(Y) = Y_i$，那么

$$\langle Y_i, Y_j\rangle = \delta_{ij}, 1 \le i, j \le n. \tag{2.9}$$

定义

$$N = -\frac{1}{n}\Delta Y - \frac{1}{2n^2}\langle\Delta Y, \Delta Y\rangle Y. \tag{2.10}$$

那么

$$\langle Y, Y\rangle = \langle N, N\rangle = 0,\ \langle Y, N\rangle = 1,\ \langle Y_i, Y\rangle = \langle Y_i, N\rangle = 0,\ 1 \le i, j \le n. \tag{2.11}$$

而且

$$\langle Y, dY\rangle = 0,\ \langle\Delta Y, Y\rangle = -n,\ \langle\Delta Y, Y_k\rangle = 0,\ 1 \le k \le n. \tag{2.12}$$

因此

$$span\{Y, N\} \perp span\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}. \tag{2.13}$$

定义

$$V = \left\{span\{Y, N\} \oplus span\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}\right\}^{\perp}. \tag{2.14}$$

V 是 R_1^{n+p+2} 中的正定子空间，有如下的正交分解。

$$R_1^{n+p+2} = span\{Y, N\} \oplus span\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\} \oplus V. \tag{2.15}$$

称 V 是 $x: M^n \to S^{n+P}$ 的 Möbius 法丛。设 $\left\{E_{n+1}, \cdots, E_{n+p}\right\}$ 是法丛 V 沿 M^n 的一个局部上的一个局部正交切标架场，那么 $\left\{Y, N, Y_1, \cdots, Y_n, E_{n+1}, \cdots, E_{n+p}\right\}$ 是在 R_1^{n+p+2} 沿 M^n 上的活动标架。规定如下指标范围：

$$1 \le i, j, k, l \le n;\ n \le \alpha, \beta \le n+p.$$

其结构方程为：

$$dY = \sum_i \omega_i Y_i, \tag{2.16}$$

$$dN = \sum_{i,j} A_{ij}\omega_j Y_i + \sum_{i,\alpha} C_i^\alpha \omega_i E_\alpha, \tag{2.17}$$

$$dY_i = -\sum_{i,j} A_{ij}\omega_j Y - \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} Y_j + \sum_{i,\alpha} B_{ij}^\alpha \omega_j E_\alpha, \tag{2.18}$$

$$dE_\alpha = -\sum_{i,\alpha} C_i^\alpha \omega_i Y - \sum_{i,\alpha} B_{ij}^\alpha \omega_j Y_i, \tag{2.19}$$

其中 $\left\{\omega_{ij}\right\}$ 是 Möbius 度量 g 的联络形式

$$A_{ij} = A_{ji},\ B_{ij}^\alpha = B_{ij}^\alpha. \tag{2.20}$$

而且

$$A=\sum_{i,j}A_{ij}\omega_i\otimes\omega_{\mathrm{j}}，\quad B=\sum_{i,j,\alpha}B_{ij}\omega_i\otimes\omega_{\mathrm{j}}E_\alpha，\quad \Phi=\sum_\alpha\phi_\alpha E\alpha=\sum_{i,\alpha}C_i^\alpha\omega_i E\alpha\ . \tag{2.21}$$

都是 Möbius 不变量，称 A 为子流形的 Blaschke 张量，B 为子流形的 Möbius 第二基本形式，Φ 为子流形的 Möbius 形式。

设 $x:M^n\to S^{n+P}$ 是 $n+p$ 维单位球 S^{n+P} 中的一个 n 维无脐浸入子流形，设 $\{e_i\}$ 是度量 $I=dx\cdot dx$ 的局部标准正交切标架场，其对偶标架场为 $\{\theta_i\}$，设 $\mathrm{II}=\sum_\alpha\sum_{i,j}h_{ij}^\alpha\theta_i\theta_j e_\alpha$ 为第二基本形式，$H=\sum_\alpha H^\alpha e_\alpha$ 为平均曲率。那么子流形在关于 $I=dx\cdot dx$ 在基底 $\{e_i\}$ 下的 Möbius 形式为 $\Phi=\sum_{i,\alpha}C_i^\alpha e_\alpha\theta_i$，Blaschke 张量为 $A=\rho^2\sum_{i,j}A_{ij}\theta_i\theta_j$ Möbius 第二基本形式为 $B=\rho\sum_{i,j,\alpha}B_{ij}^\alpha\theta_i\theta_j e_\alpha$，其分量由文献[7]给出：

