

# 两类Pretzel链环的着色Jones多项式

刘 娜

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2026年2月28日; 录用日期: 2026年4月10日; 发布日期: 2026年4月20日

## 摘 要

$(-2,3,2p+3)$ -pretzel 纽结和  $(-2,3,2p)$ -pretzel 链环为低维拓扑的理论研究提供了两类重要例子。例如,  $(-2,3,7)$ -pretzel 纽结与  $5_2$  结具有相同的双曲体积,  $(-2,3,8)$ -pretzel 链环和 Whitehead 链环具有相同的双曲体积等。本文主要利用 Kauffman bracket skein 理论计算了  $(-2,3,2p+3)$ -pretzel 纽结和  $(-2,3,2p)$ -pretzel 链环的着色 Jones 多项式的显示公式, 这些公式对于量子拓扑中 AJ 猜想、体积猜想等课题的研究发挥作用。

## 关键词

纽结, Skein 理论, 着色 Jones 多项式

# The Colored Jones Polynomial of Two Types of Pretzel Links

Na Liu

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: February 28, 2026; accepted: April 10, 2026; published: April 20, 2026

## Abstract

The  $(-2,3,2p+3)$ -pretzel knots and the  $(-2,3,2p)$ -pretzel links provide two important classes of examples for theoretical studies in low-dimensional topology. For instance, the  $(-2,3,7)$ -pretzel knot shares the same hyperbolic volume as the  $5_2$  knot, and the  $(-2,3,8)$ -pretzel link shares the same hyperbolic volume as the Whitehead link. In this paper, we employ the Kauffman bracket skein theory to derive explicit formulas for the colored Jones polynomials of the  $(-2,3,2p+3)$ -pretzel knots and the  $(-2,3,2p)$ -pretzel links. These formulas are expected to contribute to research on topics in quantum topology, such as the AJ Conjecture and the Volume Conjecture.

## Keywords

Knot, Skein Theory, The Colored Jones Polynomial



## 1. 引言

纽结理论面对的主要问题之一是如何区分不同的结。寻找易于计算并且区分能力强的同痕不变量在纽结理论的研究中占据比较大的比重。多项式不变量是一类最常见纽结不变量，包括 Alexander 多项式、Kauffman 多项式、Jones 多项式以及 HOMFLY-PT 多项式等。Jones 多项式于 1984 年被发现[1]，它在低维拓扑中是一个令人惊喜的成果，刺激了许多新的发展，开辟了纽结理论与数学和理论物理的许多其他分支之间新的联系[2]。Jones 多项式被发现后不久，许多纽结和三维流形的量子不变量的推广被发现。从量子群的表示理论出发，能够定义相应的量子不变量[3]。特别地，从量子群  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  出发，定义出着色 Jones 多项式。着色 Jones 多项式的计算涉及到复杂的代数和解析技术，研究者们已经开发了多种方法来计算这些多项式，其中 Kauffman bracket skein 理论提供了一种直观的组合作为算法来计算着色 Jones 多项式[4] [5]。着色 Jones 多项式的性质及其与经典拓扑不变量的关系是研究的热点。例如 Melvin-Morton 猜想[6]将着色 Jones 多项式与 Alexander 多项式联系起来；AJ 猜想[7]将有色 Jones 多项式与 A-多项式联系起来；斜率猜想[8]则将纽结的着色 Jones 多项式对应的 Jones 斜率与纽结补空间中的边界斜率联系起来；体积猜想[9] [10]表明着色 Jones 多项式和结补的双曲几何之间有很深的联系。

本文的主要目标是利用经典 Kauffman bracket skein 理论从纽结图出发计算两类 Pretzel 链环的着色 Jones 多项式的显式表达式。论文大纲如下：第 2 节主要回顾着色 Jones 多项式与 Skein 理论；第 3 节推导两类 Pretzel 链环着色 Jones 多项式的显式公式并利用数学软件计算其规范着色 Jones 多项式序列；第 4 节则是对本文研究内容的思考和后续研究内容的展望。

## 2. 预备知识

这一节简要回顾着色 Jones 多项式的定义以及 skein 理论。

### 2.1. 着色 Jones 多项式

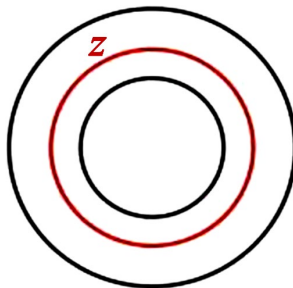
我们回顾链环的着色 Jones 多项式，参考[4]。

记  $K(S^1 \times I)$  为圆环  $S^1 \times I$  的 Kauffman bracket skein 模。 $\{e_i\}_{i \geq 0}$  为  $K(S^1 \times I)$  的一族 skein 元素，它由以下递归方式定义

