

西塔图上的帽子猜测游戏

王佳成, 邓爱平

东华大学数学与统计学院, 上海

收稿日期: 2026年2月27日; 录用日期: 2026年3月24日; 发布日期: 2026年3月31日

摘要

帽子猜测游戏是一类基于图结构的组合信息游戏。给定无向图 $G = (V, E)$, 其每个顶点 v 代表一位参与游戏的智者, 每位智者会被分配一顶从给定颜色集中选出的帽子, 可用颜色数量由函数 $h(v)$ 决定。在游戏规则下, 智者仅能观察到其所有相邻顶点上同伴的帽子颜色, 但无法得知自己的颜色。随后, 智者需依据预先约定的全局策略, 对其自身帽子的颜色做出猜测。如果存在一种策略, 使得在任意一种可能的整体帽子颜色分配状态下, 都至少有一位智者的猜测是正确的, 那么我们称该图上的帽子猜测游戏为获胜游戏。图 G 的帽子猜测数 $HG(G)$ 被定义为: 在每位智者仅允许猜测一次的情况下, 使得游戏能够保持获胜状态的最大全局可能颜色数 q (即对于所有顶点 v , 满足 $h(v) = q$)。确定各类特殊图的帽子猜测数是该领域的核心问题之一。本文主要研究西塔图(Theta graph)上的帽子猜测游戏。我们通过引入子游戏属性以及失败游戏的构造推导机制, 详细分析了帽子猜测策略在高维状态空间中的覆盖冗余与约束矛盾。研究证明, 当赋予所有顶点的帽子颜色数恒为4时, 西塔图上的帽子猜测游戏必然是一个失败游戏。综合已知基本图类的相关结论, 本文最终完全确定了任意西塔图 G 的帽子猜测数为 $HG(G) = 3$ 。

关键词

帽子猜测游戏, 西塔图, 帽子猜测数, 构造方法

Hat Guessing Games on Theta Graphs

Jiacheng Wang, Aiping Deng

School of Mathematics and Statistics, Donghua University, Shanghai

Received: February 27, 2026; accepted: March 23, 2026; published: March 31, 2026

Abstract

Hat guessing games are a class of combinatorial information games based on graph structures. Given an undirected graph $G = (V, E)$, each vertex represents a sage participating in the game. Each sage is assigned a hat chosen from a given set of colors, where the number of available colors is determined by a function $h(v)$. Under the rules of the game, a sage can only observe the hat colors

of all their neighboring peers but cannot see their own. Subsequently, the sages must make a guess about their own hat color based on a predetermined global strategy. If there exists a strategy such that under any possible global hat color assignment, at least one sage guesses correctly, the hat guessing game on the graph is called a winning game. The hat guessing number $HG(G)$ of a graph G is defined as the maximum global possible number of colors q (i.e., $h(v) = q$ for all vertices v) that allows the game to remain winning, given that each sage is allowed only one guess. Determining the hat guessing numbers for various specific graphs is one of the core problems in this field. In this paper, we focus on the hat guessing games on Theta graphs. By introducing the properties of subgames and the constructor mechanisms for losing games, we analyze in detail the covering redundancy and constraint contradictions of guessing strategies in high-dimensional state spaces. Our research proves that when the number of hat colors assigned to all vertices is constantly 4, the hat guessing game on a Theta graph is necessarily a losing game. Combining related conclusions from known basic graph classes, this paper finally determines that the hat guessing number for any Theta graph G is $HG(G) = 3$.

