Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 1-9
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164085

一类(p, q)-Monge-Ampère方程解的存在性

席丹丹

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2026年2月25日；录用日期：2026年3月19日；发布日期：2026年3月27日

摘　要

运用一个新的修正的Gustafson-Schmitt型不动点定理，研究一类(p, q)-Monge-Ampère方程在Dirichlet边界条件下解的存在性。当非线性项仅在$u = 0$处满足适当的增长条件时，得到了径向解的存在性结果。

关键词

(p, q)-Monge-Ampère方程，Gustafson-Schmitt不动点定理，径向解，存在性

The Existence of Solutions for a Class of (p, q)-Monge-Ampere Equations

Dandan Xi

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: February 25, 2026; accepted: March 19, 2026; published: March 27, 2026

Abstract

By applying a new and modified Gustafson-Schmitt type the fixed point theorem, the existence of solutions for a class of (p, q)-Monge-Ampère equations under Dirichlet boundary conditions is studied. When the nonlinear term satisfies appropriate growth conditions at $u = 0$, the existence results of radial solutions are obtained.

Keywords

(p, q)-Monge-Ampère Equation, Gustafson-Schmitt Fixed Point Theorem, Radial Solution, Existence

文章引用: 席丹丹. 一类(p, q)-Monge-Ampère 方程解的存在性[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 1-9.
DOI: 10.12677/pm.2026.164085

1. 引言

近年来，带(p,q)-Laplace 算子的模型在物理学学科中有着广泛的应用。例如，在非牛顿流体力学研究中，(p,q)-Laplace 算子能够更加精细地描述流体变化的复杂情况及特征。同时，在弹性理论中，它也可用于分析具有非标准弹性性质材料的力学性质，这使得带(p,q)-Laplace 问题的研究受到了广泛关注[1]-[6]。

2020 年，Das [3]等人基于上下解方法，研究了一类(p,q)-Laplace 问题

$$\begin{cases}-\Delta_p u-\Delta_q u=\lambda f(u), x\in\Omega,\\ u=0, x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{1.1}$$

在广义有界域上径向解的存在性。其中$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，$p>q\geq 2$，$\lambda\in(0,\infty)$，$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$上连续，且在 0 处$f(0)<0$.2021 年，Sim [4]等运用 Krasnosel’skii 不动点定理也对这一问题进行了深入分析，进一步丰富了该类拟线性问题的研究工具。

同时，Monge-Ampère 型方程在几何分析、最优传输及气象学、天体物理学等物理模型中具有重要应用。因此，该类问题径向解的存在性得到了诸多学者的关注[7]-[11]。例如，2023 年，Feng [10]等人通过特征值理论与锥上的不动点定理的结合，获得了奇异 p-Monge-Ampère 方程径向解的存在性、参数依赖性结果。2024 年，Wang[11]等人通过建立新的最大值原理并系统的运用移动平面法，获得了该方程解的对称性、单调性和渐近行为等。但是，就我们所知，关于(p,q)-Monge-Ampère 问题解的存在性的研究尚未见诸文献。当$p>1$时，p-Monge-Ampère 算子被定义为$det\left(D\left(|Du|^{p-2}Du\right)\right)=(p-1)|Du|^{n(p-2)}detD^2u$ (D 是 Jacobian 算子)；当$p=2$时，它就退化为常见的 Monge-Ampère 算子[16]。值得注意的是，在经典的 Laplace 问题正解以及(p,q)-Monge-Ampère 方程径向负解的绝大部分研究中，为获得正解的存在性，需要非线性项f既满足在 0 处有增长性条件，也满足在∞处有增长性条件，并且也没有获得正解的有界性结果，但本文非线性项f仅在 0 处满足非线性增长条件即可。

本文试图研究一类(p,q)-Monge-Ampère 方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\det\left(D\left(|Du|^{p-2}Du\right)\right)+\det\left(D\left(|Du|^{q-2}Du\right)\right)=\lambda f(-u), x\in B\\ u=0, x\in\partial B\end{cases} \tag{1.2}$$