$$e_0 = 1, \quad e_1 = z$$

$$i \geq 2 \text{ 时}, \quad e_i = ze_{i-1} - e_{i-2}$$

其中  $z$  为  $S^1 \times I$  的中心圆：



给定一个具有  $m$  个分支  $K_1, \dots, K_m$  的链环  $\mathcal{L}$  以及  $m$  个 skein 元素  $e_{n_1}, \dots, e_{n_m} \in K(S^1 \times I)$ 。设  $D_{\mathcal{L}}$  为  $\mathcal{L}$  的链环图，则我们定义由  $e_{n_1}, \dots, e_{n_m}$  对  $D_{\mathcal{L}}$  进行的装饰，记为  $D_{\mathcal{L}}(e_{n_1}, \dots, e_{n_m})$ ，该装饰通过将每个分支图  $D_{K_i}$  用  $e_{n_i}$  装饰而得到。

定义  $D_{\mathcal{L}}$  的着色考夫曼括号：

$$\langle D_{\mathcal{L}} \rangle_{n_1, \dots, n_m} = \langle D_{\mathcal{L}}(e_{n_1-1}, \dots, e_{n_m-1}) \rangle$$

**定义 1** 对于有向结  $K$ ，其有向图  $D_K$ ，第  $n$  个着色 Jones 多项式  $\bar{J}_n(K; q)$  为：

$$\bar{J}_n(K; q) = \mu_{n-1}^{-w(D_K)} \langle D_K \rangle_n \Big|_{q^2=A^{-2}} = \mu_{n-1}^{-w(D_K)} \langle D_K(e_{n-1}) \rangle \Big|_{q^2=A^{-2}}$$

其中  $\mu(n) = (-1)^n A^{n^2+2n}$ ， $e_n \in K(S^1 \times I) = \mathbb{Z}[A, A^{-1}][z]$ 。

**定义 2** 对于具有  $m$  个分支  $K_1, \dots, K_m$  的有向链环  $\mathcal{L}$ ，其链环图  $D_{\mathcal{L}}$ ， $\mathcal{L}$  的  $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ -着色 Jones 多项式  $\bar{J}_{n_1, n_2, \dots, n_m}(\mathcal{L}; q)$  定义为：

$$\bar{J}_{n_1, \dots, n_m}(\mathcal{L}; q) = \left( \prod_{i=1}^m \mu_{n_i-1}^{-w(D_{K_i})} \right) \langle D_{\mathcal{L}} \rangle_{n_1, \dots, n_m} \Big|_{q^2=A^{-2}}$$

特殊地，假设链环的所有分支由相同的颜色着色，那么对于具有  $m$  个分支  $K_1, \dots, K_m$  的有向链环  $\mathcal{L}$ ，其链环图  $D_{\mathcal{L}}$ ， $\mathcal{L}$  的  $n$ -着色 Jones 多项式  $\bar{J}_n(\mathcal{L}; q)$  定义为：

$$\bar{J}_n(\mathcal{L}; q) = \left( \prod_{i=1}^m \mu_{n-1}^{-w(D_{K_i})} \right) \langle D_{\mathcal{L}} \rangle_n \Big|_{q^2=A^{-2}}$$

$\mathcal{L}$  的规范化第  $n$  个着色 Jones 多项式定义为：

$$J_n(\mathcal{L}; q) = \frac{\bar{J}_n(\mathcal{L}; q)}{\bar{J}_n(\bigcirc; q)}$$

其中

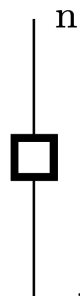
$$\bar{J}_n(\bigcirc; q) = (-1)^{n-1} \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$$