Keywords

Hat Guessing Game, Theta Graph, Hat Guessing Number, Constructor

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

帽子猜测游戏(Hat Guessing Games)源自于经典的组合数学与编码理论问题。该游戏的最初正式理论模型由 T. Ebert 提出[1]。在该经典模型的基础上, M. Farnik 首次给出了图 G 上“帽子猜测数” $HG(G)$ 的严格数学定义, 即在特定策略下能够保证至少一人猜测正确的最大可能帽子颜色数[2]。此后, 帽子猜测游戏得到了极大的推广。

在一般设定下, 图 $G=(V, E)$ 上的帽子猜测游戏被记为 $G=(G, h, g)$ 。其中 $h: V \rightarrow \mathbb{N}$ 表示每位智者 v 可能分配到的帽子颜色数。在游戏过程中, 智者仅能观察到其所有邻接顶点的帽子颜色。若存在一种预先制定的策略, 能在任意整体颜色分配下确保至少有一名智者的猜测是正确的, 则称该游戏为获胜游戏。当限定 $g(v) = *1$ 且 $h(v) = q$ 时, 使得游戏保持获胜的最大整数 q 即为帽子猜测数 $HG(G)$ 。

确定任意给定图的帽子猜测数是一项极具挑战性的任务, 目前学界仅在少数几类特定图上取得了确切的进展。例如, S. Butler 等人完全确定了树图 T 的帽子猜测数 $HG(T) = 2$ [3]; W. Szczechla 率先研究了圈图 C_n 上的三色帽子游戏[4]; 最近, J. Chizewer 等人进一步给出了圈图以及仙人掌图上的帽子猜测游戏获胜的完整刻画[5]。然而, 对于结构更为复杂的图类, 相关界限依然难以收紧。

本文的研究焦点是西塔图(Theta graph)。在图论中, 西塔图被定义为由两个互不相同的端点, 通过三条内部互不相交的路径连接而成的网络结构。作为一种非典型的复合环状拓扑, 西塔图的结构特征介于简单圈图与高度连通的网络之间, 其内部的多路径信息覆盖机制极为复杂。关于西塔图的帽子猜测数, 学界已有部分初步探索: A. Latyshev 及其团队此前的研究推导出西塔图的帽子猜测数下界至少为 3 [6]; 而 J. Chizewer 在其最新研究中指出, 西塔图的帽子猜测数上界至多为 4 [5]。

然而, 西塔图的精确帽子猜测数究竟是 3 还是 4, 至今仍是一个未解之谜。为了填补这一理论空白, 本文深入研究了西塔图上的帽子游戏状态空间。我们利用帽子游戏属性以及失败游戏的构造推导原理, 证明了当所有顶点的帽子颜色数均为 4 时, 西塔图上的帽子猜测游戏必然是一个失败游戏。结合已知的

下界结论, 本文最终精确确立了任意西塔图 G 的帽子猜测数 $HG(G)=3$ 。

2. 预备知识

2.1. 基本定义

本文讨论的西塔图为简单图, 是由两个互不相同的端点被三条不相交的路径连接而成的图形。

考虑一个定义在图 G 上的单次帽子猜测游戏 $\mathcal{G} = \langle G, h \rangle$ 。对于图 G 中的每位智者 $v_i \in V(G)$, 用 x_i 表示其头顶帽子的实际颜色, 显然 $x_i \in [h(v_i)]$ 。向量 $\chi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 构成了游戏 \mathcal{G} 的一个帽子颜色分配。

设 $N(v_i) = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 为 v_i 的邻接顶点集, 则智者 v_i 的猜测行为可表示为一个映射函数

$f_i(x_{u_1}, x_{u_2}, \dots, x_{u_k}) \in [h(v_i)]$ 。整个游戏 \mathcal{G} 的策略 f 即为所有智者猜测函数的集合, 记作

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ 。

如果在游戏 \mathcal{G} 中, 没有智者能根据某个帽子颜色分配 χ 猜对自己帽子的颜色(即对所有 i 均有 $f_i \neq x_i$), 那么这个分配 χ 就被称为策略 f 的一个错误的帽子颜色分配。要证明一个帽子猜测游戏是失败的, 只需证明对该游戏的任意策略, 均存在至少一个错误的帽子颜色分配。