径向负解的存在性。其中$B=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1, n\geq 1\right\}$是$\mathbb{R}^n$中的单位球，$D^2u=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$是 u 的 Hessian 矩阵，$p>q>2$，$\lambda>0$，f在 0 处满足某种增长性条件如下：

$(H_1)\, f:[0,\infty)\to[0,\infty)$连续且$f(s)>0$，$s>0$。

$(H_2)\, f_0: \lim\limits_{v\to 0^+}\frac{f(v)}{v^{n(p-1)}}=0$，$r\in(0,1)$。

2. 预备知识

令$r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$。设$u(|x|)=u(r)$，则问题(1.2)转化为如下问题

$$\begin{cases} r^{1-n}\left(\phi\left(u'\right)\right)' = \lambda nf\left(-u\right),\ 0<r<1 \\ u'\left(0\right)=0, u\left(1\right)=0 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中

$$\phi\left(t\right)=\left|t\right|^{n(p-2)}t^{n}+\left|t\right|^{n(q-2)}t^{n}.$$

令 $v=-u$，则(2.1)等价于

$$\begin{cases} r^{1-n}\left(\phi\left(-v'\right)\right)' = \lambda nf\left(v\right), 0<r<1 \\ v'\left(0\right)=0, v\left(1\right)=0 \end{cases} \tag{2.2}$$

其中

$$\phi\left(t\right)=\left|t\right|^{n(p-2)}t^{n}+\left|t\right|^{n(q-2)}t^{n}$$

是递增的同胚函数。

令 $X:=C\left[0,1\right]$，对于任意的 $v\in X$，定义范数 $\left\|v\right\|=\sup\limits_{r\in[0,1]}\left|v\left(r\right)\right|$，则 X 在此范数下构成一个 Banach 空间。

定义

$$K:=\left\{v\in X: v\left(r\right)\geq 0, r\in\left(0,1\right), v'\left(0\right)=v\left(1\right)=0\right\}.$$

则 $K\subset X$ 是一个锥。对 $v\in K$，定义 $T:K\to X$ 为

$$\left(Tv\right)\left(r\right)=\int_r^1\phi^{-1}\left(\int_0^{\tau}s^{n-1}\lambda nf\left(v\left(s\right)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau,\quad r\in\left(0,1\right).$$

容易验证(2.2)等价于不动点方程 $Tv=v$。因此，如果 $v\in K$ 是 T 的不动点，那么 u 是(1.2)的一个径向解。

本文所用的工具如下：

定理 2.1 ([12]) 令 X 是 Banach 空间，$K\subset X$ 是一个锥。对于实数 $0<z<Z$，令

$$D=\left\{v\in K: z\leq\left\|v\right\|\leq Z\right\}.$$

设 $A:D\to K$ 为全连续算子，若 A 满足：

(a) $v\in D$，$\mu>1$ 和 $v=\mu Av$，则 $\left\|v\right\|\neq Z$；

(b) $v\in D$，$\mu<1$ 和 $v=\mu Av$，则 $\left\|v\right\|\neq z$；

(c) $\inf\limits_{\|v\|=Z}\left\|Av\right\|>0$。

则 A 在 D 中存在不动点。

引理 2.1 ([7]) 对于任意函数 $v\in C\left[0,1\right]$，其中 $v\left(r\right)\geq 0$ 且 $v'\left(r\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上递减，有

$$v\left(r\right)\geq\min\left\{r,1-r\right\}\left\|v\right\|,\quad r\in\left[0,1\right].$$

特别地，对于任意的 $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$，有

$$\min_{\alpha\leq r\leq 1-\alpha}v\left(r\right)\geq\alpha\left\|v\right\|.$$

引理 2.2 设 $f\left(v\right)>0$ 对所有的 $v>0$ 成立。如果 $Z>0$ 是一个实数，那么问题(2.2)的任意解 v，满足

$$\inf\left\{\left\|Tv\right\|: v\in K, \left\|v\right\|=Z\right\}>0.$$

证明 显然，v 是(2.2)的一个解当且仅当 $Tv=v$。设 v 是(2.2)的任意一个解，因为

$$v''=-\frac{\tau^{n-1}\lambda nf\left(v(\tau)\right)}{\phi'\left(\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf\left(v(s)\right)\mathrm{d}s\right)\right)}<0,$$