## 2.2. Skein 理论

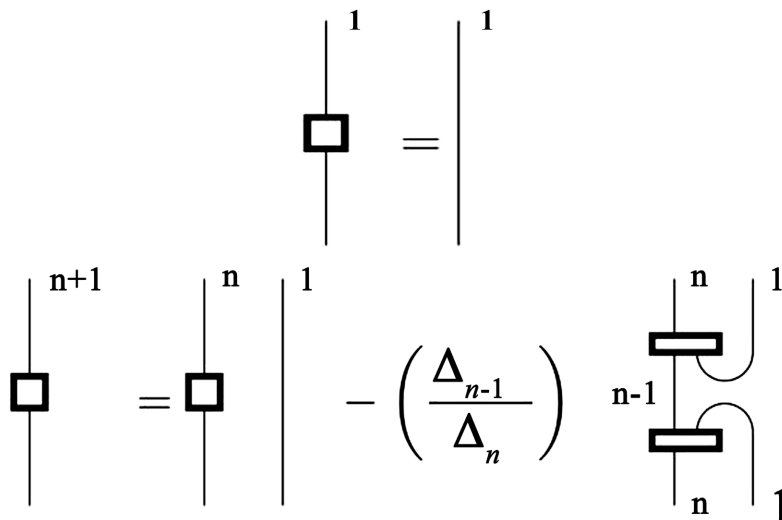
令

$$\Delta_n := (-1)^n \frac{A^{2(n+1)} - A^{-2(n+1)}}{A^2 - A^{-2}},$$

$n$  次 Jones-Wenzl 幂等元记为



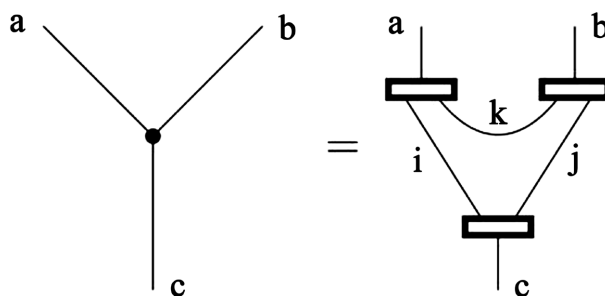
它由如下方式递归定义：



我们说自然数的三元组  $(a, b, c)$  是 admissible, 如果：

- 1)  $a + b + c$  是偶数；
- 2) 三角不等式成立： $|a - b| \leq c \leq a + b$ 。

对于一个 admissible 三元组  $(a, b, c)$ , 三价顶点由下式定义：



其中  $i, j, k$  是三价顶点  $(a, b, c)$  的内部着色, 满足  $i + k = a, j + k = b, i + j = c$ 。

在三价图中, 我们默认其每一条边都由 Jones-Wenzl 幂等元构成。关于三价图有如下定理成立,

**定理 1 [5]** 如果自然数的三元组  $(a, b, c)$  是 admissible, 则下式成立：

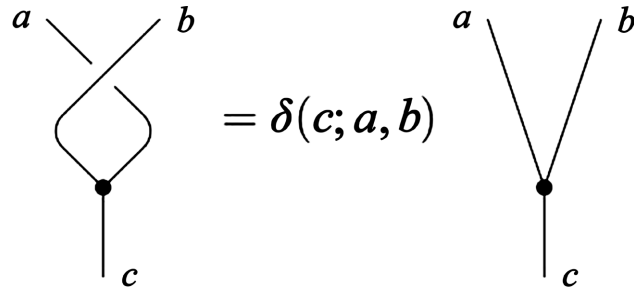
$$\left( \begin{array}{c} a \\ \square \\ b \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} b \\ \square \\ a \end{array} \right) = \sum_c \frac{\Delta_c}{\langle a, b, c \rangle} \left( \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \\ c \\ \bullet \\ a \quad b \end{array} \right)$$

其中  $\langle a, b, c \rangle$  为 Trihedron 系数, 如果  $(a, b, c)$  是 admissible, 设  $i, j, k$  是三价顶点  $(a, b, c)$  的内部着色, 那么

$$\langle a, b, c \rangle = (-1)^{i+j+k} \frac{[i]![j]![k]![i+j+k+1]!}{[i+j]![j+k]![i+k]!},$$

其中  $i = \frac{b+c-a}{2}, j = \frac{a+c-b}{2}, k = \frac{a+b-c}{2}$ 。

定理 2 [5]

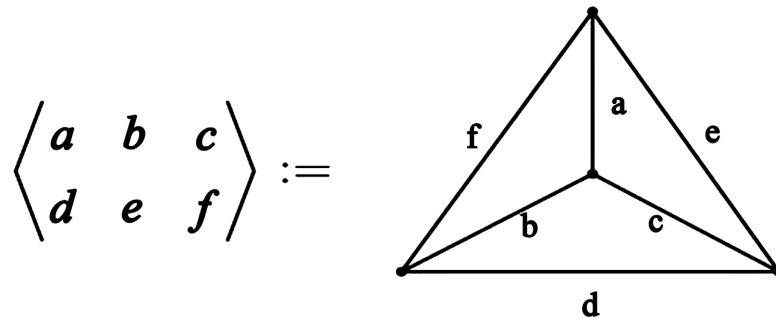


其中  $\delta(c; a, b)$  为 Half-twist 系数，如果  $(a, b, c)$  是 admissible，设  $i, j, k$  是三价顶点  $(a, b, c)$  的内部着色，那么

$$\delta(c; a, b) = (-1)^k A^{i-j-k(i+j+k+2)},$$

其中  $i = \frac{b+c-a}{2}, j = \frac{a+c-b}{2}, k = \frac{a+b-c}{2}$ 。

除此之外，还有一个关键系数 Tetrahedron 系数，



定理 3 [5] 设  $a, b, c, d, e, f$  是使得  $(a, b, c), (b, d, f), (c, d, e)$  和  $(a, e, f)$  是 admissible 的着色，那么

$$\left\langle \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix} \right\rangle = \frac{\prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^4 [T_i - S_j]!}{[a]![b]![c]![d]![e]![f]!} \sum_{z=\max S_j}^{\min T_i} \frac{(-1)^z [z+1]!}{\prod_{i=1}^3 [T_i - z]! \prod_{j=1}^4 [z - S_j]!},$$