$$C_i^\alpha=-\rho^{-2}\left(H_{,i}^\alpha+\sum_j\left(h_{ij}^\alpha-H^\alpha\delta_{ij}\right)e_j\left(\log\rho\right)\right), \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}A_{ij}=&-\rho^{-2}\left(Hess_{ij}\left(\log\rho\right)-e_i\left(\log\rho\right)e_j\left(\log\rho\right)-H^\alpha h_{ij}^\alpha\right)\\&-\frac{1}{2}\rho^{-2}\left(\left\|\nabla\log\rho\right\|^2-1+\left\|H\right\|^2\right)\delta_{ij}\end{aligned}, \tag{2.23}$$

$$B_{ij}^\alpha=\rho^{-1}\left(h_{ij}^\alpha-H^\alpha\delta_{ij}\right), \tag{2.24}$$

其中 $Hess_{ij}$ 和 ∇ 是由度量 $I=dx\cdot dx$ 诱导的 Hess 矩阵和梯度算子。

定义 C_i^α， A_{ij}， B_{ij}^α 的一阶协变导*公式参考此处*数如下

$$\sum_k C_{i,j}^\alpha\omega_j=dC_i^\alpha+\sum_j C_j^\alpha\omega_{ji}+\sum_\beta C_j^\beta\omega_{\beta\alpha}\ , \tag{2.25}$$

$$\sum_k A_{ij,k}\omega_k=dA_{ij}+\sum_k A_{ik}\omega_{kj}+\sum_k A_{kj}\omega_{ki}\ , \tag{2.26}$$

$$\sum_k B_{ij,k}^\alpha\omega_k=dB_{ij}+\sum_k B_{ik}^\alpha\omega_{kj}+\sum_k B_{kj}^\alpha\omega_{ki}+\sum_\beta B_{ij}^\beta\omega_{\beta\alpha}\ . \tag{2.27}$$

而且

$$d\omega_{ij}-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}=-\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l\ ,\quad R_{ijkl}=-R_{ijlk}\ . \tag{2.28}$$

那么(2.16)~(2.19)结构方程的可积条件为

$$A_{ij,k}-A_{ik,j}=\sum_\alpha\left(B_{ik}^\alpha C_j^\alpha-B_{ij}^\alpha C_k^\alpha\right), \tag{2.29}$$

$$C_{i,j}^\alpha-C_{j,i}^\alpha=\sum_k\left(B_{ik}^\alpha A_{kj}-B_{ikj}^\alpha A_{ki}\right), \tag{2.30}$$

$$B_{ij,k}^\alpha-B_{ik,j}^\alpha=\delta_{ij}C_k^\alpha-\delta_{ik}C_j^\alpha \tag{2.31}$$

$$R_{ijkl}=\sum_k\left(B_{ik}^\alpha B_{jl}^\alpha-B_{il}^\alpha B_{jk}^\alpha\right)+\left(\delta_{ik}A_{jl}+\delta_{jl}A_{ik}-\delta_{il}A_{jk}-\delta_{jk}A_{il}\right), \tag{2.32}$$

$$tr\left(A\right)=\frac{1}{2n}\left(1+\frac{n}{n-1}R\right),\quad \sum_i B_{ii}^\alpha=0\ . \tag{2.33}$$

对于(2.31)式，令 $i=j$ 求和得

$$\sum_i B_{ij,i}^\alpha=-\left(n-1\right)C_j^\alpha\ . \tag{2.34}$$

对于(2.32)式，令 $i=k$ 求和得

$$R_{jl}=-\sum_k B_{jk}^{\alpha}B_{kl}^{\alpha}+tr(A)\delta_{jl}+(n-2)A_{jl}. \tag{2.35}$$

