Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(3), 68-75
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.163070

Hans汉斯

12pq阶7度对称图的分类

杨丽婷*，**凌　波**

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2026年2月9日；录用日期：2026年2月27日；发布日期：2026年3月6日

摘　要

若一个图的自同构群在其弧集上是传递的，则称该图为对称图。郭等人确定了所有$12p, 24p$阶的7度对称图，凌等人确定了所有$36p$阶的7度对称图。本文将通过确定所有$12pq$阶的连通7度对称图来推广这些结果，其中$q > p$为素数。

关键词

对称图，正规商，自同构群

Classification of Heptavalent Symmetry Graphs of Order 12pq

Liting Yang*, **Bo Ling**

School of Mathematics and Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: February 9, 2026; accepted: February 27, 2026; published: March 6, 2026

Abstract

A graph is said to be symmetric if its automorphism group is transitive on its arcs. Guo *et al*. determined all heptavalent symmetric graphs of order $12p$ and $24p$. Ling *et al*. determined all heptavalent symmetric graphs of order $36p$. In this paper, we shall generalize these results by determining all connected heptavalent symmetric graphs of order $12pq$, where $q > p$ are primes.

Keywords

Symmetric Graph, Normal Quotient, Automorphism Group

*通讯作者。

文章引用：杨丽婷，凌波. 12pq 阶 7 度对称图的分类[J]. 理论数学, 2026, 16(3): 68-75.
DOI: 10.12677/pm.2026.163070

1. 引言

在本文中，所有图均假设为有限的、简单的、连通的和无向的。对于图Γ，分别用$V\Gamma$，$E\Gamma$，$A\Gamma$和$Aut\Gamma$表示其顶点集、边集、弧集和全自同构群。设G是图Γ的全自同构群$Aut\Gamma$的一个子群。若G在$V\Gamma$和$A\Gamma$上分别是传递的，则称Γ是G-点传递的和G-弧传递的。弧传递图也称为对称图。对于图Γ和正整数s，Γ的一条s-弧是一个顶点序列$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$，使得对于$1\le i\le s$，$\alpha_{i-1}$与$\alpha_i$相邻，并且对于$1\le i\le s-1$，$\alpha_{i-1}\ne\alpha_{i+1}$。设$G$是$Aut\Gamma$的一个子群。若$G$在$\Gamma$的$s$-弧集上是传递的，则称$\Gamma$是$(G,s)$-弧传递的；若$\Gamma$是$(G,s)$-弧传递的但不是$(G,s+1)$-弧传递的，则称其为$(G,s)$-传递的。当$G=Aut\Gamma$时，我们称$(G,s)$-弧传递图或$(G,s)$-传递图为$s$-弧传递图或$s$-传递图。

对称图的分类长期以来一直是群论与图论交叉领域的核心主题，对于特定阶数和度数的此类图已取得显著进展：对于三度对称图，Conder 等人[1]给出了所有顶点数少于 768 的三度对称图，为低度数传递图的分类提供了基础参考，而 Feng 等人[2]-[4]使用覆盖技术对阶数为np和np^2的三度对称图进行了分类。对于五度对称图，已经进行了广泛研究。例如，[5]-[9]中给出了阶数为$8p,2pq,2p^2,4pq$和$8pq$的此类图的分类结果，这些工作揭示了素数幂因子对此类图结构性质的关键影响。关于七度对称图，尽管该领域的研究起步相对较晚，但近年来已取得显著进展。[10]-[12]中给出了阶为$12p,24p,36p$的 7 度对称图的分类。本文将进一步分类阶为$12pq$的 7 度对称图。

2. 预备结果

取正规商是研究点传递图的一种典型方法。设$Aut\Gamma$有一个点传递子群G。假设N是G的正规子群且N在$V\Gamma$上作用非传递。那么如下定义正规商图Γ_N：它的顶点集是N在$V\Gamma$上的N-轨道，并且两个顶点$B,C\in V\Gamma_N$是相邻的当且仅当B中的某个顶点在Γ中与C中的某个顶点相邻。如果Γ的度等于Γ_N的度，那么Γ被称为Γ_N的正规覆盖。根据文献[13]，可得到下面的引理：

引理 2.1 ([13])设Γ是一个素数$p>2$度的对称图，其中$G\le Aut\Gamma$，并且设$N\trianglelefteq G$在$V\Gamma$上至少有三个轨道。则以下陈述成立。