其中

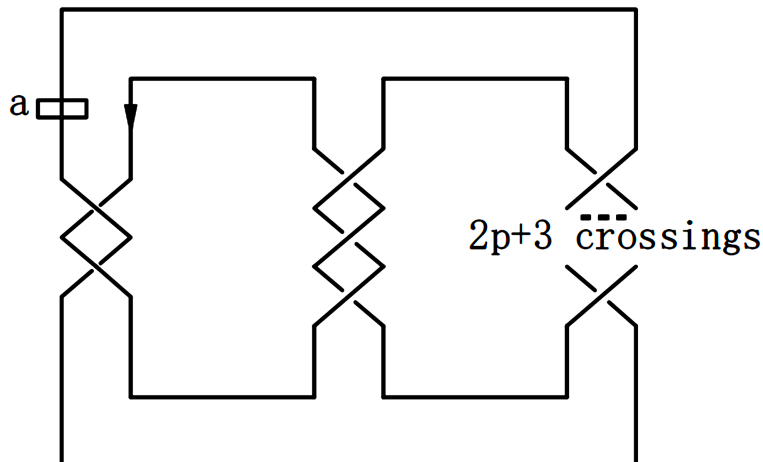
$$T_1 = \frac{1}{2}(a+b+d+e) \quad T_2 = \frac{1}{2}(a+c+d+f) \quad T_3 = \frac{1}{2}(b+c+e+f)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad S_2 = \frac{1}{2}(c+d+e) \quad S_3 = \frac{1}{2}(a+e+f) \quad S_4 = \frac{1}{2}(b+d+f).$$

### 3. Pretzel 链环的着色 Jones 多项式

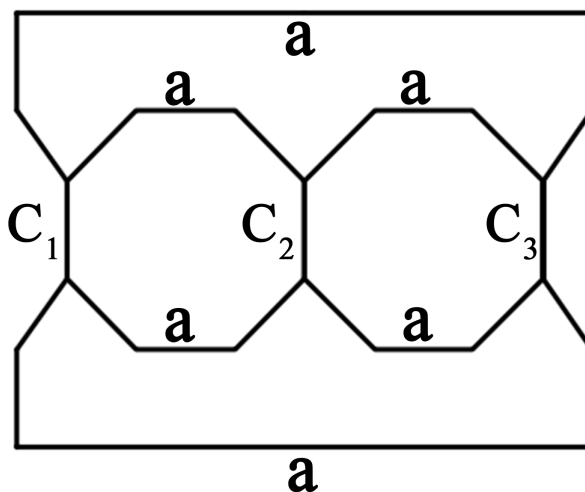
#### 3.1. $(-2, 3, 2p+3)$ -pretzel 纽结

现在我们考虑有向的  $(-2, 3, 2p+3)$ -pretzel 纽结  $K$ ，其有向图如图 1 所示。



**Figure 1.** The  $(-2,3,2p+3)$ -pretzel knot  
**图 1.**  $(-2,3,2p+3)$ -pretzel 纽结

我们首先利用 Kauffman bracket skein 理论计算  $\langle D_K \rangle_{a+1}$  (图 2)。



**Figure 2.** Intermediate step diagram (M)  
**图 2.** 中间步骤图(M)

应用定理 1, 2, 得,

$$\langle D_K \rangle_{a+1} = \left( \sum_{c_1} \delta(a, a, c_1)^{-2} \frac{\langle c_1 \rangle}{\langle a, a, c_1 \rangle} \right) \left( \sum_{c_2} \delta(a, a, c_2)^3 \frac{\langle c_2 \rangle}{\langle a, a, c_2 \rangle} \right) \left( \sum_{c_3} \delta(a, a, c_3)^{2p+3} \frac{\langle c_3 \rangle}{\langle a, a, c_3 \rangle} \right) \langle M \rangle$$

再应用定理 3 得,

$$\langle M \rangle = \frac{\left\langle \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a & a & a \end{matrix} \right\rangle^2}{\langle c_1, c_2, c_3 \rangle}$$

于是化简可得

$$\langle D_K \rangle_{a+1} = \sum_{c_1, c_2, c_3} \delta(a, a, c_1)^{-2} \delta(a, a, c_2)^3 \delta(a, a, c_3)^{2p+3} \frac{\langle c_1 \rangle}{\langle a, a, c_1 \rangle} \frac{\langle c_2 \rangle}{\langle a, a, c_2 \rangle} \frac{\langle c_3 \rangle}{\langle a, a, c_3 \rangle} \frac{\langle c_1 \ c_2 \ c_3 \rangle}{\langle a \ a \ a \rangle} \frac{1}{\langle c_1, c_2, c_3 \rangle}$$