所以 $v'(r)$ 是严格递减的。

令 $D^*=\left\{v\,\middle|\,v\in K,\|v\|=Z\right\}$，由引理 2.1 可得 $v(r)\ge\alpha\|v\|$，其中 $r\in(\alpha,1-\alpha)\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$。则对任意的 $v\in D^*$，有 $v\in[\alpha Z,Z]$。令

$$p=\inf\left\{f(v):v\in[\alpha Z,Z]\right\}>0.$$

由于

$$\begin{aligned}(Tv)\left(\frac{1}{2}\right)&=\int_{\frac{1}{2}}^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf\left(v(s)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&\ge\int_{\frac{1}{2}}^1\phi^{-1}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}s^{n-1}\lambda nf\left(v(s)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&\ge\int_{\frac{1}{2}}^1\phi^{-1}\left[p\lambda\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\alpha^n\right)\right]\mathrm{d}\tau\\&\ge\frac{1}{2}\phi^{-1}\left[p\lambda\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\alpha^n\right)\right]>0,\end{aligned}$$

因此，对于所有的 $v\in K$，有 $\|Tv\|\ge\frac{1}{2}\phi^{-1}\left[p\lambda\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\alpha^n\right)\right]>0$ 满足 $\|v\|=Z$。

引理 2.3 若 $\omega>0$，$\phi(t)=|t|^{(p-2)}t^n+|t|^{(q-2)}t^n$，则

(1) $\phi^{-1}(\sigma\omega)\ge\sigma^{\frac{1}{n(q-1)}}\phi^{-1}(\omega)$，$\sigma\in(0,1]$；

(2) $\phi^{-1}(\sigma\omega)\ge\sigma^{\frac{1}{n(p-1)}}\phi^{-1}(\omega)$，$\sigma>1$。

证明 首先证明 ϕ^{-1} 的基本性质

单调性：由于 $\phi(t)=|t|^{(p-2)}t^n+|t|^{(q-2)}t^n\,(t\ge0)$ 可以看出，当 $t>0$ 时，$\phi^{-1}(t)=n(p-1)|t|^{(p-1)n-1}+n(q-1)|t|^{(q-1)n-1}>0,$ 因此 $\phi(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上严格单调递增；

连续性：由于 $\phi(t)$ 是连续的且严格单调，因此反函数 $\phi^{-1}(t)$ 在其对应区间上也是严格单调且连续的。

令 $x=\phi^{-1}(w)$，则 $x>0$，且 $x^{n(p-1)}+x^{n(q-1)}=\omega$。当 $\sigma\in(0,1]$，有

$$\begin{aligned}\phi\left(\sigma^{\frac{1}{n(q-1)}}x\right)&=\left(\sigma^{\frac{1}{n(q-1)}}x\right)^{n(p-1)}+\left(\sigma^{\frac{1}{n(q-1)}}x\right)^{n(q-1)}\\&=\sigma^{\frac{p-1}{q-1}}x^{n(p-1)}+\sigma x^{n(q-1)}\\&\le\sigma\left(x^{n(p-1)}+x^{n(q-1)}\right)\\&=\sigma\omega,\end{aligned}$$

故 $\phi^{-1}(\sigma\omega)\ge\sigma^{\frac{1}{n(q-1)}}\phi^{-1}(\omega)$。当 $\sigma>1$ 时，有

$$\phi\left(\sigma^{\frac{1}{n(p-1)}}x\right)=\left(\sigma^{\frac{1}{n(p-1)}}x\right)^{n(p-1)}+\left(\sigma^{\frac{1}{n(p-1)}}x\right)^{n(q-1)}$$
$$=\sigma x^{n(p-1)}+\sigma^{\frac{q-1}{p-1}}x^{n(p-1)}$$
$$\le\sigma\left(x^{n(p-1)}+x^{n(q-1)}\right)$$
$$=\sigma\omega,$$