帽子猜测游戏具有以下单调性质: 设 G' 是 G 的一个诱导子图, 且 $h' = h|_{V(G')}$, 称 $\mathcal{G}' = \langle G', h' \rangle$ 为 $\mathcal{G} = \langle G, h \rangle$ 的一个子游戏。如果一个子游戏 \mathcal{G}' 是获胜的, 那么原游戏 \mathcal{G} 一定也是获胜的; 反之, 若 \mathcal{G}' 失败, 则 \mathcal{G} 失败。此外, 考虑同一图 G 上的两个游戏 $\langle G, h \rangle$ 和 $\langle G, h' \rangle$, 若对任意的智者 $v \in V(G)$, 都有 $h(v) \geq h'(v)$, 那么当 $\langle G, h \rangle$ 是获胜游戏时, $\langle G, h' \rangle$ 也是获胜游戏。

2.2. 构造方法

引理 2.1 ([6], Corollary 2.1.1) 设 G 是一个几乎完全图, 它是由顶点为 v_1, v_2, \dots, v_n 的完全图 K_n 去掉边 $v_{n-1}v_n$ 得到的。如果在 G 上的帽子猜测游戏 $\mathcal{G} = \langle G, h \rangle$ 是获胜的, 那么

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_n} - \frac{1}{h_{n-1}h_n} \geq 1.$$

引理 2.2 ([7], Theorem 1.3) $HG(K_{3,3}) = 3$ 。

引理 2.3 ([5], Theorem 1.1) 设 C_n 是一个长度为 n 的圈。帽子猜测游戏 $\mathcal{G} = \langle C_n, h \rangle$ 获胜当且仅当该游戏至少满足以下条件之一:

- 1) $n=3$ 且 $\sum_{v_i \in V(G)} \frac{1}{h_i} \geq 1$;
- 2) $n=4$ 或 $3|n$ 且对于所有 $v_i \in V(G)$ 有 $h_i \leq 3$;
- 3) 在 \mathcal{G} 中存在一个帽子颜色为 $(2, 3, 3)$ 或 $(3, 2, 3)$ 的相邻顶点序列, 并且对于所有 $v_i \in V(G)$, $h_i \leq 4$;
- 4) \mathcal{G} 的一个子游戏是好路径游戏。

引理 2.4 ([8], Lemma 19) 西塔图 G 上的帽子猜测游戏 $\mathcal{G} = \langle G, \star 3, \star 1 \rangle$ 是获胜的。

设 $\mathcal{G}_1 = \langle G_1, h^1, g^1 \rangle$ 和 $\mathcal{G}_2 = \langle G_2, h^2, g^2 \rangle$ 是两个帽子猜测游戏, 其中 $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ 且 $V_1 \cap V_2 = \{v_0\}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ 。考虑一个在图 $G = \langle V, E \rangle$ 上进行的帽子猜测游戏 $\mathcal{G} = \langle G, h, g \rangle$, 其中 $V = V_1 \cup V_2$ 且 $E = E_1 \cup E_2$ 。设

$$(h(v), g(v)) = \begin{cases} (h^1(v)h^2(v), g^1(v)g^2(v)), & \text{if } v = v_0, \\ (h^1(v), g^1(v)), & \text{if } v \in V_1 \setminus \{v_0\}, \\ (h^2(v), g^2(v)), & \text{if } v \in V_2 \setminus \{v_0\}. \end{cases}$$

帽子猜测游戏 \mathcal{G} 被称为 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 的积, 并记为 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times_{v_0} \mathcal{G}_2$ 。

帽子猜测游戏 \mathcal{G} 被称为 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 的积, 并记为 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times_{v_0} \mathcal{G}_2$ 。

引理 2.5 设 G 为一个包含四个顶点 v_1, v_2, v_3, v_4 的图, 其中 $d(v_2) = d(v_3) = 2$, 且邻域满足 $N(v_2) = \{v_1, v_3\}$ 和 $N(v_3) = \{v_2, v_4\}$ 。考虑帽子猜测游戏 $\mathcal{G} = \langle G, h \rangle$, 其帽子颜色函数满足 $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 4$ 。令 $\mathcal{G}' = \langle G', h' \rangle$ 和 $\mathcal{G}'' = \langle G', h'' \rangle$ 为在 G 删除顶点 $\{v_2, v_3\}$ 后生成的诱导子图 G' 上进行的两类游戏, 其帽子颜色函数分别定义为:

$$h'(v) = \begin{cases} 3, & \text{当 } v = v_1 \text{ 或 } v = v_4 \text{ 时;} \\ h(v), & \text{其他情况.} \end{cases}$$