即,

$$\langle D_K \rangle_{a+1} = \sum_{c_1, c_2, c_3} (-1)^{a - \frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3} A^{-(2p+4)a^2 - 2(2p+4)a - c_1^2 - 2c_1 + \frac{3}{2}c_2^2 + 3c_2 + \frac{2p+3}{2}c_3^2 + (2p+3)c_3} \times R \tag{1}$$

其中, 由 admissible 条件可知, 上述等式中求和号下  $c_1, c_2, c_3$  的取值为 0 到  $2a$  之间的偶数, 以下类似。自然数  $n$  的量子整数规定如下:

$$[n] = \frac{q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$$

根据定义 1, 我们得到  $(-2, 3, 2p+3)$ -pretzel 纽结规范化的着色 Jones 多项式。

$$J_{a+1}(K; q) = \frac{\left( (-1)^a A^{a^2+2a} \right)^{-(2p+8)} \langle D_K(e_a) \rangle}{\bar{J}_{a+1}(O; q)} \Bigg|_{q^{\frac{1}{2}}=A^{-2}} \tag{2}$$

$$= \sum_{c_1, c_2, c_3} (-1)^{\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{2}c_3} A^{-(4p+12)a^2 - 2(4p+12)a - c_1^2 - 2c_1 + \frac{3}{2}c_2^2 + 3c_2 + \frac{2p+3}{2}c_3^2 + (2p+3)c_3} R \Bigg|_{q^{\frac{1}{2}}=A^{-2}}$$

其中

$$R = \prod_{i=1}^{i=3} \frac{[c_i + 1] \left[ a - \frac{c_i}{2} \right]! \left( \left[ \frac{c_i}{2} \right]! \right)^2 \left[ \frac{c_1 + c_2 - c_3}{2} \right]! \left[ \frac{c_1 + c_3 - c_2}{2} \right]! \left[ \frac{c_2 + c_3 - c_1}{2} \right]!}{\left[ a + \frac{c_i}{2} + 1 \right]! \left[ \frac{c_1 + c_2 + c_3}{2} + 1 \right]!} \left( \sum_{z=\max S_j}^{\min T_i} \frac{(-1)^z [z+1]!}{\prod_{i=1}^3 [T_i - z]! \prod_{j=1}^4 [z - S_j]!} \right)^2$$

公式(2)中, 令  $c_i = 2k_i$ , 进一步化简得到

$$J_n(K; q) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{n-1} (-1)^{k_2+k_3} q^{(p+3)n^2 - (p+3)(k_1+1) - \frac{3}{2}k_2(k_2+1) - \frac{2p+3}{2}k_3(k_3+1)}$$

$$\times \prod_{i=1}^{i=3} \frac{[2k_i + 1][n - 1 - k_i]! \left( [k_i]! \right)^2 [k_1 + k_2 - k_3]! [k_1 + k_3 - k_2]! [k_2 + k_3 - k_1]!}{[n][n + k_i]! [k_1 + k_2 + k_3 + 1]!} \tag{3}$$

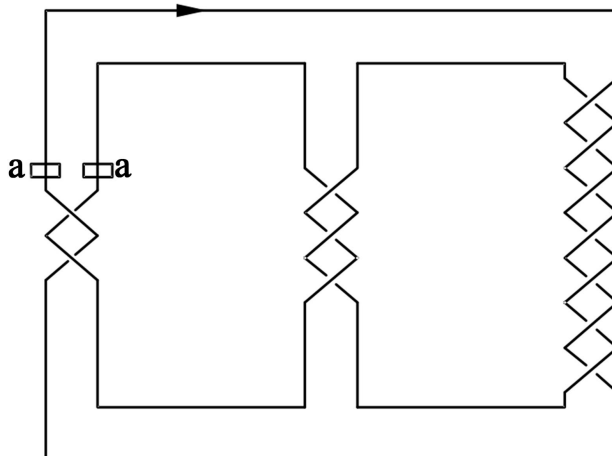
$$\times \left( \sum_{z=\max S_j}^{\min T_i} \frac{(-1)^z [z+1]!}{\prod_{i=1}^3 [T_i - z]! \prod_{j=1}^4 [z - S_j]!} \right)^2$$

其中

$$T_1 = n - 1 + k_2 + k_3 \quad T_2 = n - 1 + k_1 + k_3 \quad T_3 = n - 1 + k_1 + k_2$$

$$S_1 = k_1 + k_2 + k_3 \quad S_2 = n - 1 + k_1 \quad S_3 = n - 1 + k_2 \quad S_4 = n - 1 + k_3$$

下面, 我们看一个具体的例子。令  $p = 2$ , 我们考虑有向的  $(-2, 3, 7)$ -pretzel 纽结, 其有向图  $D_K$  如图 3 所示。