故 $\phi^{-1}(\sigma\omega)\ge\sigma^{\frac{1}{n(p-1)}}\phi^{-1}(\omega)$。

引理 2.4 $T:K\to K$ 是全连续算子。

证明 对于任意的 $v\in K$。由 $T:K\to X$ 可得 $Tv\in X$ 且 $Tv\ge 0$。则由锥 K 的定义可得 $Tv\in K$，所以 $T:K\to K$。设 S 是 K 中的有界集。存在一个常数 $M>0$，使得对于任意的 $v\in S$，有 $\|v\|\le M$。因为 f 在 S 上连续，所以存在 $M_1>0$，使得对于任意的 $v\in S$，有 $\left|f(v(r))\right|\le M_1$。记 $H=\phi^{-1}(\lambda M_1)$，则

$$\left|Tv(r)\right|=\left|\int_r^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf(v(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right|$$
$$\le\int_r^1\left|\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf(v(s))\mathrm{d}s\right)\right|\mathrm{d}\tau$$
$$\le\int_r^1\left|\phi^{-1}\left(\int_0^1 s^{n-1}\lambda nM_1\mathrm{d}s\right)\right|\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_r^1\left|\phi^{-1}(\lambda M_1)\right|\mathrm{d}\tau$$
$$\le H(1-r).$$

故 $T:K\to K$ 是一致有界的。

对任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{H}$，则对任意的 $0\le r'<r''\le 1$，当 $|r''-r'|<\delta$ 时，对任意的 $v\in S$，有

$$\left|Tv(r'')-Tv(r')\right|=\left|\int_{r''}^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf(v)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau-\int_{r'}^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf(v)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\right|$$
$$\le\int_{r'}^{r''}\left|\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf(v)\mathrm{d}s\right)\right|\mathrm{d}\tau$$
$$\le H|r''-r'|<H\cdot\frac{\varepsilon}{H}=\varepsilon.$$

故 $T:K\to K$ 是等度连续的。由此可知，T 是映 K 入 K 中的紧算子。

下证 T 的连续性。设 $v_m,v_0\in K$，$\|v_m-v_0\|_\infty\to 0(m\to\infty)$。由 f 和 ϕ^{-1} 的连续性可知

$$Tv_m(r)=\int_r^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf(v_m(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau$$
$$\to\int_r^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf(v_0(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau=Tv_0(r).$$

从而 $\|Tv_m-Tv_0\|_\infty\to 0(m\to\infty)$。故 $T:K\to K$ 是连续的。

综上，运用 Arzelà-Ascoli 定理，得到 $T:K\to K$ 是全连续的。

3. 主要结果

定理 3.1 若(H_2)成立。那么存在充分大的 $Z>0$，常数 $\lambda_Z>0$，使得对于任意的 $\lambda>\lambda_Z$，问题(1.2)存在径向解 $u(r)$，满足 $\inf\limits_{r\in[0,1]}u(r)\ge -Z$。

证明 根据 $v=-u$，对 $Z>0$，定义

$$D=\left\{v\in K:0\le v(r)\le Z,r\in(0,1)\right\}.$$

下证 T 在 D 中有不动点。

首先证明定理 2.1 中的条件(a)成立。对于常数 $z_1>0$，令

$$D_1=\left\{v\in K:z_1\le\|v\|\le Z,r\in(0,1)\right\}.$$

下证 $\|v_0\|\ne Z$。反设存在 $v_0\in D_1$，$\mu_0>1$ 且 $\|v_0\|=Z$ 满足 $v_0=\mu_0 Tv_0$，即

$$v_0(r)=\mu_0\int_r^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf(v_0)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau. \tag{3.1}$$