1) N在$V\Gamma$上是半正则的，$G/N\le Aut\Gamma_N$，并且Γ_N是一个p度的G/N-弧传递图；

2) Γ是(G,s)-传递的，当且仅当Γ_N是$(G/N,s)$-传递的，其中$1\le s\le 5$或$s=7$。

以下引理确定了连通 7 度对称图的点稳定子。

引理 2.2 ([14] [15])设Γ是一个连通的 7 度(G,s)-弧传递图，其中$G\le Aut\Gamma$，$s\ge 1$。那么$s\le 3$且以下情况之一成立，其中$\alpha\in V\Gamma$。

1) 如果G_α是可解的，那么$|G_\alpha|\,|\,252$。此外，二元组(s,G_α)位于下表 1 中。

Table 1. Solvable situation
表 1. 可解情况

s	1	2	3
G_α	$Z_7,D_{14},F_{21},D_{28},Z_3\times F_{21}$	$F_{42},Z_2\times F_{42},Z_3\times F_{42}$	$Z_6\times F_{42}$

2) 如果 G_α 是不可解的，那么 $|G_\alpha| \mid 2^{24}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$。此外，三元组 $(s,G_\alpha,|G_\alpha|)$ 位于下表 2 中。

Table 2. Unsolvable situation
表 2. 不可解情况

s	2	3
G_α	$PSL(3,2), ASL(3,2),$ $ASL(3,2)\times Z_2, A_7, S_7$	$PSL(3,2)\times S_4, A_7\times A_6, S_7\times S_6, (A_7\times A_6):Z_2,$ $Z_2^6:(SL(2,2)\times SL(3,2)), [2^{20}]:(SL(2,2)\times SL(3,2))$
$\|G_\alpha\|$	$2^3\cdot 3\cdot 7, 2^6\cdot 3\cdot 7, 2^7\cdot 3\cdot 7,$ $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7, 2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$	$2^6\cdot 3^2\cdot 7, 2^6\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7, 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7,$ $2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7, 2^{10}\cdot 3^2\cdot 7, 2^{24}\cdot 3^2\cdot 7$

为了构造 7 度对称图，需要引入陪集图。设 G 为一个有限群，且 $H\le G$。假设 D 是 G 中 H 的某些双陪集的并集，使得 $D^{-1}=D$。G 关于 H 和 D 的陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,D)$ 定义为：顶点集为 $[G:H]$，即 G 中 H 的右陪集的集合，边集为 $\{\{Hg,Hdg\}\mid g\in G, d\in D\}$。图 $\mathrm{Cos}(G,H,D)$ 的度为 $|D|/|H|$，并且当且仅当 D 生成群 G 时，该图是连通的。显然，对于每个 $\alpha\in Aut(G)$，有 $\mathrm{Cos}(G,H,D)\cong \mathrm{Cos}(G,H^\alpha,D^\alpha)$。设 S 是 G 的一个生成子集，满足 $1\notin S$ 且 $S=S^{-1}$。显然，陪集图 $\mathrm{Cos}(G,1,S)$ 是一个连通的无向简单图，它被称为 G 关于 S 的凯莱图，记为 $Cay(G,S)$。

引理 2.3 ([6])设 Γ 为一个图，G 为 $Aut\Gamma$ 的一个顶点传递子群。那么 Γ 同构于一个陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,D)$，其中 $H=G_\alpha$ 是 G 中 $\alpha\in V\Gamma$ 的稳定子群，D 由 G 中所有将 V 映射到其某个邻点的元素组成。此外，

1) 当且仅当 D 生成群 G 时，Γ 是连通的；

2) 当且仅当 D 是一个单个的双陪集时，Γ 是 G-弧传递的。特别地，如果 $g\in G$ 交换 V 及其某个邻点，那么 $g^2\in H$ 且 $D=HgH$；

3) Γ 的度等于 $|G|/|H|=|H:H\cap H^g|$。

根据文献[16]和[17]，可知 $PSL(2,q)$ 和 $PGL(2,q)$ 的极大子群的信息，其中 q 是一个奇素数。

引理 2.4 ([16] [17])设 $G=PSL(2,q)$ 或 $PGL(2,q)$，且 M 是 G 的一个极大子群，其中 $q\ge 5$ 是一个素数。

1) 如果 $G=PSL(2,q)$，那么 $M\in\{D_{q-1}, D_{q+1}, Z_q:Z_{(q-1)/2}, A_4, S_4, A_5\}$；

