Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 10-17
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164086

一类含p^3阶正规子群的奇数阶群

梅　霖，施　缘[*]

云南师范大学数学学院，云南　昆明

收稿日期：2026年2月28日；录用日期：2026年3月19日；发布日期：2026年3月27日

摘　要

通过研究p^3阶群的自同构群的阶从而达到研究奇数阶有限群G含有一个p^3阶正规子群N (其中p是G的最小素因子)时所具有的性质，但此时由于群G阶的不确定性故其结构较难得出，故进一步考虑加上条件$|G|_p = p^3$并如愿得出了G的结构。

关键词

最小素因子，自同构群，*Sylow*-子群，*p*-群

An Odd-Order Group with a Regular Subgroup of Order p^3

Lin Mei, Yuan Shi[*]

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: February 28, 2026; accepted: March 19, 2026; published: March 27, 2026

Abstract

We mainly study the properties of odd-order finite group G when it contains a p^3 order normal subgroup N (where p is the minimum prime factor of G) by studying the automorphism group of the p^3 order group, but at this time, due to the order of group G is uncertain, its structure is difficult to find, Therefore, further consideration is given to the addition of the condition $|G|_p = p^3$ and the structure of G is obtained.

[*]通讯作者。

文章引用: 梅霖, 施缘. 一类含 p^3 阶正规子群的奇数阶群[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 10-17.
DOI: 10.12677/pm.2026.164086

Keywords

Minimal Prime Factor, Automorphism Group, *Sylow p*-Subgroup, *p*-Group

1. 引言

在群论中，给定一个群的某些性质，例如：群的阶数、含一个特殊正规子群、幂零性、可解性等等，确定这些含某些性质的群的结构是一个核心问题。p^n阶群(p为素数)由于其独特的性质和丰富的结构，一直以来是群论研究的重点对象。本文聚焦于p^3阶群，通过运用群论基本概念和定理，如拉格朗日定理，中心定理等，除此之外还运用了置换群的相关理论进行论证，深入剖析其可能的结构类型，揭示了这类群独特的内部结构和相关特征，为进一步研究有限群提供了基础。

在《有限群导引》的习题中我们知道当有限群G含一个p阶正规子群N时能得到$N \le Z(G)$，并且若奇数阶群G含一个p^2阶正规子群可以得到$|G:C_G(N)| \le p$ (其中都考虑p是G的最小素因子)。因此自然而然想到：

问题 1：当有限群G含一个p^3阶正规子群N时(其中p是G的最小素因子) G有怎样的性质？

经过证明计算可以得出定理 3。1 的结论，但由于$|G|$的不确定性G的结构还难以确定，故考虑加上条件$|G|_p = p^3$，故提出：

问题 2：当有限群G含一个p^3阶正规 *Sylow*-子群N时(其中p是G的最小素因子) G的结构如何？

2. 预备知识

以下参考《有限群导引》[1]一书先列出本文证明的过程中需要用到的几个关键性定义以及 ***Bunside*** 定理、*N/C* 定理和 ***Bunside*** 基定理。

定义 2.1 ([1])：设G为初等交换p-群，则G有两个全不变子群

$$\Omega_1(A) = \left\{a \in A \middle| a^p = 1\right\}, \mho_1 = \left\{a^p = 1 \middle| a \in\right\}$$

它们分别是自同态$\eta: a \mapsto a^p$的核和像集。

定义 2.2 ([1])：设G是有限群。若$G \ne 1$，令$\Phi(G)$为G的所有极大子群的交，而若$G = 1$，令$\Phi(G) = 1$。我们称$\Phi(G)$为G的 **Frattini** 子群或G的Φ子群。

定理 2.1 ([1])：(***Bunside*** 定理)设G是有限群，$P \in Syl_p(G)$。若$N_G(P) = C_G(P)$，则G为p-幂零群。

定理 2.2 ([2])：(*N/C* 定理)设G是一个群，H是G的子群，$N_G(H)$是H在G中的正规化子，$C_G(H)$是H在G中的中心化子，则$C_G(H)$是$N_G(H)$的正规子群，并且$N_G(H)/C_G(H)$同构于$Aut(H)$ (H的自同构群)的一个子群。