由(2.33)和(2.35)可得

$$\sum_{i,j}\left(B_{ij}^{\alpha}\right)^2=\frac{n-1}{n}. \tag{2.36}$$

设 $T=\sum_{i,j}T_{ij}\omega_i\otimes\omega_j$ 是黎曼流形 M^n 上的一个 $(0,2)$-型张量场。记 T_{ij} 的系数，$T_{ij,k}$ 为 T_{ij} 的一阶协变导数分量，$T_{ij,kl}$ 为二阶协变导数分量。协变导数的定义由下列结构方程给出：

$$\sum_k T_{ij,k}\omega_k=dT_{ij}+\sum_k T_{ik}\omega_{kj}+\sum_k T_{kj}\omega_{ki}, \tag{2.37}$$

$$\sum_k T_{ij,kl}\omega_l=dT_{ij,k}+\sum_k T_{lj,k}\omega_{li}+\sum_k T_{il,k}\omega_{lj}+\sum_k T_{ij,l}\omega_{lk}. \tag{2.38}$$

在 M^n 上，张量的二阶协变导数满足由曲率张量表示的 Ricci 恒等式：

$$T_{ij,kl}-T_{ij,lk}=\sum_m T_{mj}R_{mikl}+\sum_m T_{im}R_{mjkl}. \tag{2.39}$$

定义 1 [18]设 $\varphi=\sum_{i,j}\varphi_{ij}\omega_i\otimes\omega_j$ 为 n 维黎曼流形 M^n 上的二阶对称张量，我们称 φ 为一个半平行张量，如果 φ 满足

$$\varphi_{ij,kl}=\varphi_{ij,lk}. \tag{2.40}$$

这部分对极小模张量的概念作一些详细的说明，参考文献[19]。

定义 2 [19]设 V 是一个 n 维向量空间，T 是定义在 V 上的四阶全对称张量。对于任意一对参数 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，令四阶张量 $F(x,y)$ 的分量满足以下关系：

$$\begin{aligned}F_{ijkl}(x,y)=T_{ijkl}&+x\left(T_{ij}\delta_{kl}+T_{ik}\delta_{jl}+T_{il}\delta_{jk}+T_{jk}\delta_{il}+T_{jl}\delta_{ik}+T_{kl}\delta_{ij}\right)\\&+yt\left(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)\end{aligned} \tag{2.41}$$

其中 T_{ijkl} 和 $F_{ijkl}(x,y)$ 分别表示张量 T 和 $F(x,y)$ 的分量，并且

$$T_{ij}=\sum_{i,j,k,l}T_{ijkl},\quad t=\sum_{i,j}T_{ij}. \tag{2.42}$$

则称 $\left\{F(x,y)\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ 是由四阶全对称张量 T 诱导的双参数张量集。

定义 3 [19]对于任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，若函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x,y)=\left\|F(x,y)\right\|^2=\sum_{I,J,K,L}F_{ijkl}^2(x,y). \tag{2.43}$$

则称 $f(x,y)$ 为 $F(x,y)$ 的模函数。

考虑到模函数的几何意义，显然 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的二次多项式函数且能取到最小值。因此，我们定义如下：

定义 4 [19]若存在 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$，使得

$$f(x_0,y_0)=\min_{(x,y)\in R}f(x,y). \tag{2.44}$$

则称 $F(x_0,y_0)$ 是由完全对称四阶张量 T 诱导的双参数张量集 $\left\{F(x,y)\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ 的极小模张量。简言之，$F(x_0,y_0)$ 是 T 的极小模张量。

3. 定理的证明

为了方便本文定理的证明，首先证明下面的引理。

引理 1 设 $x: M^n \to S^{n+1}(n \ge 3)$ 为等距浸入，B 为 x 的 Möbius 第二基本形式。若 B 是半平行的，则 Möbius 形式 Φ 是闭的。

证明：对(2.34)求导可得

$$-(n-1)C_{i,j} = \sum_k B_{ik,kj}. \tag{3.1}$$

由超曲面 M^n 是半平行的，胡泽军证明了 $B_{ij,kl} = B_{ij,lk}$，故而

$$-(n-1)\left(C_{i,j} - C_{j,i}\right) = \sum_k B_{ik,kj} - \sum_k B_{jk,ki} = \sum_k B_{ik,jk} - \sum_k B_{jk,ik}. \tag{3.2}$$

再由 $B_{ij} = B_{ji}$ 可得

$$-(n-1)\left(C_{i,j} - C_{j,i}\right) = \sum_k B_{ki,jk} - \sum_k B_{kj,ik} = \sum_k \left(B_{ki,j} - B_{kj,i}\right)_{,k}. \tag{3.3}$$