2) 如果 $G=PGL(2,q)$，那么 $M\in\{D_{2(q+1)}, D_{2(q-1)}, Z_q:Z_{q-1}, S_4, PSL(2,q)\}$。

3. 主要结果

定理 1 设 Γ 是一个阶为 $12pq$ 的 7 度对称图，其中 $q>p$ 是素数。则以下陈述之一成立。

1) 自同构群 $Aut\Gamma\cong PSL(2,q), PGL(2,q), PSL(2,q)\times Z_2$ 或 $PGL(2,q)\times Z_2$，其中 q 只有两种可能，即 $q=83$ 或 167；

2) Γ 在表 3 中。

Table 3. Heptavalent symmetric graphs of order $12pq$
表 3. 阶为 $12pq$ 的 7 度对称图

Γ	$Aut\Gamma$	(p,q)
$\mathcal{C}_{660}$	$(Z_2\times M_{22}).Z_2$	$(5,11)$
$\mathcal{C}_{1716}$	S_{13}	$(11,13)$

续表

$\mathcal{LG}_{72}^{i}$	$PSL(2,8)\times Z_2$	$(2,3), i=1,2,3$
$\mathcal{UG}_{72}$	$PSU(3,3)\rtimes Z_2$	$(2,3)$
$\mathcal{SG}_{120}$	S_7	$(2,5)$
$\mathcal{LG}_{312}^{i}$	$PGL(2,13)\times Z_2$	$(2,13), 1\le i\le 4$
$\mathcal{LG}_{312}^{5}$	$(PSL(2,13)\times Z_2)\rtimes Z_2$	$(2,13)$
$\mathcal{LG}_{312}^{6}$	$PSL(2,13)\rtimes D_8$	$(2,13)$
$\mathcal{C}_{25764}^{1}$	$PSL(2,113)$	$(19,113)$

接下来，将通过一系列引理来证明定理 1。

引理 3.1 设 Γ 是阶为 $6pq$ 的 7 度对称图，其中 $q>p$ 是素数。那么 Γ 同构于表 4 中的某个图。

Table 4. Heptavalent symmetric graphs of order $6pq$
表 4. 阶为 $6pq$ 的 7 度对称图

Γ	$Aut\Gamma$	(p,q)
$\mathcal{C}_{36}$	$PSL(2,8)$	$(2,3)$
$\mathcal{SG}_{156}^{i}$	$PSL(2,13)\times Z_2$	$(2,13), i=1,3,4,5$
$\mathcal{SG}_{156}^{2}$	$PGL(2,13)\times Z_2$	$(2,13)$
$\mathcal{CG}_{156}^{1}$	$PGL(2,13)$	$(2,13), 1\le i\le 4$
$CD_{6pq,k}$	$D_{6pq}:Z_7$	$(7\mid p-1, 7\mid q-1)$
$\mathcal{C}_{90}$	$Z_3.S_7$	$(3,5)$
$\mathcal{C}_{330}$	$M_{22}.Z_2$	$(5,11)$
$\mathcal{C}_{870}^{1}$	$PGL(2,29)$	$(5,29)$
$\mathcal{C}_{870}^{i}$	$PSL(2,29)$	$(5,29), 2\le i\le 4$
$\mathcal{C}_{2838}^{1}$	$PGL(2,43)$	$(11,43)$
$\mathcal{C}_{2838}^{i}$	$PSL(2,43)$	$(11,43), 2\le i\le 6$
$\mathcal{C}_{20418}^{1}$	$PGL(2,83)$	$(41,83)$
$\mathcal{C}_{20418}^{i}$	$PSL(2,83)$	$(41,83), 2\le i\le 11$

证明：设 Γ 是阶为 $6pq$ 的 7 度对称图，其中 $q>p$ 是素数。设 $A=Aut\Gamma$，取 $\alpha\in V\Gamma$。根据引理 2.2，$|A_\alpha|\mid 2^{24}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$。因此 $|A_\alpha|\mid 2^{25}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot p\cdot q$。如果 $p=2$，那么 Γ 的阶为 $12q$，根据文献[18]，有 $q\in\{5,13\}$ 且 Γ 同构于 $\mathcal{C}_{36},\mathcal{SG}_{156}^i,1\le i\le 5$ 或 $\mathcal{CG}_{156}^i,1\le i\le 4$。如果 $p=3$，那么 Γ 的阶为 $18q$，根据文献[19]，有 $q=5$ 且 Γ 同构于 $\mathcal{C}_{90}$。因此，接下来考虑 $q>p\ge 5$ 的情况。