定理 2.3 ([1])：(***Bunside*** 基定理)设G是有限p-群，$|G/\Phi(G)| = p^d$，则G的每个最小生成系恰含d个元素。并且每个$G/\Phi(G)$中的元素x都至少属于一个最小生成系。

为了研究一个含p^3阶正规子群的奇数阶群结构如何，除以上定义以及定理外，我们首先需要从p^3阶群入手，确定p^3阶群的结构及其自同构群的阶。因此以下先考虑当p^3阶群G为交换群的情况并给出它的结构及其自同构群的阶。

引理 2.1 ([3])：设 G 群为 p^3 阶有限群，其中 p 为奇素数，则 G 为以下类型之一：

(i) $G \cong Z_{p^3}$；

(ii) $G \cong Z_{p^2} \times Z_p$；

(iii) $G \cong Z_p \times Z_p \times Z_p$；

(iv) $G = \left\langle a,b \middle| a^{p^2} = b^p = 1, b^{-1}ab = a^{1+p} \right\rangle$；

(v) $G = \left\langle a,b \middle| a^p = b^p = c^p = 1, [a,b] = c, [a,c] = [b,c] = 1 \right\rangle$。

接下来需要确定 p^3 阶群的自同构群的阶，下面先引出 p^3 阶群 G 为交换群的情形。

引理 2.2 ([4])：设 $|G| = p^3$ (其中 p 为奇素数)，且 G 交换，则下列结论之一成立：

(i) $G \cong Z_{p^3}$ 时，$|Aut(G)| = p^2(p-1)$；

(ii) $G \cong Z_{p^2} \times Z_p$ 时，$|Aut(G)| = p^3(p-1)^2$；

(iii) $G \cong Z_p \times Z_p \times Z_p$ 时，$|Aut(G)| = p^3(p-1)^3(p+1)(p^2+p+1)$。

接着我们给出 p^3 阶群 G 非交换时它的自同构群的阶并运用群论以及置换群[5]的知识给出证明。

引理 2.3：设 $|G|_p = p^3$ (其中 p 为奇素数)且 G 非交换，则下列结论之一成立：

(i) $G = \left\langle a,b \middle| a^{p^2} = b^p = 1, b^{-1}ab = a^{1+p} \right\rangle$ 时，$|Aut(G)| = p^3(p-1)$；

(ii) $G = \left\langle a,b \middle| a^p = b^p = c^p = 1, [a,b] = c, [a,c] = [b,c] = 1 \right\rangle$ 时，

$$|Aut(G)| = p^3(p-1)^2(p+1).$$

证明：

(i) $\forall \sigma \in Aut(G)$，有：

$$G = \left\langle \sigma(a), \sigma(b) \middle| \sigma(a)^{p^2} = \sigma(b)^p = 1, \sigma(b)^{-1}\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(a)^{1+p} \right\rangle$$

那么可设：

$$\sigma: \begin{cases} a \mapsto a^i b^j \\ b \mapsto a^k b^l \end{cases}$$

则 $o(\sigma(a)) = p^2, o(\sigma(b)) = p, (\sigma(a), \sigma(b)) = 1$，从而可以得到 $(i, p^2) = 1, (k, p^2) \neq 1$，其中 $0 \le i, k \le p^2 - 1, 0 \le j, l \le p-1$。

接下来计算 $\sigma(b)^{-1}\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(a)^{1+p}$，不妨记 $r = 1+p$。那么由 $\sigma(a) = p^2$ 有：

$$\begin{aligned} \sigma(a)^{\sigma(b)} &= \left(a^k b^l\right)^{-1} a^i b^j a^k b^l \\ &= b^{-l} a^{i-k} b^{j+l} \left(b^{-l} a^k b^l\right) \\ &= b^j \left[b^{-(l+j)} a^{i-k} b^{l+j}\right] a^{kr^l} \\ &= b^j \left[a^{(i-k)(1+p)^{l+j}}\right] a^{k(1+p)^l} \\ &= b^j a^{(i-k)(1+p)^{l+j} + k(1+p)^l} \\ &= b^j a^{(i-k)(1+lp+jp)+k(1+lp)} \\ &= b^j a^{i(1+lp+jp)-kjp} \end{aligned} \tag{1}$$