再用可积条件(2.31)可得

$$-(n-1)\left(C_{i,j} - C_{j,i}\right) = \sum_k \left(\delta_{ki} C_j - \delta_{kj} C_i\right)_{,k} = C_{i,j} - C_{j,i}. \tag{3.4}$$

则

$$-(n-2)\left(C_{i,j} - C_{j,i}\right) = 0. \tag{3.5}$$

所以当 $n > 2$ 时，有 $C_{i,j} - C_{j,i} = 0$，即 Möbius 形式 Φ 是闭的。

定理 1 的证明：由(2.41)以及(2.43)，有

$$f(x,y) = \sum_{i,j,k,l} T_{ijkl}^2 + \left[12x + 6(n+4)x^2\right]\sum_{i,j} T_{ij}^2 + \left[6x^2 + 12(n+2)xy + 3n(n+2)y^2 + 6y\right]t^2. \tag{3.6}$$

从上式可看出，存在 $(x_0, y_0) \in R^2$ 为一个点，使得 $F(x_0, y_0)$ 是极小模张量。首先需要确定对应的极小点，若 $F(x_0, y_0)$ 是极小模张量，则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \left[12 + 12(n+4)x_0\right]\sum_{i,j} T_{ij}^2 + \left[12x_0 + 12(n+2)y_0\right]t^2 = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left[6 + 12(n+2)x_0 + 6n(n+2)y_0\right]t^2 = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

如果 $\sum_{i,j} T_{ij}^2 = 0$，$t^2 = 0$ 且 $\sum_{i,j} T_{ij} \ne \dfrac{t^2}{n}$，则有

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{1}{n+4}, \\ y_0 = \dfrac{1}{(n+2)(n+4)}. \end{cases} \tag{3.8}$$

因此我们可以得到(3.6)的极小模张量为

$$\begin{aligned} F_{ijkl}^0 &= T_{ijkl} + \frac{1}{n+4}\left(T_{ij}\delta_{kl} + T_{ik}\delta_{jl} + T_{il}\delta_{jk} + T_{jk}\delta_{il} + T_{jl}\delta_{ik} + T_{kl}\delta_{ij}\right) \\ &+ \frac{1}{(n+2)(n+4)} \cdot t\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right). \end{aligned} \tag{3.9}$$

此外，F^0 是无迹张量，对应的极小模为

$$\left\|F^0\right\|^2=\sum_{ij,kl}T_{ijkl}^2-\frac{6}{n+4}\sum_{ij}T_{ij}^2+\frac{3}{(n+2)(n+4)}t^2. \tag{3.10}$$

若 Möbius 第二基本形式是半平行的，由定义 1 可知 Möbius 第二基本形式 B 的二阶协变导数的分量满足 $B_{ij,kl}=B_{ij,lk}$，我们令

$$T_{ijkl}=\frac{1}{6}\left(B_{ij,kl}+B_{ik,jl}+B_{il,jk}+B_{jk,li}+B_{jl,ki}+B_{kl,ij}\right). \tag{3.11}$$

不难发现张量 T 是完全对称的。结合(2.31)以及(3.11)，有

$$\begin{aligned}T_{ijkl}&=\frac{1}{6}\left(B_{ij,kl}+B_{ik,jl}+B_{il,jk}+B_{jk,li}+B_{jl,ki}+B_{kl,ij}\right)\\&=\frac{1}{6}\Big[B_{ij,kl}+\left(B_{ik,jl}-B_{ij,kl}\right)+B_{ij,kl}+\left(B_{il,jk}-B_{ij,lk}\right)+B_{ij,kl}+\left(B_{jk,il}-B_{ji,kl}\right)+B_{ij,kl}\\&\quad+\left(B_{jl,ik}-B_{ji,lk}\right)+B_{ij,kl}+\left(B_{kl,ij}-B_{ki,lj}\right)+\left(B_{ki,jl}-B_{ij,kl}\right)+B_{ij,kl}\Big]\\&=B_{ij,kl}+\frac{1}{6}\left(C_{i,j}\delta_{kl}+C_{i,k}\delta_{jl}+C_{i,l}\delta_{jk}+C_{j,k}\delta_{il}+C_{j,l}\delta_{ik}\right)-\frac{5}{6}C_{i,j}\delta_{kl},\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$T_{ij}=\frac{4-5n}{3}C_{i,j}+\frac{1}{6}\sum_k C_{k,k}\delta_{ij}, \tag{3.13}$$