则 v_0' 是单调递减的，由引理 2.1，可得

$$v_0(r)\ge\alpha\|v_0\| \text{ 且 } \alpha\|v_0\|\le v_0(r)\le\|v_0\|,\ \ r\in[\alpha,1-\alpha]. \tag{3.2}$$

令

$$m_Z=\min_{r\in[\alpha,1-\alpha]}\frac{f(v)}{v^{n(p-1)}}. \tag{3.3}$$

选取足够大的 $\lambda_Z>0$，当 $\sigma>1$ 时，可得

$$\lambda_Z>\frac{\phi\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}{m_Z\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]},$$

当 $\sigma\in(0,1]$ 时，可得

$$\lambda_Z>\frac{\phi\left(\alpha^{-\frac{p+q-2}{q-1}}\right)}{m_Z\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]}.$$

由(H_2)可得，对于任意的

$$0<\varepsilon<\left(\frac{p}{p-1}\right)^{n(p-1)}\cdot\frac{1}{\lambda}.$$

存在 $z>0$，使得当 $0\le v\le z$，有 $f(v)\le\varepsilon v^{n(p-1)}$。

由(3.2)，$\alpha Z\le v_0(r)\le Z$，$r\in(\alpha,1-\alpha)$，于是当 $\lambda>\lambda_Z$ 时，得

$$\begin{aligned}\|v_0\|&=\mu_0\int_0^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf(v_0(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&\ge\mu_0\int_{1-\alpha}^1\phi^{-1}\left(\int_\alpha^{1-\alpha}s^{n-1}\lambda nf(v_0(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\&\ge\mu_0\int_{1-\alpha}^1\phi^{-1}\left(\int_\alpha^{1-\alpha}s^{n-1}\lambda nmzv_0^{n(p-1)}(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

令 $\sigma=(\alpha\|v_0\|)^{n(p-1)}$ 且 $\omega=\lambda_Z m_Z\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]$。当 $\sigma>1$ 时，根据引理 2.3 及(3.2)式，得

$$
\begin{aligned}
Z=\|v_0\| &\ge \mu_0\int_{1-\alpha}^{1}\phi^{-1}\left(\int_{\alpha}^{1-\alpha} ns^{n-1}\lambda m_Z\alpha^{n(p-1)}\|v_0\|^{n(p-1)}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\
&\ge \mu_0\int_{1-\alpha}^{1}\phi^{-1}\left(\lambda_Z m_Z\alpha^{n(p-1)}\|v_0\|^{n(p-1)}\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]\right)\mathrm{d}\tau\\
&\ge \mu_0\int_{1-\alpha}^{1}\left(\alpha\|v_0\|\right)^{\frac{n(p-1)}{n(p-1)}}\phi^{-1}\left(\lambda_Z m_Z\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]\right)\mathrm{d}\tau\\
&=\mu_0\alpha^2\|v_0\|\phi^{-1}\left(\lambda_Z m_Z\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]\right)\\
&>\mu_0\|v_0\|=\mu_0 Z>Z,
\end{aligned}
$$

当$\sigma\in(0,1]$时，得

$$
\begin{aligned}
Z=\|v_0\| &\ge \mu_0\int_{1-\alpha}^{1}\phi^{-1}\left(\int_{\alpha}^{1-\alpha} ns^{n-1}\lambda m_Z\alpha^{n(p-1)}\|v_0\|^{n(p-1)}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\
&\ge \mu_0\int_{1-\alpha}^{1}\phi^{-1}\left(\lambda_Z m_Z\alpha^{n(p-1)}\|v_0\|^{n(p-1)}\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]\right)\mathrm{d}\tau\\
&\ge \mu_0\int_{1-\alpha}^{1}\left(\alpha\|v_0\|\right)^{\frac{n(p-1)}{n(q-1)}}\phi^{-1}\left(\lambda_Z m_Z\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]\right)\mathrm{d}\tau\\
&=\mu_0\alpha^{\frac{p+q-2}{q-1}}\|v_0\|^{\frac{p-1}{q-1}}\phi^{-1}\left(\lambda_Z m_Z\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]\right)\\
&>\mu_0\|v_0\|^{\frac{p-1}{q-1}}=\mu_0 Z^{\frac{p-1}{q-1}}>Z.
\end{aligned}
$$