如果 A 是可解的。那么根据文献[20]，有 $A\cong D_{6pq}:Z_7$ 且 Γ 同构于 $CD_{6pq,k}$，其中 $7\,|\,p-1,7\,|\,q-1$。

如果 A 是不可解的。根据文献[20]，有 $A\cong M_{22},|V\Gamma|=6\cdot 5\cdot 11$ 或 $A\cong PSL(2,r)$，$PGL(2,r)$。对于后一种情况，A 有一个正规子群 N 同构于 $PSL(2,r)$。如果 N 在 $V\Gamma$ 上至少有三个轨道。那么根据引理 2.1，$N_\alpha=1$，所以 $|N|\mid 6pq$，这与 $N\cong PSL(2,r)$ 矛盾。因此，$N_\alpha\ne 1$，N 在 $V\Gamma$ 上至多有两个轨道，并且 $3pq$ 整除 $|N|$。由于 Γ 是连通的，$N\trianglelefteq A$ 且 $N_\alpha\ne 1$，所以 $1\ne N_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\trianglelefteq A_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$，由此可知 7 整除 $|N_\alpha|$，因此 $21pq$ 整除 $|N|$。由于 $|A:N|\le 2$，所以 $|A_\alpha:N_\alpha|\le 2$。如果 A_α 是不可解的，那么因为 $|A_\alpha:N_\alpha|\le 2$，所以 N_α 也是不可解的。根据引理 2.4，$N_\alpha=A_5$，这与 7 整除 $|N_\alpha|$ 矛盾。因此 A_α 是可解的，并且根据引理 2.2，A_α 整除 252。注意 N_α 是 A_α 的子群，所以 $|N_\alpha|\mid 252$。这意味着 N 的阶整除 $1512pq$。

断言 $r=q$。由于 $|V\Gamma|=6pq=|A|/|A_\alpha|$ 且 $A\cong PSL(2,r)$ 或 $PGL(2,r)$，由此可得 $6pq=r(r-1)(r+1)/2|A_\alpha|$ 或 $r(r-1)(r+1)/|A_\alpha|$。由于 $r\equiv\pm1(\bmod 7)$ 是一个素数且 $|A_\alpha|\mid 252$，所以有 $r=p$ 或 q。假设 $r=p$。那么 $6q=(p-1)(p+1)/2|A_\alpha|$ 或 $(p-1)(p+1)/|A_\alpha|$，这意味着 $p+1=q$，这是一个矛盾，因为 $p+1$ 不是一个素数。因此 $r=q$ 且 $|N|=\dfrac{q(q-1)(q+1)}{2}$。注意到 N 整除 $1512pq$ 且 $\left(\dfrac{p-1}{2},\dfrac{p+1}{2}\right)=1$，如果 $p\mid\dfrac{q-1}{2}$ 则 $q+1\mid 1512$。由此可得 $q=7$，11，13，17，23，41，53，71，83，107，167，251，503 或 1511。如果 $p\mid\dfrac{q+1}{2}$，那么 $q-1\mid 1512$，由此可得 $q=7$，13，19，29，37，43，73，109，127，379 或 757。再由 $21pq\mid |N|$ 和 $|N|\mid 2^{25}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot p\cdot q$，其中 $q>p\ge 5$，可以得到 $q=29$，41，43，71，83，167，251，379，503，757 或 1511。因此，N 是表 5 中的群之一。

Table 5. Some possible simple groups N
表 5. 一些可能的单群 N

N	Order	N	Order
$PSL(2,29)$	$2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 29$	$PSL(2,251)$	$2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7\cdot 251$
$PSL(2,41)$	$2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 41$	$PSL(2,379)$	$2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 19\cdot 379$
$PSL(2,43)$	$2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 43$	$PSL(2,503)$	$2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 251\cdot 503$
$PSL(2,71)$	$2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 71$	$PSL(2,757)$	$2^2\cdot 3^3\cdot 7\cdot 379\cdot 757$
$PSL(2,83)$	$2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 41\cdot 83$	$PSL(2,1511)$	$2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 151\cdot 1511$
$PSL(2,167)$	$2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 83\cdot 167$		

