Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 299-303
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164115

Hans汉斯

关于仿射簇的素理想的注记

程天伟，陈晓友*

河南工业大学数学与统计学院，河南 郑州

收稿日期：2026年2月25日；录用日期：2026年4月1日；发布日期：2026年4月27日

摘 要

本文研究了一个 $\mathbb{A}^3$ 中的仿射簇，证明了该仿射簇的理想的高度为2，但并不能由2个元素生成。从而说明了仿射簇的素理想并不一定能由其高度个元素生成。

关键词

仿射空间，仿射簇，代数几何，理想

A Note on the Prime Ideal of an Affine Variety

Tianwei Cheng, Xiaoyou Chen*

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan

Received: February 25, 2026; accepted: April 1, 2026; published: April 27, 2026

Abstract

This paper studies an affine variety in $\mathbb{A}^3$ and proves that the height of its prime ideal is 2, however it cannot be generated by 2 elements. This demonstrates that a prime ideal of an affine variety may not necessarily be generated by a number of elements equal to its height.

Keywords

Affine Space, Affine Variety, Algebraic Geometry, Ideal

*通讯作者。

文章引用: 程天伟, 陈晓友. 关于仿射簇的素理想的注记[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 299-303.
DOI: 10.12677/pm.2026.164115

1. 引言

本文中的符号在交换代数和代数几何中均是标准的，具体见经典教材[1]和[2]。设 K 表示一个代数闭域，

$$\mathbb{A}^n=\{(a_1,\cdots,a_n)\mid a_i\in K\}$$

表示 n 维仿射空间，即笛卡尔积 K^n 带有 Zariski 拓扑。通常可用 $P=(a_1,\cdots,a_n)$ 表示 $\mathbb{A}^n$ 中的一个点。设 S 是多项式环 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 中任意一个子集。定义 S 中所有多项式的公共零点集为：

$$Z(S)=\{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{A}^n\mid f(a_1,\cdots,a_n)=0,\forall f\in S\}$$

一个 $\mathbb{A}^n$ 的子集 V 被称为仿射代数集，如果存在 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 的子集 S 使得 $V=Z(S)$。若仿射代数集 V 不能表为两个真代数子集的并，则称 V 是不可约的。$\mathbb{A}^n$ 中的不可约仿射代数集称为仿射簇。仿射簇的本质就是多项式方程组的解集。

在交换代数中，一个素理想 P 的高度是包含在其中的素理想链的最大长度(ht$P=$ 链长 -1)。直观上，它衡量了这个素理想离零理想有多远。因此，存在一个非常自然且基本的问题，理想的生成元数目和其高度有何关系？事实上，著名的 Krull 主理想定理对于这个问题给出了一个初步的答案，即一个诺特环的素理想的高度始终≤其生成元数目。

定理 1.1 ((推广的) Krull 主理想定理) 设 R 是一个诺特(Noetherian)环，I 是 R 的真理想且 $I=(a_1,\cdots,a_r)$，即 I 是由 r 个元素生成的理想，则对于任意包含 I 的极小素理想 P 均有 $\mathrm{ht}P\le r$。特别地，$I=P$ 为素理想时，$\mathrm{ht}I\le r$。

由此可知，对于一个 $\mathrm{ht}I=n$ 的素理想 I，它所需的生成元至少为 n 个，那它是否一定能由 n 个元素生成?答案是否定的。本文提供了一个来自代数几何中的例子，其中该理想的生成元关联某个矩阵的子式。

例 1.2 设曲线 $Y\subset\mathbb{A}^3$ 由参数形式 $x=t^3,y=t^4,z=t^5$ 给出，则

$$I(Y)=\{f\in K[x,y,z]\mid f(t^3,t^4,t^5)=0,\forall t\in K\}$$

是高度为 2 的素理想，但不能由 2 个元素生成。

2. 证明

在本节，我们将分两部分证明例 1.2 中的结论。

命题 2.1 Y 是仿射簇且 $\mathrm{ht}I(Y)=2$。

证明 首先定义多项式环之间的同态

$$\begin{aligned}&\varphi:K[x,y,z]\to K[t],\\&x\mapsto t^3,y\mapsto t^4,z\mapsto t^5.\end{aligned}$$

对于任意 $\alpha\in K$，记 $\mathrm{ev}_\alpha:K[t]\to K,f(t)\mapsto f(\alpha)$，再记 $\ker\mathrm{ev}_\alpha=\mathfrak{m}_\alpha$。由环同态基本定理知，$K[t]/\mathfrak{m}_\alpha\cong K$，故 $\mathfrak{m}_\alpha$ 为极大理想。于是，$\bigcap_{\alpha\in K}\mathfrak{m}_\alpha=0$。