**Figure 3.** The  $(-2,3,7)$ -pretzel knot  
**图 3.**  $(-2,3,7)$ -pretzel 纽结

将  $p = 2$  代入公式(3)得到 $(-2,3,7)$ -pretzel 纽结规范化的着色 Jones 多项式为

$$\begin{aligned}
 & J_n(K; q) \\
 &= \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{n-1} (-1)^{k_2+k_3} q^{5n^2-5+k_1(k_1+1)-\frac{3}{2}k_2(k_2+1)-\frac{7}{2}k_3(k_3+1)} \\
 & \times \frac{\prod_{i=1}^{i=3} [2k_i + 1][n - 1 - k_i]!([k_i]!)^2 [k_1 + k_2 - k_3]![k_1 + k_3 - k_2]![k_2 + k_3 - k_1]!}{[n][n + k_i]![k_1 + k_2 + k_3 + 1]!} \\
 & \times \left( \sum_{z=\max S_j}^{\min T_i} \frac{(-1)^z [z + 1]!}{\prod_{i=1}^3 [T_i - z]! \prod_{j=1}^4 [z - S_j]!} \right)^2
 \end{aligned} \tag{4}$$

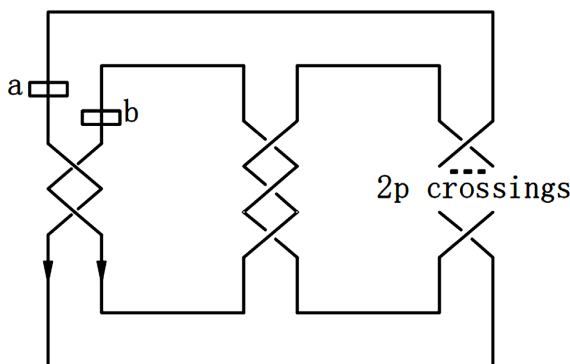
其中

$$\begin{aligned}
 T_1 &= n - 1 + k_2 + k_3 & T_2 &= n - 1 + k_1 + k_3 & T_3 &= n - 1 + k_1 + k_2 \\
 S_1 &= k_1 + k_2 + k_3 & S_2 &= n - 1 + k_1 & S_3 &= n - 1 + k_2 & S_4 &= n - 1 + k_3.
 \end{aligned}$$

通过 maple, 可以使用公式(4)显式计算序列  $J_n(K, q)$ , 代码参见[11]。这样计算得到的结果与[12]的结果一致, 详见[11]。

### 3.2. $(-2,3,2p)$ -pretzel 链环

现在我们考虑有向的 $(-2,3,2p)$ -pretzel 链环  $\mathcal{L}$ , 其有向图  $D_{\mathcal{L}}$  如所示。



我们首先利用 Kauffman bracket skein 理论计算  $\langle D_{\mathcal{L}} \rangle_{a+1,b+1}$ 。

与上面类似，应用定理 1~3 并且把 half-twist 系数， trihedron 系数和 tetrahedron 系数替换成量子整数，可以得到

$$\begin{aligned} \langle D_{\mathcal{L}} \rangle_{a+1,b+1} &= \sum_{c_1, c_2, c_3} \delta(a, b, c_1)^{-2} \delta(b, b, c_2)^3 \delta(a, b, c_3)^{2p} \frac{\langle c_1 \rangle}{\langle a, b, c_1 \rangle} \frac{\langle c_2 \rangle}{\langle b, b, c_2 \rangle} \frac{\langle c_3 \rangle}{\langle a, b, c_3 \rangle} \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b & a & b \end{vmatrix}^2}{\langle c_1, c_2, c_3 \rangle} \\ &= \sum_{c_1, c_2, c_3} (-1)^{b-a-\frac{3}{2}c_2} A^{(1-p)a^2+2(1-p)a-(p+2)b^2-2(p+2)b-c_1^2-2c_1+\frac{3}{2}c_2^2+3c_2+pc_3^2+2pc_3} \times G \end{aligned} \quad (5)$$

利用定义 2，我们得到  $(-2,3,2p)$ -pretzel 链环未规范化的着色 Jones 多项式

$$\begin{aligned} \bar{J}_{a+1,b+1}(\mathcal{L}; q) &= \left( (-1)^b A^{b^2+2b} \right)^{-3} \langle D_{\mathcal{L}} \rangle_{a+1,b+1} \Big|_{\frac{1}{q^2}=A^{-2}} \\ &= \sum_{c_1, c_2, c_3} (-1)^{-a-\frac{3}{2}c_2} A^{(1-p)a^2+2(1-p)a-(p+5)b^2-2(p+5)b-c_1^2-2c_1+\frac{3}{2}c_2^2+3c_2+pc_3^2+2pc_3} G \Big|_{\frac{1}{q^2}=A^{-2}} \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} G &= \frac{[c_1+1][c_2+1][c_3+1] \left[ \frac{a+b-c_1}{2} \right]! \left[ \frac{2b-c_2}{2} \right]! \left[ \frac{a+b-c_3}{2} \right]! \left[ \frac{c_1+a-b}{2} \right]! \left( \left[ \frac{c_2}{2} \right]! \right)^2}{\left[ \frac{a+b+c_1+1}{2} \right]! \left[ \frac{2b+c_2+1}{2} \right]! \left[ \frac{a+b+c_3+1}{2} \right]!} \\ &\times \frac{\left[ \frac{c_3+a-b}{2} \right]! \left[ \frac{c_1+b-a}{2} \right]! \left[ \frac{c_3+b-a}{2} \right]! \left[ \frac{c_1+c_2-c_3}{2} \right]! \left[ \frac{c_1+c_3-c_2}{2} \right]! \left[ \frac{c_2+c_3-c_1}{2} \right]!}{\left[ \frac{c_1+c_2+c_3+1}{2} \right]!} \\ &\times \left( \sum_{z=\max S_j}^{\min T_i} \frac{(-1)^z [z+1]!}{\prod_{i=1}^3 [T_i-z]! \prod_{j=1}^4 [z-S_j]!} \right)^2 \end{aligned}$$