假设 $q=29$。那么 $N=PSL(2,29)$ 且 $(p,q)=(5,29)$。如果 N 在 $V\Gamma$ 上有两个轨道，那么 $A=PGL(2,29)$。因此，根据引理 2.2，$|A_\alpha|=28$ 且 $A_\alpha=F_{14}\times Z_2$。通过 Magma [21]，存在一个图，记为 $\mathcal{C}_{870}^1$。如果 N 在 $V\Gamma$ 上是传递的，且根据引理 2.2，$N_\alpha=Z_7$。因此，根据引理 2.3，$\Gamma\cong\mathrm{Cos}(N,N_\alpha,N_\alpha gN_\alpha)$，其中 g 是 N 中的一个 2-元素，使得 $g^2\in N_\alpha$ 且 $\langle N_\alpha,g\rangle=N$。通过 Magma [21]，存在三个图，记为 $\mathcal{C}_{870}^i$，其中 $2\le i\le 4$，

i 是一个整数。类似地，假设 $q=83$。通过 Magma [21]，$\Gamma\cong\mathcal{C}_{20418}^{i}$，其中 $1\le i\le 11$。

假设 $q=41$。那么 $N=PSL(2,41)$ 且 $(p,q)=(5,41)$。注意到 $|N:N_\alpha|=3pq$ 或 $6pq$。根据引理 2.4，N 没有指数为 $3pq$ 或 $6pq$ 的子群，这是一个矛盾。类似地，$q\ne 71$，251，379，1511。

假设 $q=43$。那么 $N=PSL(2,43)$ 且 $(p,q)=(11,43)$。注意到 $|N:N_\alpha|=3pq$ 或 $6pq$。根据引理 2.4，N 没有指数为 $3pq$ 的子群，因此 N 在 $V\Gamma$ 上是传递的且 $|N_\alpha|=14$。并且根据引理 2.2，有 $N_\alpha=F_{14}$。通过 Magma [21]，存在六个图，记为 $\mathcal{C}_{2838}^{i}$，其中 $i=1\le i\le 6$。

假设 $q=167$。那么 $N=PSL(2,167)$ 且 $(p,q)=(83,167)$。如果 N 在 $V\Gamma$ 上有两个轨道，那么根据引理 2.2，$A=PGL(2,167)$ 且 $|A_\alpha|=56$，这产生矛盾。因此，N 在 $V\Gamma$ 上是传递的，并且根据引理 2.2，$N_\alpha=F_{14}\times Z_2$。于是根据引理 2.3，$\Gamma\cong\mathrm{Cos}(N,N_\alpha,N_\alpha gN_\alpha)$，其中 g 是 N 中的一个 2-元素，使得 $g^2\in N_\alpha$ 且 $\langle N_\alpha,g\rangle=N$。通过 Magma [21]，存在这样的 $g\in A$。因此 $\Gamma\cong\mathrm{Cos}(N,N_\alpha,N_\alpha gN_\alpha)$，$A\cong PSL(2,167)$ 或 $PGL(2,167)$。

假设 $q=503$。那么 $N=PSL(2,503)$ 且 $(p,q)=(251,503)$。如果 N 在 $V\Gamma$ 上有两个轨道，那么 $A=PGL(2,503)$，因此根据引理 2.2，$|A_\alpha|=168$ 且 $A_\alpha=PSL(3,2)$。这是不可能的，因为 $PGL(2,503)$ 没有与 $PSL(3,2)$ 同构的子群。如果 N 在 $V\Gamma$ 上是传递的，那么 $|N_\alpha|=84$。根据引理 2.2，$N_\alpha=F_{42}\times Z_2$。这是不可能的，因为 $PSL(2,503)$ 没有与 $F_{42}\times Z_2$ 同构的子群，产生矛盾。类似地，$q\ne 757$。

因此，我们完成了引理 3.1 的证明。

现在，设 Γ 为一个阶为 $12pq$ 的 7 度对称图，其中 $q>p$ 且 p,q 为素数。设 $A=Aut\Gamma$。取 $\alpha\in V\Gamma$。根据引理 2.2，$|A_\alpha|\mid 2^{24}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$，因此 $|A|\mid 2^{26}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7\cdot p\cdot q$。