以及

$$h''(v) = \begin{cases} 4, & \text{当 } v = v_1 \text{ 时;} \\ 2, & \text{当 } v = v_4 \text{ 时;} \\ h(v), & \text{其他情况.} \end{cases}$$

若游戏 \mathcal{G}' 和 \mathcal{G}'' 均为失败游戏, 则原游戏 \mathcal{G} 必为失败游戏。

Proof. 令 f 为游戏 \mathcal{G} 的任意策略。由于 \mathcal{G}' 和 \mathcal{G}'' 是失败游戏, 因此存在 \mathcal{G}' 的一个错误分配和 \mathcal{G}'' 的一个错误分配。通过使用 \mathcal{G}' 和 \mathcal{G}'' 的错误分配, 我们为 \mathcal{G} 构造一个错误分配以完成证明。

对于顶点 v_2 的邻居 v_1, v_3 , 存在 16 种可能的颜色分配 $\chi(v_1, v_3)$, 而 v_2 本身有 4 种可能的颜色。对于每个颜色分配 $\chi(v_1, v_3)$, v_2 在 4 种可能颜色中恰好有一种能正确猜测, 其余三种都会错误猜测。因此存在 v_2 的一个颜色, 使得至少有 12 种 $\chi(v_1, v_3)$ 分配会导致 v_2 猜测错误。

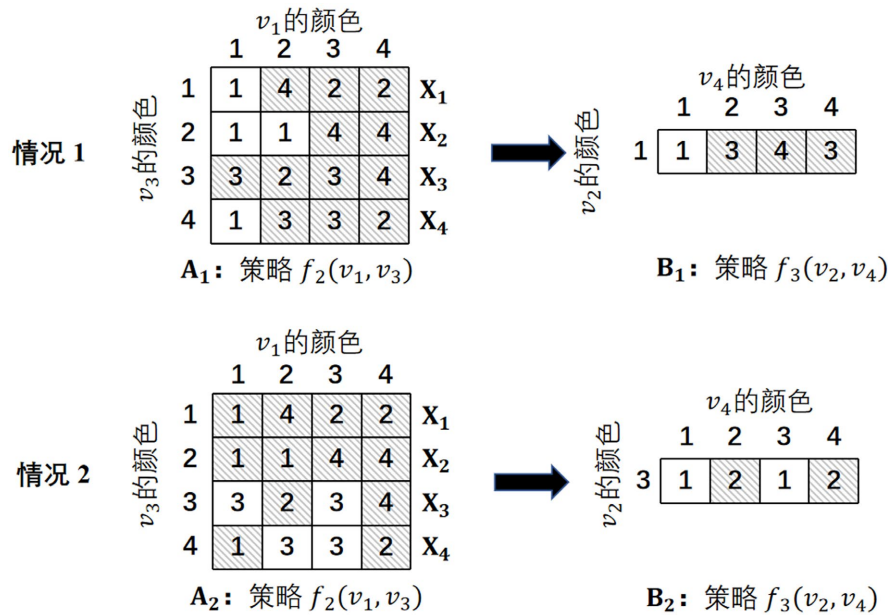
将 v_2 的颜色固定为 x_2 , 此时存在至少 12 种使 v_2 猜错的分配 $\chi(v_1, v_3)$ 。令集合 X 包含这些至少 12 种分配。考虑划分 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$, 其中 $X_i = \{\chi(v_1, v_3) \mid \chi(v_1, v_3) \in X, x_3 = i\}, i = 1, 2, 3, 4$, 满足 $0 \leq |X_i| \leq 4$ 。不失一般性, 假设 $|X_4| \leq |X_3| \leq |X_2| \leq |X_1|$ 。注意到 $|X| = |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| \geq 12$, 因此存在两种情形:

- 1) $|X_3| \geq 3$;
- 2) $|X_3| = 2$ 。

对于情形 1, 有 $|X_1| \geq |X_2| \geq |X_3| \geq 3$ 。当 v_3 的颜色属于 $\{1, 2, 3\}$ 时, v_1 至少有 3 种颜色选择可使猜测函数 $f_2(v_1, v_3)$ 出错。考虑 v_3 的猜测: 由于 v_2 的颜色已固定, 分配 $\chi(v_2, v_4)$ 有 4 种可能性。存在颜色 $\dot{x}_3 \in \{1, 2, 3\}$ 使得至少有 $4 - \lfloor \frac{4}{3} \rfloor = 3$ 种 x_4 颜色会导致 $f_3 \neq \dot{x}_3$ 。将 \dot{x}_3 赋给 v_3 , 并从导致 x_3 猜错的 3 种颜色中选择 v_4 的颜色。此时讨论将转移至失败游戏 \mathcal{G}' , 从而得到 \mathcal{G} 的错误分配。

对于情形 2, 有 $|X_1| = |X_2| = 4$ 且 $|X_3| = |X_4| = 2$ 。考虑 v_3 的猜测: 由于 v_2 的颜色已固定, 分配 $\chi(v_2, v_4)$ 有 4 种可能性。存在颜色 $\dot{x}_3 \in \{1, 2\}$ 使得至少有 $4 - \lfloor \frac{4}{2} \rfloor = 2$ 种 x_4 颜色会导致 $f_3 \neq \dot{x}_3$ 。将 \dot{x}_3 赋给 v_3 , 并从导致 x_3 猜错的 2 种颜色中选择 v_4 的颜色。此时讨论将转移至失败游戏 \mathcal{G}'' , 从而得到 \mathcal{G} 的错误分配。

以下是构造引理 2.5 证明中关于 $v_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 错误着色的若干示例。示例中的已知猜测如图所示。图片 $A_i(B_i)$ 中每个单元格内的数字表示猜测值 $f_2(v_1, v_3)(f_3(v_2, v_4))$, 其中 $i = 1, 2$ 。阴影单元格表示该猜测是错误的。



例 2.1 考虑图片 A_1 和 B_1 展示的示例。图片 A_1 表明，对于 v_2 的每种颜色，存在 4 种使得 v_2 猜测正确的分配 $\chi(v_1, v_3)$ ，其余 12 种则会导致 v_2 猜测错误。我们可以从四种颜色中任选一种固定给 v_2 。此处我们将颜色 1 固定给 v_2 。由于 $|X_i|$ 的非递增序列为 $(|X_3|, |X_1|, |X_4|, |X_2|) = (4, 3, 3, 2)$ ，这对应于引理 2.5 证明中的情况 1。对于 v_3 从 $\{1, 3, 4\}$ 中选取的每种颜色， v_1 至少有 3 种选择可使猜测 $f_2(v_1, v_3)$ 错误。图片 B_1 给出了当 v_2 颜色固定为 1 时 v_3 的猜测情况。我们选择 v_3 的颜色使得至少有 3 种 x_4 颜色能使 f_3 猜测错误。图片 B_1 显示当 v_3 颜色选择 1 或 4 时均满足条件，此处选择颜色 1。此时 v_4 任取 $\{2, 3, 4\}$ 中的颜色均可保证 v_3 猜测错误。因此我们得到错误分配 $\chi(v_1, v_2, v_3, v_4) = (x_1, 1, 1, x_4)$ ，其中 $x_1, x_4 \in \{2, 3, 4\}$ 。注意若选择颜色 4 给 v_3 ，则得到错误分配 $\chi(v_1, v_2, v_3, v_4) = (x_1, 1, 4, x_4)$ ，其中 $x_1 \in \{2, 3, 4\}$ 且 $x_4 \in \{1, 2, 4\}$ 。