$$t=\frac{2(1-n)}{3}\sum_k C_{k,k}. \tag{3.14}$$

由(2.31)，(3.12)~(3.14)以及引理 1，有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,l}T_{ijkl}^2&=\sum_{i,j,k,l}B_{ij,kl}^2-\frac{3n-4}{6}\sum_{i,j}C_{i,j}^2-\frac{1}{6}\sum_i C_{i,i}\sum_j C_{j,j}+\frac{1}{3}\sum_{i,j,k}C_{i,j}B_{ij,kk}\\&=\left\|\nabla^2B\right\|^2-\frac{5n-4}{6}\sum_{i,j}C_{i,j}^2+\frac{1}{6}\sum_i C_{i,i}\sum_j C_{j,j}\\&=\left\|\nabla^2B\right\|^2-\frac{5n-4}{6}\left\|\nabla\Phi\right\|^2+\frac{1}{6}\left\|\delta\Phi\right\|^2,\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\sum_{i,j}T_{ij}^2=\frac{(5n-4)^2}{36}\left\|\nabla\Phi\right\|^2-\frac{9n-8}{36}\left\|\delta\Phi\right\|^2, \tag{3.16}$$

$$t^2=\frac{4(n-1)^2}{9}\left\|\delta\Phi\right\|^2. \tag{3.17}$$

由(3.15)~(3.17)代入(3.10)，故有极小模张量：

$$\begin{aligned}F_{ijkl}&=B_{ij,kl}+\frac{n}{n+4}\left(C_{i,j}\delta_{kl}+C_{i,k}\delta_{jl}+C_{i,l}\delta_{jk}+C_{j,k}\delta_{il}+C_{j,l}\delta_{ik}\right)-\frac{4}{n+4}C_{k,l}\delta_{ij}\\&\quad-\frac{n}{(n+2)(n+4)}\sum_m C_{m,m}\left(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right).\end{aligned} \tag{3.18}$$

容易验证这是一个无迹张量。然后将(3.12)~(3.14)代入(3.9)，故对应的极小模为

$$\left\|F^0\right\|^2=\left\|\nabla^2B\right\|^2-\frac{n(5n-4)}{n+2}\left\|\nabla\Phi\right\|^2+\frac{3n^2}{(n+2)(n+4)}\left\|\delta\Phi\right\|^2. \tag{3.19}$$

则由模 $\left\|F^0\right\|^2$ 的非负性，可得到不等式

$$\left\|\nabla^2 B\right\|^2 \geq \frac{n(5n-4)}{n+2}\|\nabla\Phi\|^2 - \frac{3n^2}{(n+2)(n+4)}\|\delta\Phi\|^2 . \tag{3.20}$$

发现该不等式完全由 Φ 控制。下面，想将下界转化为显然为正的一个式子。由(2.31)以及引理 1，有

$$\begin{aligned}\|\Delta B\|^2 &= \sum_{i,j,k} B_{ij,kk}^2 = \sum_{i,j,k} B_{ij,kk}\left(B_{ij,kk} - B_{ik,jk} + B_{ki,jk} - B_{ki,kj} + B_{ki,kj}\right) \\ &= \sum_{i,j,k} B_{ij,kk}\left(\delta_{ij} C_{k,k} - nC_{i,j}\right) \\ &= -n\sum_{i,j,k} C_{i,j} B_{ij,kk} \\ &= -n\|\delta\Phi\|^2 + n^2\|\nabla\Phi\|^2 .\end{aligned} \tag{3.21}$$

进一步，有

$$\left\|F^0\right\|^2 = \left\|\nabla^2 B\right\|^2 - \frac{n(n-1)}{n+2}\|\nabla\Phi\|^2 + \frac{3n}{(n+2)(n+4)}\|\Delta B\|^2 . \tag{3.22}$$

则由模 $\left\|F^0\right\|^2$ 的非负性，可得到另一个不等式

$$\left\|\nabla^2 B\right\|^2 \geq \frac{n(n-1)}{n+2}\|\nabla\Phi\|^2 + \frac{3n}{(n+2)(n+4)}\|\Delta B\|^2 .$$