根据文献[22]定理 1.1，可知 $4n$ 阶 7 度对称图满足下列情形所述：1) 三元组 $(\Gamma,n,Aut\Gamma)$ 位于文献[22]中表 1；2) $A\cong PSL(2,r)$，$PGL(2,r)$，$PSL(2,r)\times Z_2$，$PGL(2,r)\times Z_2$，其中 $r\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,7)$，$n$ 是一个无平方因子的奇数。特别地，如果 $|V\Gamma|>12540$，那么图 Γ 满足情形(2)。对于前一种情形，我们有 Γ 同构于 $\mathcal{C}_{660}$，$\mathcal{C}_{1716}$。对于后一种情形，我们断言 $r=q$ (和引理 3.1 中的情形类似，同理可证)。

接下来引理处理 $A\cong PSL(2,q)\times Z_2$ 或 $PGL(2,q)\times Z_2$ 的情况。

引理 3.2 假设 $A\cong PSL(2,q)\times Z_2$ 或 $PGL(2,q)\times Z_2$。那么 $A\cong PSL(2,83)\times Z_2$，$PGL(2,83)\times Z_2$，$PSL(2,167)\times Z_2$ 或 $PGL(2,167)\times Z_2$。

证明：如果 $A\cong PSL(2,q)\times Z_2$ 或 $PGL(2,q)\times Z_2$，那么 A 有一个正规子群 $N\cong Z_2$。则 Γ_N 是一个阶为 $6pq$ 的 7 度对称图，并且 $A/N\le\Gamma_N$。根据引理 3.1 和 $|V\Gamma|>12540$，我们有 $q\in\{83,167\}$。

假设 $q=83$ 或 167。图 Γ 的自同构群同构于以下群之一：$Aut\Gamma\cong PSL(2,83)\times Z_2$，$PGL(2,83)\times Z_2$，$PSL(2,167)\times Z_2$ 或 $PGL(2,167)\times Z_2$。

因此，我们完成了引理 3.2 的证明。

以下引理处理 $A\cong PSL(2,q)$ 或 $PGL(2,q)$ 的情况。

引理 3.3 假设 $A\cong PSL(2,q)$ 或 $PGL(2,q)$。那么 Γ 同构于图 $\mathcal{C}_{25764}^{1}$，或 $Aut\Gamma\cong PSL(2,83)$，$PGL(2,83)$，$PSL(2,167)$ 或 $PGL(2,167)$。

证明：如果 $A\cong PSL(2,q)$ 或 $PGL(2,q)$，那么 A 有一个正规子群 $N\cong PSL(2,q)$。假设 N 在 $V\Gamma$ 上有超过 2 个轨道。那么根据引理 2.1，$N_\alpha=1$，从而 $|N|\mid 12pq$。因为是不可解的，所以 $|N|=12p$，$12q$，$4pq$ 或 $12pq$。注意到 $q>p\ge5$，根据文献[23]，对于以 $|N|=12p$，$12q$，和 $4pq$ 是不可能的。所以 N 在 $V\Gamma$ 上至多有两个轨道且 $N_\alpha\ne1$，由此可得 $6pq\mid |N|$。因为是 Γ 连通的，$N\trianglelefteq A$，且 $N_\alpha\ne1$，所以 $1\ne N_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\trianglelefteq A_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$，由此可知 7 整除 $|N_\alpha|$，因此有 $42pq\mid |N|$。并且因为 $|N|\mid |A|$，所以 $|N|\mid 2^{26}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7\cdot p\cdot q$。由于 $|A:N|\le2$，我们有 $|A_\alpha:N_\alpha|\le2$。如果 A_α 是不可解的，那么因为 $|A_\alpha:N_\alpha|\le2$，所以 N_α 也是不可解的。根据引理 2.4，$N_\alpha=A_5$，这与 7 整除 $|N_\alpha|$ 矛盾。因此 A_α 是可解的，并且根据引理 2.2，A_α 的阶整除 252。注意 N_α 是 A_α