下面利用归纳假设计算等式：

$$\left(a^i b^j\right)^{p+1} = b^{(p+1)j} a^{i\left(p+1+\frac{(2+p)(1+p)}{2}pj\right)}$$

$k = 2$ 时有：

$$\begin{aligned}\left(a^ib^j\right)^2 &= b^j\left(b^{-j}a^ib^j\right)a^ib^j \\ &= b^ja^{i\cdot r^j}a^ib^j \\ &= b^ja^{(i\cdot r^j+i)}b^j \\ &= b^{2j}\left[b^{-j}a^{i(r^j+1)}b^j\right] \\ &= b^{2j}a^{i(r^j+1)r^j} \\ &= b^{2j}a^{i\left((1+p)^j+1\right)(1+p)^j} \\ &= b^{2j}a^{i(2+pj)(1+pj)} \\ &= b^{2j}a^{i(2+3pj)}\end{aligned}$$

假设 $k=p$ 时结论成立，则由归纳假设有：

$$\left(a^ib^j\right)^p = b^{pj}a^{i\left(p+\frac{(1+p)p}{2}pj\right)}$$

考虑 $k=p+1$，以下验证结论是成立的：

$$\begin{aligned}\sigma\left(a\right)^{1+p} &= \left(a^ib^j\right)^{p+1} \\ &= \left(a^ib^j\right)^{p+1} \\ &= \left(a^ib^j\right)^p a^ib^j \\ &= b^{pj}a^{i\left(p+\frac{(1+p)p}{2}pj\right)}a^ib^j \\ &= b^{pj}a^{i\left(p+1+\frac{(1+p)p}{2}pj\right)}b^j \\ &= b^{(p+1)j}\left[b^{-j}a^{i\left(p+1+\frac{(1+p)p}{2}pj\right)}b^j\right] \\ &= b^{(p+1)j}a^{i\left(p+1+\frac{(1+p)p}{2}pj\right)r^j} \\ &= b^{(p+1)j}a^{i\left(p+1+\frac{(1+p)p}{2}pj\right)(1+p)^j} \\ &= b^{(p+1)j}a^{i\left(p+1+\frac{(2+p)(1+p)}{2}pj\right)} \\ &= b^ja^{i(1+p+pj)}\end{aligned}$$

即 $k=p+1$ 时

$$\left(a^ib^j\right)^{p+1} = b^{(p+1)j}a^{i\left(p+1+\frac{(2+p)(1+p)}{2}pj\right)} = b^ja^{i(1+p+pj)} \tag{2}$$

成立。

因此结合(1)、(2) 得：

$$\begin{aligned}b^ja^{i(1+lp+jp)-kjp} &= b^ja^{i(1+p+pj)} \\ a^{i(1+lp+jp)-kjp} &= a^{i(1+p+pj)} \\ a^{i(lp-p)-kjp} &= 1 \\ i\left(lp-p\right) &\equiv 1\left(\bmod p^2\right)\end{aligned}$$

$$p(l-1)\equiv 1\left(\bmod p^2\right)$$

由 l 的取值范围有 $l=1$。

故 i 有 $\varphi\left(p^2\right)=p^2-p$ 种取法，j 有 p 种取法，k 有 p 种取法，l 有 1 种取法。

因此由 i,j,k,l 的取法可得 $|Aut(G)|=\left(p^2-p\right)\cdot p\cdot p\cdot 1=p^3(p-1)$。

(ii) 由 G 是有限 p-群有 $\Phi(G)=G'\mho_1(G)$，且由 ***Bunside*** 基定理有 $G/\Phi(G)$ 是初等交换 p-群，又 $\mho_1(G)=G^p=1$，故 $\Phi(G)=G', G/\Phi(G)=G/G'=\langle a\Phi(G), b\Phi(G)\rangle$。