例 2.2 考虑图片 A_2 和 B_2 展示的示例。此处 v_2 颜色固定为 3。序列 $(|X_1|, |X_2|, |X_3|, |X_4|) = (4, 4, 2, 2)$ 表明这对应于引理 2.5 证明中的情况 2。通过类似示例 2.1 的分析可得错误分配 $\chi(v_1, v_2, v_3, v_4) = (x_1, 3, 1, x_4)$ ，其中 $x_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ 且 $x_4 \in \{2, 4\}$ 。若在图片 B_2 中为 v_3 选择颜色 2，则得到错误分配 $\chi(v_1, v_2, v_3, v_4) = (x_1, 3, 2, x_4)$ ，其中 $x_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ 且 $x_4 \in \{1, 3\}$ 。

推论 2.1 设 G 为包含四个顶点 v_1, v_2, v_3, v_4 的图，其中 $d(v_2) = d(v_3) = 2$ ， $N(v_2) = \{v_1, v_3\}$ 且 $N(v_3) = \{v_2, v_4\}$ 。考虑帽子猜测游戏 $\mathcal{G} = \langle G, h \rangle$ ，其中 $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 4$ 。令 $\mathcal{G}' = \langle G', h' \rangle$ ，其中 G' 是 G 删去 $\{v_2, v_3\}$ 后的诱导子图，且

$$h'(v) = \begin{cases} 3, & \text{若 } v = v_1; \\ 2, & \text{若 } v = v_4; \\ h(v), & \text{其他情况.} \end{cases}$$

若游戏 \mathcal{G}' 为失败游戏，则游戏 \mathcal{G} 亦为失败游戏。

Proof. 由于 \mathcal{G}' 为失败游戏，引理 2.5 中的两个帽子猜测游戏均为失败游戏。根据引理 2.5，游戏 \mathcal{G} 失败。

3. 西塔图上的帽子猜测游戏

引理 3.1 设 G 是一个由顶点 v_0 和 v'_0 通过三条内部不相交的路径(长度分别为 1, 2 和 $n \geq 3$)连接而成的西塔图。那么游戏 $\mathcal{G} = \langle G, 4 \rangle$ 是失败的。

Proof. 记连接 v_0 和 v'_0 的三条路径分别为 $P_1=(v_0, v'_0)$, $P_2=(v_0, v_1, v'_0)$, 以及 $P_3=(v_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v'_0)$ 。在此游戏中, 所有顶点的帽子数量均为 4。全局总颜色分配状态数为 4^{n+2} 。

假设该游戏 $\langle G, * \rangle$ 是必胜的。这意味着存在一个策略 f , 使得对于所有可能的状态分配, 至少有一个顶点能猜对。

我们任意固定端点 v_0 和 v'_0 的颜色分别为 x_0 和 x'_0 (共有 $4 \times 4 = 16$ 种固定组合)。在此固定条件下, 我们分析 v_1 以及内部路径顶点 u_1, \dots, u_{n-1} 的子状态空间:

顶点 v_1 只能看到 v_0 和 v'_0 。它的猜测 $f_1(x_0, x'_0)$ 完全由已固定的端点决定。因此, 在 x_1 的 4 种可能颜色中, 恰好只有 1 种颜色(记为 w_1)能让 v_1 猜对。

我们现在将注意力限制在 $x_1 \neq w_1$ 的子空间中(x_1 共有 3 种这样的颜色)。在这个子空间里, v_1 必定猜错。为了保持必胜策略, 剩余的顶点 v_0, v'_0 以及 u_1, \dots, u_{n-1} 必须完美覆盖这个子空间中的所有错误状态。

对于固定的 $x_1 \neq w_1$, 考虑由内部顶点 (u_1, \dots, u_{n-1}) 构成的、大小为 4^{n-1} 的高维状态网格。

顶点 v_0 只能看到 x'_0, x_1 和 u_1 。它的猜测 $f_0(x'_0, x_1, u_1)$ 仅依赖于 u_1 (完全不受 u_2, \dots, u_{n-1} 的影响)。令 A 为使得 v_0 猜对(即 $f_0 = x_0$)的 u_1 颜色集合, 并设 $a = |A|$ 。那么 v_0 的正确猜测在这个高维网格中, 恰好覆盖了 $a \times 4^{n-2}$ 个状态(即沿其他维度拉伸出的超平面)。