的子群，所以$|N_\alpha|\,|\,252$。这意味着N的阶整除$3024pq$。

注意$|N|=\frac{q(q-1)(q+1)}{2}$，$\left(\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}\right)=1$且$|N|\,|\,3024pq$。如果$p\,|\,\frac{q-1}{2}$，则$q+1\,|\,3024$，由此可得$q=5$，7，11，13，17，23，41，47，53，71，83，107，167，251，431，503，1511或3023。如果$p\,|\,\frac{q+1}{2}$，则$q-1\,|\,3024$，由此可得$q=5$，7，13，17，19，29，37，43，73，109，113，127，337，379，433，757或1009。再由$42pq\,|\,|N|$且$|N|\,|\,2^{26}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7\cdot p\cdot q$，其中$q>p\geq5$，可以得到$q=29$，41，43，71，83，113，167，251，379，433，503，757，1009，1511或3023。因此，N是表6中的群之一。

Table 6. Some possible simple group
表6. 一些可能的单群

N	Order	N	Order
$PSL(2,29)$	$2^2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot29$	$PSL(2,379)$	$2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot379$
$PSL(2,41)$	$2^3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot41$	$PSL(2,433)$	$2^4\cdot3^3\cdot7\cdot31\cdot433$
$PSL(2,43)$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot11\cdot43$	$PSL(2,503)$	$2^3\cdot3^2\cdot7\cdot251\cdot503$
$PSL(2,71)$	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot71$	$PSL(2,757)$	$2^2\cdot3^3\cdot7\cdot379\cdot757$
$PSL(2,83)$	$2^2\cdot3\cdot7\cdot41\cdot83$	$PSL(2,1009)$	$2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot101\cdot1009$
$PSL(2,113)$	$2^4\cdot3\cdot7\cdot19\cdot113$	$PSL(2,1511)$	$2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7\cdot151\cdot1511$
$PSL(2,167)$	$2^3\cdot3\cdot7\cdot83\cdot167$	$PSL(2,3023)$	$2^4\cdot3^3\cdot7\cdot1511\cdot3023$
$PSL(2,251)$	$2^2\cdot3^2\cdot5^3\cdot7\cdot251$		

注意$|V\Gamma|>12540$，我们有$q\in\{83,113,167,251,379,433,503,757,1009,1511,3023\}$。

假设$q=251$，那么$N=PSL(2,251)$且$(p,q)=(2,251)$。注意$|N:N_\alpha|=6pq$或$12pq$。根据根据引理2.4，N没有指数为$6pq$或$12pq$的子群，这产生矛盾。类似地，$q\neq379$，433，1009或1511。

假设$q=113$。那么$N=PSL(2,113)$且$(p,q)=(19,113)$。如果N在$V\Gamma$上有两个轨道，那么根据引理2.2，$A=PGL(2,113)$且$|A_\alpha|=56$，这产生矛盾。我们可知N在$V\Gamma$上是传递的且$|N_\alpha|=28$。根据Magma [21]，存在一个图，记为$\mathcal{C}^1_{25764}$。

假设$q=503$。那么$N=PSL(2,503)$且$(p,q)=(251,503)$。若N在$V\Gamma$上有两个轨道，则$A=PGL(2,503)$，因此$|A_\alpha|=84$且$A_\alpha=F_{42}\times Z_2$，根据引理2.2。这是不可能的，因为$PGL(2,503)$没有与$A_\alpha=F_{42}\times Z_2$同构的子群。若$N$在$V\Gamma$上是传递的，则$|N_\alpha|=42$。根据引理2.2，$N_\alpha=F_{42}$。这是不可能的，因为$PSL(2,503)$没有与$F_{42}$同构的子群，矛盾。类似地，$q\neq757$。

假设$q=3023$。那么$N=PSL(2,3023)$且$(p,q)=(1511,3023)$。若N在$V\Gamma$上有两个轨道，则$A=PGL(2,3023)$且$|A_\alpha|=2^3\cdot3^2\cdot7$，根据引理2.2，矛盾。若$N$在$V\Gamma$上是传递的，则$|N_\alpha|=252$。根据引理2.2，$N_\alpha=F_{42}\times Z_6$。这是不可能的，因为$PSL(2,3023)$没有与$F_{42}\times Z_6$同构的子群，矛盾。

假设$q=83$或167。那么$\mathrm{Aut}\Gamma\cong PSL(2,83),PGL(2,83),PSL(2,167)$或$PGL(2,167)$。

因此，完成了引理3.3的证明。

通过结合引理3.1、3.2和3.3，完成了定理1的证明。

参考文献

[1] Conder, M. and Dobcsanyi, P. (2002) Trivalent Symmetric Graphs on Up to 768 Vertices. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **40**, 41-63.