其中等号立当且仅当

$$\begin{aligned}B_{ij,kl} = &-\frac{n}{n+4}\left(C_{i,j}\delta_{kl} + C_{i,k}\delta_{jl} + C_{i,l}\delta_{jk} + C_{j,k}\delta_{il} + C_{j,l}\delta_{ik}\right) + \frac{4}{n+4} C_{k,l}\delta_{ij} \\ &+ \frac{n}{(n+2)(n+4)}\sum_m C_{m,m}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right).\end{aligned}$$

参考文献

[1] Alexander, J.W. (1926) On the Decomposition of Tensors. *The Annals of Mathematics*, **27**, 421-423. https://doi.org/10.2307/1967693

[2] Krupka, D. (1995) The Trace Decomposition Problem. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **36**, 303-316.

[3] Krupka, D. (1996) The Trace Decomposition of Tensors of Type (1,2) and (1,3). In: Tamássy, L. and Szenthe, J., Eds., *New Developments in Differential Geometry*, Springer, 243-253. https://doi.org/10.1007/978-94-009-0149-0_19

[4] Krupka, D. (2003) The Weyl Tensors. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **62**, 447-460. https://doi.org/10.5486/pmd.2003.2884

[5] Guo, Z. and Guan, S.L. (2021) Minimal Norm Tensors Principle and Its Applications. arXiv:2112.01222.

[6] Wang, C. (1998) Moebius Geometry of Submanifolds in 𝕊 N. *Manuscripta Mathematica*, **96**, 517-534. https://doi.org/10.1007/s002290050080

[7] Akivis, M.A. and Goldberg, V.V. (1996) Conformal Differential Geometry and Its Generalizations. Wiley. https://doi.org/10.1002/9781118032633

[8] Akivis, M.A. and Goldberg, V.V. (1997) A Conformal Differential Invariant and the Conformal Rigidity of Hypersurfaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**, 2415-2424. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-97-03828-8

[9] Li, H.Z. and Wang, C.P. (2003) Surfaces with Vanishing Moebius Form in S N. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **19**, 671-678. https://doi.org/10.1007/s10114-003-0309-8

[10] Liu, H., Wang, C. and Zhao, G. (2001) Möbius Isotropic Submanifolds in S^n. *Tohoku Mathematical Journal*, **53**, 553-569. https://doi.org/10.2748/tmj/1113247800

[11] Guo, Z., Li, T., Lin, L., Ma, X. and Wang, C. (2011) Classification of Hypersurfaces with Constant Möbius Curvature in S^{m+1}. *Mathematische Zeitschrift*, **271**, 193-219. https://doi.org/10.1007/s00209-011-0860-4

[12] Li, H. and Wang, C. (2003) Möbius Geometry of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature and Scalar Curvature. *manuscripta mathematica*, **112**, 1-13. https://doi.org/10.1007/s00229-003-0383-3

[13] Hu, Z. (2004) Classification of Hypersurfaces with Parallel Möbius Second Fundamental Form in S^{n+1}. *Science in China Series A*, **47**, 417-430. https://doi.org/10.1360/03ys0134

[14] Zhai, S., Hu, Z. and Wang, C. (2014) On Submanifolds with Parallel Möbius Second Fundamental Form in the Unit Sphere. *International Journal of Mathematics*, **25**, Article 1450062. https://doi.org/10.1142/s0129167x14500621

[15] Li, F.F. (2014) On Rigidity Theorem of Submanifolds with Parallel Möbius Second Fundamental form in S^{n+p}. *Acta Mathematica Sinica* (*Chinese Series*), **57**, 1081-1088.

[16] 翟书杰. 单位球面中 Möbius 平行子流形的分类[D]: [博士学位论文]. 郑州: 郑州大学, 2017.

[17] Xie, B.X. (2023) Submanifolds with Semi-Parallel Möbius Second Fundamental form in the Unit Sphere. Zhengzhou University.

[18] Tanno, S. (1969) Hypersurfaces Satisfying a Certain Condition on the Ricci Tensor. *Tohoku Mathematical Journal*, **21**, 297-303. https://doi.org/10.2748/tmj/1178242998

[19] 龚一帆. 黎曼子流形的一类新的整体共形不变量与极小模张量原理及其几何应用研究[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2024.