同理, 顶点 v'_0 只能看到 x_0, x_1 和 u_{n-1} 。它的猜测仅依赖于 u_{n-1} 。令 B 为使得 v'_0 猜对的 u_{n-1} 颜色集合, 设 $b = |B|$ 。 v'_0 的正确猜测覆盖了 $b \times 4^{n-2}$ 个状态。

未被 v_0 和 v'_0 覆盖的状态, 形成了一个巨大的未覆盖集合, 记为 \mathcal{S}_0 。该集合满足 $u_1 \notin A$ 且 $u_{n-1} \notin B$ 。这个集合的大小(包含的状态总数)恰好是:

$$|\mathcal{S}_0| = (4-a)(4-b) \times 4^{n-3}$$

因为 v_1, v_0 和 v'_0 在 \mathcal{S}_0 中全部猜错, 这个集合的巨大体积必须完全由内部顶点 u_1, \dots, u_{n-1} 来覆盖。

注意, u_1, \dots, u_{n-1} 构成了一条路径 P_{n-1} 。在帽子猜谜游戏中, 路径上顶点 u_i 的猜测函数仅依赖于它的两个直接邻居 u_{i-1} 和 u_{i+1} (这构成了局部的一维降维约束)。

为了让 u_1, \dots, u_{n-1} 能够完美覆盖高维集合 \mathcal{S}_0 而不留下任何盲区, 它们在 \mathcal{S}_0 内部的理论最大覆盖量之和, 必须大于或等于 \mathcal{S}_0 的体积。

通过计算每个顶点函数在 \mathcal{S}_0 中的最大可能覆盖点数(即高维投影容量):

- 1) u_1 依赖 u_2 , 它在集合中最多能覆盖 $(4-b) \times 4^{n-3}$ 个状态。
- 2) u_{n-1} 依赖 u_{n-2} , 最多覆盖 $(4-a) \times 4^{n-3}$ 个状态。
- 3) 任意中间顶点 u_i ($1 < i < n-1$) 依赖 u_{i-1}, u_{i+1} , 最多覆盖 $(4-a)(4-b) \times 4^{n-4}$ 个状态(共有 $n-3$ 个这样的中间顶点)。

我们将这些理论最大覆盖量相加, 必须满足不等式:

$$4(4-b) \cdot 4^{n-4} + 4(4-a) \cdot 4^{n-4} + (n-3)(4-a)(4-b) \cdot 4^{n-4} \geq 4(4-a)(4-b) \cdot 4^{n-4}$$

两边同时约去 4^{n-4} , 得到核心约束方程:

$$4(4-b) + 4(4-a) + (n-3)(4-a)(4-b) \geq 4(4-a)(4-b)$$

(注: 当 $n=3$ 时, 中间项 $(n-3)$ 消失, 完美退化为 $(4-a)(4-b) \leq (4-a) + (4-b)$)

令 $k = 4-a$ 且 $l = 4-b$, 上述不等式化简为:

$$4k + 4l + (n-3)kl \geq 4kl$$

$$(7-n)kl \leq 4(k+l)$$

因为 $k, l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 对于任意的 $n \geq 3$, 上述几何不等式强行要求覆盖冗余参数 a 和 b 必须取极大的值(当 $n \geq 7$ 时, 等式左边甚至 ≤ 0 , 除非 $k = 0$ 或 $l = 0$, 这意味着 $a = 4$ 或 $b = 4$)。

将这 4 种可能的 x_i 对应的 $(a+b)$ 需求量累加起来, 所需的理论覆盖参数总和 $\Sigma(a+b)$, 远远超出了 v_0 和 v'_0 在全局状态空间中能够提供的实际容量上限(即在所有 16 种端点固定情况下的全空间容量 $\Sigma a \leq 64$ 和 $\Sigma b \leq 64$)。