注意到，

$$\begin{aligned}f\in I(Y)&\Leftrightarrow\forall\alpha\in K,f(\alpha^3,\alpha^4,\alpha^5)=0\\&\Leftrightarrow\forall\alpha\in K,\mathrm{ev}_\alpha\circ\varphi(f)=0\\&\Leftrightarrow\forall\alpha\in K,\varphi(f)\in\mathfrak{m}_\alpha\\&\Leftrightarrow\varphi(f)\in\bigcap_{\alpha\in K}\mathfrak{m}_\alpha=0\\&\Leftrightarrow f\in\ker\varphi\end{aligned}$$

于是 $I(Y)=\ker\varphi$。根据同态基本定理，$K[x,y,z]/\ker\varphi \cong K\left[t^3,t^4,t^5\right]$，故 $I(Y)$ 为素理想，Y 为仿射簇。

若 $f(t)\in K[t]$，设

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum a_i t^i = \sum a_{3i}t^{3i} + \sum a_{3i+1}t^{3i+1} + \sum a_{3i+2}t^{3i+2} \\ &= \sum a_{3i}t^{3i}\cdot 1 + \sum a_{3i+1}t^{3i}\cdot t + \sum a_{3i+2}t^{3i}\cdot t^2. \end{aligned}$$

由于 $\sum a_{3i}t^{3i}, \sum a_{3i+1}t^{3i}, \sum a_{3i+2}t^{3i} \in K\left[t^3\right]$，故 $K[t]$ 是有限生成 $K\left[t^3,t^4,t^5\right]$ 模，生成元为 $1,t,t^2$，即 $K[t]=K\left[t^3,t^4,t^5\right][t]$ 为有限生成 $K\left[t^3,t^4,t^5\right]$ 模，故 $K[t]$ 在 $K\left[t^3,t^4,t^5\right]$ 上是整的。进而

$$\mathrm{ht}\ker\varphi + \dim K[x,y,z]/\ker\varphi = 3,$$

$$\mathrm{ht}\ker\varphi = 3-\dim K\left[t^3,t^4,t^5\right] = 3-\dim K[t] = 2,$$

故 $\mathrm{ht}I(Y)=2$。

命题 2.2 $I(Y)$ 不可能由 2 个元素生成。

证明 设 $f(x,y,z)=\sum \alpha_{ijk}x^i y^j z^k$，则

$$f\left(t^3,t^4,t^5\right) = \sum \alpha_{ijk}t^{3i+4j+5k} = \alpha_{000} + \sum_{n\ge 3}\left(\sum_{3i+4j+5k=n}\alpha_{ijk}\right)t^n,$$

从而，

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \alpha_{000} + \sum_{n\ge 3}\left(\sum_{3i+4j+5k=n}\alpha_{ijk}x^i y^j z^k\right) \\ &= \alpha_{000} + \alpha_{100}x + \alpha_{010}y + \alpha_{001}z + \alpha_{200}x^2 + \alpha_{110}xy + \left(\alpha_{101}xz + \alpha_{020}y^2\right) \\ &\quad + \left(\alpha_{300}x^3 + \alpha_{011}yz\right) + \left(\alpha_{210}x^2y + \alpha_{002}z^2\right) + \sum_{n\ge 11}\sum_{3i+4j+5k=n}\alpha_{ijk}x^i y^j z^k \end{aligned}$$

注意到，$f\in I(Y)$ 当且仅当 $f\left(t^3,t^4,t^5\right)=0$。所以若 $f\in I(Y)$，则 $\alpha_{000}=0$ 且对于任意 $n\ge 3$ 均有 $\sum_{3i+4j+5k=n}\alpha_{ijk}=0$。特别地，$a_{101}+a_{020}=0$，$a_{300}+a_{011}=0$，$a_{210}+a_{002}=0$。于是，

$$f(x,y,z) = \alpha_{101}\left(xz-y^2\right) + \alpha_{300}\left(x^3-yz\right) + \alpha_{210}\left(x^2y-z^2\right) + \sum_{n\ge 12}\sum_{3i+4j+5k=n}\alpha_{ijk}x^i y^j z^k.$$

最后一项中所出现的所有单项式次数均至少为 3。

假设 $I(Y)$ 由多项式 g_1,g_2 生成，即 $I(Y)=(g_1,g_2)$。于是可设

$$\begin{aligned} g_1 &= \beta_{101}\left(xz-y^2\right) + \beta_{300}\left(x^3-yz\right) + \beta_{210}\left(x^2y-z^2\right) + g_1', \\ g_2 &= \gamma_{101}\left(xz-y^2\right) + \gamma_{300}\left(x^3-yz\right) + \gamma_{210}\left(x^2y-z^2\right) + g_2'. \end{aligned}$$