特殊地，如果链环的每个分支有相同的颜色，公式(5)可以简化为

$$\langle D_{\mathcal{L}} \rangle_{a+1} = \sum_{c_1, c_2, c_3} (-1)^{\frac{3}{2}c_2} A^{-(2p+1)a^2-2(2p+1)a-c_1^2-2c_1+\frac{3}{2}c_2^2+3c_2+pc_3^2+2pc_3} \times H \quad (7)$$

从而，对应的  $(-2,3,2p)$ -pretzel 链环未规范的着色 Jones 多项式为

$$\begin{aligned} \bar{J}_{a+1}(\mathcal{L}; q) &= \left( (-1)^a A^{a^2+2a} \right)^{-3} \langle D_{\mathcal{L}} \rangle_{a+1} \Big|_{\frac{1}{q^2}=A^{-2}} \\ &= \sum_{c_1, c_2, c_3} (-1)^{-a-\frac{3}{2}c_2} A^{-(2p+4)a^2-2(2p+4)a-c_1^2-2c_1+\frac{3}{2}c_2^2+3c_2+pc_3^2+2pc_3} \times H \Big|_{\frac{1}{q^2}=A^{-2}} \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$H = \frac{[c_i+1] \left[ \frac{2a-c_i}{2} \right]! \left( \left[ \frac{c_i}{2} \right]! \right)^2 \left[ \frac{c_1+c_2-c_3}{2} \right]! \left[ \frac{c_1+c_3-c_2}{2} \right]! \left[ \frac{c_2+c_3-c_1}{2} \right]!}{\left[ \frac{2a+c_i+1}{2} \right]! \left[ \frac{c_1+c_2+c_3+1}{2} \right]!} \left( \sum_{z=\max S_j}^{\min T_i} \frac{(-1)^z [z+1]!}{\prod_{i=1}^3 [T_i-z]! \prod_{j=1}^4 [z-S_j]!} \right)^2$$

公式(8)中，令  $c_i = 2k_i$ ，进一步化简得

$$\bar{J}_n(\mathcal{L}; q) = \sum_{k_1, k_2, k_3}^{n-1} (-1)^{n-1+3k_2} q^{\frac{p+2}{2}n^2 - \frac{p+2}{2}k_1(k_1+1) - \frac{3}{2}k_2(k_2+1) - pk_3(k_3+1)} \times P \tag{9}$$

于是我们得到 $(-2, 3, 2p)$ -pretzel 链环的规范化着色 Jones 多项式为

$$J_n(\mathcal{L}; q) = \frac{\bar{J}_n(\mathcal{L}; q)}{J_n(\mathcal{O}; q)} = \sum_{k_1, k_2, k_3}^{n-1} (-1)^{3k_2} q^{\frac{p+2}{2}n^2 - \frac{p+2}{2}k_1(k_1+1) - \frac{3}{2}k_2(k_2+1) - pk_3(k_3+1)} \times P \tag{10}$$

其中

$$P = \prod_{i=1}^{i=3} \frac{[2k_i + 1][n - 1 - k_i]!([k_i]!)^2 [k_1 + k_2 - k_3]! [k_1 + k_3 - k_2]! [k_2 + k_3 - k_1]!}{[n + k_i]! [k_1 + k_2 + k_3 + 1]!} \left( \sum_{z=\max S_j}^{\min T_i} \frac{(-1)^z [z + 1]!}{\prod_{i=1}^3 [T_i - z]! \prod_{j=1}^4 [z - S_j]!} \right)^2$$

$$T_1 = n - 1 + k_2 + k_3 \quad T_2 = n - 1 + k_1 + k_3 \quad T_3 = n - 1 + k_1 + k_2$$

$$S_1 = k_1 + k_2 + k_3 \quad S_2 = n - 1 + k_1 \quad S_3 = n - 1 + k_2 \quad S_4 = n - 1 + k_3.$$