本质上, 这条一维路径 P_{n-1} 上的局部策略函数, 在高维状态网格中必然存在巨大的重叠(交集), 导致其实际联合覆盖大小远低于代数和。因此, 它们绝对无法完美填满这个高维集合 \mathcal{S}_0 。

这个全局的结构性矛盾证明了原假设不成立。因此, 西塔图上的游戏 $\langle G, * \rangle$ 必然是失败的。

定理 3.1 对于一个西塔图 G , 其帽子猜测数 $HG(G) = 3$ 。

Proof. 设 G 是一个西塔图。为了得到 $HG(G) \leq 3$, 我们设 $h = *4$ 并证明帽子猜测游戏 $\mathcal{G} = \langle G, h \rangle$ 是失败的。设 v_0 和 v'_0 是 G 中两个度数为 3 的顶点, P_1, P_2 和 P_3 是连接 v_0 和 v'_0 的三条路径。

如果三条路径中有一条长度为 1 且另外两条长度为 2, 那么图 G 是一个由 K_4 得到的几乎完全图。根据引理 2.1, 帽子猜测游戏 \mathcal{G} 是失败的。

如果三条路径长度分别为 1, 2, $n \geq 3$, 根据引理 3.1, 帽子猜测游戏 \mathcal{G} 是失败的。

如果三条路径的长度都为 2, 那么图 $G = K_{2,3}$, 它是 $K_{3,3}$ 的一个子图。注意到 $K_{2,2} = C_4$ 是 G 的一个子图。根据引理 2.2 和定理 2.3, 以及 $HG(K_{2,2}) \leq HG(G) \leq HG(K_{3,3})$, 我们有 $HG(G) = 3$ 。因此, 帽子猜测游戏 \mathcal{G} 是失败的。

对于其他情况, 意味着至少存在一条路径的长度不小于 3。不失一般性, 假设 P_1 的长度至少为 3。考虑游戏 $\mathcal{G}' = \langle G', h' \rangle$, 其中 G' 是由 $P_2 \cup P_3$ 诱导的 G 的子图, 并且

$$h'(v) = \begin{cases} 3, & \text{如果 } v = v_0, \\ 2, & \text{如果 } v = v'_0, \\ 4, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

注意到 G' 是一个圈。根据引理 2.3, 游戏 \mathcal{G}' 是不可获胜的。根据推论 2.1, 游戏 \mathcal{G} 也是不可获胜的。

因此, 我们有 $HG(G) \leq 3$ 。将此结论与引理 2.4 相结合, 有 $HG(G) = 3$ 。

参考文献

- [1] Ebert, T. (1998) Applications of Recursive Operators to Randomness and Complexity. PhD Thesis, University of California.
- [2] Farnik, M. (2015) A Hat Guessing Game. PhD Thesis, Jagiellonian University.
- [3] Butler, S., Hajiaghayi, M.T., Kleinberg, R.D. and Leighton, T. (2008) Hat Guessing Games. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **22**, 592-605. <https://doi.org/10.1137/060652774>
- [4] Szczechla, W. (2017) The Three Colour Hat Guessing Game on Cycle Graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **24**, P1.37. <https://doi.org/10.37236/5135>
- [5] Chizewer, J., McInnis, I.M.J., Sohrabi, M. and Kaistha, S. (2025) The Hat Guessing Game on Cactus Graphs and Cycles. *Discrete Mathematics*, **348**, Article ID: 114272. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.114272>
- [6] Kokhas, K. and Latyshev, A. (2021) Cliques and Constructors in “Hats” Game. I. *Journal of Mathematical Sciences*, **255**, 39-57. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05348-9>
- [7] He, X., Ido, Y. and Przybocki, B. (2022) Hat Guessing on Books and Windmills. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **29**, P1.12. <https://doi.org/10.37236/10098>
- [8] Kokhas, K. and Latyshev, A. (2018) For Which Graphs the Sages Can Guess Correctly the Color of at Least One Hat. *Journal of Mathematical Sciences*, **236**, 503-520. <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4128-y>