显然，$xz-y^2, x^3-yz, x^2y-z^2 \in I(Y)$。故设

$$\begin{aligned} xz-y^2 &= p_1g_1 + p_2g_2 = \left(a_1+p_1'\right)g_1 + \left(a_2+p_2'\right)g_2, \\ x^2y-z^2 &= q_1g_1 + q_2g_2 = \left(b_1+q_1'\right)g_1 + \left(b_2+q_2'\right)g_2, \\ x^2y-y^2 &= m_1g_1 + m_2g_2 = \left(c_1+m_1'\right)g_1 + \left(c_2+m_2'\right)g_2. \end{aligned}$$

其中 $p_1,p_2\in K[x,y,z]$，$p_i=a_i+p_i'$ 是把 p_i 拆分为常数项 a_i 和非常数部分 p_i'，其余相同。

进一步，$xz-y^2 = a_1g_1 + p_1'g_1 + a_2g_2 + p_2'g_2$，将 g_1,g_2 的表达式分别带入 a_1g_1, a_2g_2，则

$$
\begin{aligned}
xz-y^2=&\left(a_1\beta_{101}+a_2\gamma_{101}\right)\left(xz-y^2\right)+\left(a_1\beta_{300}+a_2\gamma_{300}\right)\left(x^3-yz\right)\\
&+\left(a_1\beta_{210}+a_2\gamma_{210}\right)\left(x^2y-z^2\right)+\left(a_1g_1'+a_2g_2'+p_1'g_1+p_2'g_2\right)
\end{aligned}
$$

另外，

$$
p_1'g_1=\left(\beta_{101}p_1'xz-\beta_{101}p_1'y^2-\beta_{300}p_1'yz-p_1'\beta_{210}z^2\right)+\left(\beta_{300}p_1'x^3+p_1'\beta_{210}x^2y+p_1'g_1'\right)
$$

在上式的前一部分中，它的每一项中的单项式的次数≥3，且不可能含有 x^3,x^2y；此式的后一部分中，每一项中的单项式次数≥4。

于是 $p_1'g_1$ 的单项式中不可能含有 xz,y^2,x^3,yz,x^2y,z^2。同理，$p_2'g_2$ 亦然。另根据 g_1' 和 g_2' 的定义，g_1',g_2' 中也不可能含有上述项。故比较 xz,x^3,x^2y 的系数，可得下列等式：

$$
\begin{cases}
a_1\beta_{101}+a_2\gamma_{101}=1\\
a_1\beta_{300}+a_2\gamma_{300}=0\\
a_1\beta_{210}+a_2\gamma_{210}=0
\end{cases}
$$

对 x^3-yz 和 x^2y-z^2 作相同的讨论，可以分别得到：

$$
\begin{cases}
b_1\beta_{101}+b_2\gamma_{101}=0\\
b_1\beta_{210}+b_2\gamma_{210}=1\\
b_1\beta_{300}+b_2\gamma_{300}=0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
c_1\beta_{101}+c_2\gamma_{101}=0\\
c_1\beta_{210}+c_2\gamma_{210}=0\\
c_1\beta_{300}+c_2\gamma_{300}=1
\end{cases}
$$

接下来对这三组等式进行分析。

(i) 若 $\gamma_{101},\gamma_{210},\gamma_{300}$ 中有一个为 0，不妨设 $\gamma_{101}=0$，则 $\beta_{101}\neq 0$，$b_1=0$，$\gamma_{210}\neq 0$，$b_2\neq 0$，$\gamma_{300}=c_1=c_2=0$，矛盾。

(ii) 若 $\gamma_{101},\gamma_{300},\gamma_{210}$ 全不为 0。若 $a_1=0$，则 $\gamma_{300}=0$，矛盾，故 $a_1\neq 0$。同理，$b_1,c_1\neq 0$。由上述三组等式可得到如下一组等式：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\beta_{101}}{\gamma_{101}}=\dfrac{-b_2}{b_1}=\dfrac{-c_2}{c_1}\\
\dfrac{\beta_{300}}{\gamma_{300}}=\dfrac{-b_2}{b_1}=\dfrac{-a_2}{a_1}\\
\dfrac{\beta_{210}}{\gamma_{210}}=\dfrac{-c_2}{c_1}=\dfrac{-a_2}{a_1}
\end{cases}
$$

将这些比值记为 α，故

$$
1=a_1\beta_{101}+a_2\gamma_{101}=a_1\alpha\gamma_{101}+a_2\gamma_{101}=\gamma_{101}\left(a_1\alpha+a_2\right)=\gamma_{101}\cdot 0=0,
$$

矛盾，故 $I(Y)$ 不可能由 2 个元素生成。

基金项目

河南工业大学项目(lxycxsy202424, 2024PYJH019, JXYJ2025061)，河南省自然科学项目(252300421983)，高校大学数学教学研究与发展中心项目(CMC20240610)，以及教学创新项目(2023SJGLX173Y)。

参考文献

[1] Atiyah, M.F. and Ian, G.M. (2018) Introduction to Commutative Algebra. CRC Press.
[2] Hartshorne, R. (2013) Algebraic Geometry. Springer Science & Business Media.