矛盾。因此，$\|v\|\ne Z$。

其次证明定理2.1中的条件(b)成立。下证$\|v_1\|\ne z$。反设存在$v_1\in D$，$\mu_1\in(0,1)$且$\|v_1\|=z$满足$v_1=\mu_1 Tv_1$，则

$$
\begin{aligned}
v_1&=\mu_1\int_r^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda nf\left(v_1(s)\right)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\
&\le \mu_1\int_r^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda n\varepsilon v_1^{n(p-1)}(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

当$t>0$时，$\phi(t)=t^{n(p-1)}+t^{n(q-1)}\ge t^{n(p-1)}$，则$\phi^{-1}(t)\le t^{\frac{1}{n(p-1)}}\ (t>0)$。有

$$
\begin{aligned}
z=\|v_1\|&\le \mu_1\int_0^1\phi^{-1}\left(\int_0^\tau s^{n-1}\lambda n\varepsilon\|v_1\|^{n(p-1)}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\\
&\le \mu_1\int_0^1\phi^{-1}\left(\varepsilon\lambda\|v_1\|^{n(p-1)}\tau^n\right)\mathrm{d}\tau\\
&\le \mu_1\int_0^1\left(\varepsilon\lambda\|v_1\|^{n(p-1)}\tau^n\right)^{\frac{1}{n(p-1)}}\mathrm{d}\tau\\
&\le \mu_1(\varepsilon\lambda)^{\frac{1}{n(p-1)}}\|v_1\|\int_0^1\tau^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}\tau\\
&=\mu_1(\varepsilon\lambda)^{\frac{1}{n(p-1)}}\|v_1\|\frac{p-1}{p}\\
&\le \mu_1\|v_1\|=\mu_1 z<z.
\end{aligned}
$$

矛盾。因此，$\|v\|\ne z$。

结合引理2.2和定理2.1可知，问题(1.2)在D中存在径向解且满足$\inf\limits_{r\in[0,1]}u(r)\ge -Z$。

4. 数值例子

考虑如下(p,q)-Monge-Ampère 方程边值问题

$$\begin{cases}\det\left(D\left(|Du|^{p-2}Du\right)\right)+\det\left(D\left(|Du|^{p-2}Du\right)\right)=\lambda f(-u),x\in B\\ u=0,x\in\partial B\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 $B=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1,n\geq 1\right\}$， $n=3$， $p=4$， $q=3$， $\lambda>0$， $f\in C\left([0,\infty),[0,\infty)\right)$ 且 $f(v)=v^{10}$。原问题转化为

$$\begin{cases}r^{-2}\left(\phi(-v')\right)'=3\lambda v^{10},\quad 0<r<1\\ v'(0)=0,v(1)=0\end{cases}\tag{4.2}$$

取 $Z=2$， $\alpha=0.3$，由(3.4)式，得

$$m_Z=\min_{r\in[0.3,0.6]}\frac{f(v)}{v^{3(p-1)}}=\min_{v\in[0.6,2]}\frac{v^{10}}{v^9}=\min_{v\in[0.6,2]}v.$$

由于 $\sigma=(\alpha Z)^{n(p-1)}=(0.6)^{3\times 3}=0.6^9\approx 0.0101<1$，使用第二种情况：

$$\lambda_Z>\frac{\phi\left(\alpha^{-\frac{p+q-2}{q-1}}\right)}{m_Z\left[(1-\alpha)^n-\alpha^n\right]}=\frac{\phi\left(0.3^{-\frac{5}{2}}\right)}{0.6\times[0.343-0.027]}\approx 1.303\times 10^{15}.$$