[2] Feng, Y. and Kwak, J.H. (2006) Classifying Cubic Symmetric Graphs of Order $10p$ or $10p^2$. *Science in China Series A*, **49**, 300-319. https://doi.org/10.1007/s11425-006-0300-9

[3] Feng, Y. and Kwak, J.H. (2007) Cubic Symmetric Graphs of Order a Small Number Times a Prime or a Prime Square. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **97**, 627-646. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2006.11.001

[4] Feng, Y., Kwak, J.H. and Wang, K. (2005) Classifying Cubic Symmetric Graphs of Order $8p$ or $8p^2$. *European Journal of Combinatorics*, **26**, 1033-1052. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2004.06.015

[5] Hua, X.H. and Feng, Y.Q. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order $8p$. *Journal of Beijing Jiaotong University*, **35**, 132-135, 141.

[6] Hua, X., Feng, Y. and Lee, J. (2011) Pentavalent Symmetric Graphs of Order $2pq$. *Discrete Mathematics*, **311**, 2259-2267. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.07.007

[7] Meymandi, M.A., Alaeiyan, M. and Scapellato, R. (2021) Classification of the Pentavalent Symmetric Graphs of Order $8pq$. *Journal of Group Theory*, **11**, 259-270.

[8] Pan, J., Liu, Z. and Yu, X. (2015) Pentavalent Symmetric Graphs of Order Twice a Prime Square. *Algebra Colloquium*, **22**, 383-394. https://doi.org/10.1142/s1005386715000334

[9] Pan, J., Lou, B. and Liu, C. (2013) Arc-Transitive Pentavalent Graphs of Order $4pq$. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **20**, 1215-1230. https://doi.org/10.37236/2373

[10] Guo, S.T. (2020) Classifying Heptavalent Symmetric Graphs of Order $36p$. *Ars Combinatoria*, **148**, 57-68.

[11] Guo, S., Hou, H. and Xu, Y. (2017) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $16p$. *Algebra Colloquium*, **24**, 453-466. https://doi.org/10.1142/s1005386717000293

[12] Guo, S. and Wu, Y. (2019) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $24p$. *Proceedings—Mathematical Sciences*, **129**, Article No. 58. https://doi.org/10.1007/s12044-019-0497-5

[13] Lorimer, P. (1984) Vertex-transitive Graphs: Symmetric Graphs of Prime Valency. *Journal of Graph Theory*, **8**, 55-68. https://doi.org/10.1002/jgt.3190080107

[14] Guo, S., Li, Y. and Hua, X. (2016) (G,s)-Transitive Graphs of Valency 7. *Algebra Colloquium*, **23**, 493-500. https://doi.org/10.1142/s100538671600047x

[15] Li, C.H., Lu, Z.P. and Wang, G. (2016) Arc-Transitive Graphs of Square-Free Order and Small Valency. *Discrete Mathematics*, **339**, 2907-2918. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.06.002

[16] Cameron, P.J., Omidi, G.R. and Tayfeh-Rezaie, B. (2006) *3*-Designs from PGL(2,*q*). *The Electronic Journal of Combinatorics*, **13**, R50. https://doi.org/10.37236/1076

[17] Dickson, L.E. (1958) Linear Groups and Expositions of the Galois Field Theory. Dover.

[18] Guo, S.T. (2019) Heptavalent Symmetric Graphs of Order. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **42**, 161-172.

[19] Guo, S.T. and Wang, L. (2018) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $18p$. *Utilitas Mathematica*, **109**, 3-15.

[20] Pan, J., Ling, B. and Ding, S. (2017) On Prime-Valent Symmetric Graphs of Square-Free Order. *Ars Mathematica Contemporanea*, **15**, 53-65. https://doi.org/10.26493/1855-3974.1161.3b9

[21] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The Magma Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[22] Pan, J., Ling, B. and Ding, S. (2017) On Symmetric Graphs of Order Four Times an Odd Square-Free Integer and Valency Seven. *Discrete Mathematics*, **340**, 2071-2078. https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.04.008

[23] Gorenstein, D. (1982) Finite Simple Groups. Plenum Press.