下面，我们看一个具体的例子。

对于  $p = 4$ ，由公式(10)得 $(-2, 3, 8)$ -pretzel 链环的规范化着色 Jones 多项式为

$$J_n(\mathcal{L}; q) = \frac{\bar{J}_n(\mathcal{L}; q)}{J_n(\mathcal{O}; q)} = \sum_{k_1, k_2, k_3}^{n-1} (-1)^{3k_2} q^{3n^2 - 3 + k_1(k_1+1) - \frac{3}{2}k_2(k_2+1) - 4k_3(k_3+1)}$$

$$\times \prod_{i=1}^{i=3} \frac{[2k_i + 1][n - 1 - k_i]!([k_i]!)^2 [k_1 + k_2 - k_3]! [k_1 + k_3 - k_2]! [k_2 + k_3 - k_1]!}{[n][n + k_i]! [k_1 + k_2 + k_3 + 1]!}$$

$$\times \left( \sum_{z=\max S_j}^{\min T_i} \frac{(-1)^z [z + 1]!}{\prod_{i=1}^3 [T_i - z]! \prod_{j=1}^4 [z - S_j]!} \right)^2 \tag{11}$$

其中

$$T_1 = n - 1 + k_2 + k_3 \quad T_2 = n - 1 + k_1 + k_3 \quad T_3 = n - 1 + k_1 + k_2$$

$$S_1 = k_1 + k_2 + k_3 \quad S_2 = n - 1 + k_1 \quad S_3 = n - 1 + k_2 \quad S_4 = n - 1 + k_3.$$

通过 maple，可以使用公式(11)显式计算序列  $J_n(\mathcal{L}; q)$ ，详见[11]。

### 4. 讨论与展望

本文利用 Kauffman bracket skein 理论计算出 $(-2, 3, 2p+3)$ -pretzel 纽结和 $(-2, 3, 2p)$ -pretzel 链环的着色 Jones 多项式显式表达式，用这些公式做数值计算，可以验证相关猜想。在后续的研究中，计划参考[13]中的理论和方法，根据这两类链环的着色 Jones 多项式进一步研究其 potential function，验证这两类链环的体积猜想等课题。

### 致 谢

感谢我的老师和同门在我学习和论文写作期间对我的指导和建议，感谢朋友们对我的鼓励和帮助。

### 参考文献

[1] Jones, V.F. (1985) A Polynomial Invariant for Knots via von Neumann Algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 103-111. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2>

- 
- [2] Witten, E. (1989) Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, **121**, 351-399. <https://doi.org/10.1007/bf01217730>
- [3] Reshetikhin, N.Y. and Turaev, V.G. (1990) Ribbon Graphs and Their Invariants Derived from Quantum Groups. *Communications in Mathematical Physics*, **127**, 1-26. <https://doi.org/10.1007/bf02096491>
- [4] Lickorish, W.R. (2012) An Introduction to Knot Theory. Springer Science & Business Media.
- [5] Masbaum, G. and Vogel, P. (1994) 3-Valent Graphs and the Kauffman Bracket. *Pacific Journal of Mathematics*, **164**, 361-381. <https://doi.org/10.2140/pjm.1994.164.361>
- [6] Melvin, P.M. and Morton, H.R. (1995) The Coloured Jones Function. *Communications in Mathematical Physics*, **169**, 501-520. <https://doi.org/10.1007/bf02099310>
- [7] Garoufalidis, S. (2004) On the Characteristic and Deformation Varieties of a Knot. *Geometry and Topology Monographs*, **7**, 291-304. <https://doi.org/10.2140/gtm.2004.7.291>
- [8] Garoufalidis, S. (2011) The Jones Slopes of a Knot. *Quantum Topology*, **2**, 43-69. <https://doi.org/10.4171/qt/13>
- [9] Kashaev, R.M. (1997) The Hyperbolic Volume of Knots from the Quantum Dilogarithm. *Letters in Mathematical Physics*, **39**, 269-275. <https://doi.org/10.1023/a:1007364912784>
- [10] Murakami, H. and Murakami, J. (2001) The Colored Jones Polynomials and the Simplicial Volume of a Knot. *Acta Mathematica*, **186**, 85-104. <https://doi.org/10.1007/bf02392716>
- [11] Liuna (2026) Colored Jones Polynomial of Pretzel Links[EB/OL]. <https://github.com/liuna0315/colored-jones-polynomial-of-pretzel-links>
- [12] Garoufalidis, S. and Koutschan, C. (2012) The Noncommutative  $a$ -Polynomial of  $(-2, 3, n)$  Pretzel Knots. *Experimental Mathematics*, **21**, 241-251. <https://doi.org/10.1080/10586458.2012.651409>
- [13] Chen, Q. and Zhu, S. (2023) On the Asymptotic Expansions of Various Quantum Invariants I: The Colored Jones Polynomial of Twist Knots at the Root of Unity  $e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n+2}}$ . arXiv:2307.12963.