假设存在 v_0 满足 $v_0=\mu Tv_0$， $\mu>1$，且 $\|v_0\|=Z=2$，由上述证明过程可得

$$2=\|v_0\|\geq\mu\alpha^{\frac{p+q-2}{q-1}}\|v_0\|^{\frac{p-1}{q-1}}\phi^{-1}\left(\lambda_z m_z[0.343-0.027]\right)\geq\mu\times 0.0493\times 2.8284\times 20.35\approx 2.8376\mu.$$

当 $\mu>1$ 时产生矛盾。

取 $z=0.1$，对于 $0\leq v\leq 0.1$，有

$$f(v)=v^{10}\approx 0.01,\quad v^{n(p-1)}=v^9\geq 0.$$

选择 $\varepsilon\approx\frac{0.01}{0.1^9}=\frac{0.01}{1\times 10^{-9}}=1\times 10^7$。由上述证明可得

$$0<\varepsilon<\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\lambda(p-1)}\cdot\frac{1}{\lambda}.$$

带入数值验证产生矛盾。

因此，当 $\lambda>1.303\times 10^{15}$，问题(4.1)存在径向解 $u(r)$ 满足 $\sup_{r\in[0,1]}u(r)\geq -2$。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(12461039)；西北师范大学研究生科研资助项目(2021KYZZ01032)。

参考文献

[1] Wang, S. and Bai, Z. (2020) Existence and Uniqueness of Solutions for a Mixed P-Laplace Boundary Value Problem Involving Fractional Derivatives. *Advances in Difference Equations*, **2020**, Article No. 694. https://doi.org/10.1186/s13662-020-03154-2

[2] Hai, D.D., Shivaji, R. and Wang, X. (2022) Positive Radial Solutions for a Class of (p,q) Laplacian in a Ball. *Positivity*, **27**, Article No. 6. https://doi.org/10.1007/s11117-022-00959-1

[3] Das, U., Muthunayake, A. and Shivaji, R. (2020) Existence Results for a Class of (p,q) Laplacian Semipositone Boundary Value Problems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2022**, 1-7. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2020.1.88

[4] Sim, I. and Son, B. (2021) Positive Solutions to Classes of Infinite Semipositone (p,q)-Laplace Problems with Nonlinear Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **494**, Article ID: 124577. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124577

[5] Moussa, M., Moussa, A. and Mazan, H. (2021) Positive Solution for the (p,q)-Laplacian Systems by a New Version of Sub-Super Solution Method. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, **29**, 145-153. https://doi.org/10.1108/ajms-03-2021-0060

[6] Alreshidi, B., Hai, D.D. and Shivaji, R. (2023) On Sublinear Singular (p,q) Laplacian Problems. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **22**, 2773-2783. https://doi.org/10.3934/cpaa.2023087

[7] Hu, S. and Wang, H. (2006) Convex Solutions of Boundary Value Problem Arising from Monge-Ampère Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **14**, 705-720. https://doi.org/10.3934/dcds.2006.16.705

[8] Zhang, Z. (2018) Large Solutions to the Monge-Ampère Equations with Nonlinear Gradient Terms: Existence and Boundary Behavior. *Journal of Differential Equations*, **264**, 263-296. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.09.010

[9] Feng, M. (2022) A Class of Singular Coupled Systems of Superlinear Monge-Ampère Equations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **38**, 925-942. https://doi.org/10.1007/s10255-022-1024-5

[10] Feng, M. (2023) Eigenvalue problems for singular p-Monge-Ampère equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **528**, Article ID: 127538. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127538

[11] Wang, G., Yang, R. and Zhang, L. (2024) The Properties of a New Fractional *g*-Laplacian Monge-Ampère Operator and Its Applications. *Advances in Nonlinear Analysis*, **13**, Article ID: 20240031. https://doi.org/10.1515/anona-2024-0031

[12] Padhi, S., Graef, J.R. and Kanaujiya, A. (2019) Positive Solutions to Nonlinear Elliptic Equations Depending on a Parameter with Dirichlet Boundary Conditions. *Differential Equations and Dynamical Systems*, **31**, 319-336. https://doi.org/10.1007/s12591-019-00481-z