$\forall\sigma\in Aut(G)$，有一个自同构 $\bar{\sigma}$：

$$(g\Phi(G))^{\bar{\sigma}}=g^{\sigma}\Phi(G),\forall g\in G$$

令 $f:\sigma\to\bar{\sigma}$ 是 $Aut(G)$ 到 $Aut(G/\Phi(G))$ 的映射，易验证 f 是一个同态映射，下证 f 是满射。

$$\forall\bar{\sigma}\in Aut(G/\Phi(G))=Aut\langle a\Phi(G), b\Phi(G)\rangle$$

其中：

$$\bar{\sigma}:\begin{cases}a\Phi(G)\to a^{\sigma}\Phi(G)\\ b\Phi(G)\to b^{\sigma}\Phi(G)\end{cases}$$

有 $a^{\sigma}, b^{\sigma}\notin\Phi(G)$，即 $\left\langle a^{\sigma}, b^{\sigma}\right\rangle=\langle a,b\rangle^{\sigma}=\langle a,b\rangle$，从而 $\sigma\in Aut(G)$。因此 f 是满射，且由同态基本定理有：

$$Aut(G)/Ker\, f\cong Aut(G/\Phi(G))$$

令 $K=Ker\, f$，接下来计算 $|K|$。

设 $\{x_1, x_2\}$ 是 G 的任意一组最小生成系，令 Δ 为所有 2 元有序子集 (x_1a_1, x_2a_2) (其中 $a_1, a_2\in\Phi(G)$)组成的集合，则 $|\Delta|=p^2$。令 K 作用在 Δ 上，其中：

$$K=\left\{\sigma\in Aut(G)\middle|(g\Phi(G))^{\bar{\sigma}}=g^{\sigma}\Phi(G),\forall g\in G\right\}$$

因为 K 将最小生成系变为最小生成系，故

$\forall x=\left(x_1a_i, x_2a_j\right), y=\left(x_1a_k, x_2a_l\right)\in\Delta$，$\exists k\in K$ 使得 $x^k=y$，故 K 作用在 Δ 上传递，则有 $|\Delta|=|K:K_{\alpha}|$，其中 K_{α} 是将 Δ 中某个最小生成系保持不变的 G 的自同构。

显然 $K_{\alpha}=1$，从而 $|K|=|\Delta|=p^2$。

因此 $|Aut(G)|=p^2\left(p^2-1\right)\left(p^2-p\right)=p^3(p-1)^2(p+1)$。

3. 主要定理及其证明

首先本节内容回答了问题 1 以及问题 2，也是本文的主要结论及证明过程，内容如下：

定理 3.1：设 p 是奇数阶群 G 的最小素因子，若 $N\trianglelefteq G$，且 $|N|=p^3$，则 $|G:C_G(N)|\le p^3$ 或 N 为初等交换 p-群时 $|G:C_G(N)|\le p^3\left(p^2+p+1\right)$。

证明：由已知有 $N\trianglelefteq G$，则可对 N 用 N/C 定理有：

$$N_G(N)/C_G(N)=G/C_G(N)\lesssim Aut(N)$$

下面对 N 分情况讨论。

首先考虑当 N 交换时，此时由引理 2.2 可得：

Case 1：$N\cong Z_{p^3}$，此时 $|Aut(N)|=p^2(p-1)$，则 $|G:C_G(N)|\big||Aut(N)|=p^2(p-1)$，又 p 为最小素因

子有 $\left|G:C_G(N)\right|\le p^2$。

Case 2： $N\cong Z_{p^2}\times Z_p$，此时 $\left|Aut(N)\right|=p^3(p-1)^2$，则 $\left|G:C_G(N)\right|^2\left|Aut(N)\right|=p^3(p-1)^2$，又由 p 为最小素因子有 $\left|G:C_G(N)\right|\le p^3$。

Case 3： $N\cong Z_p\times Z_p\times Z_p$，此时 $\left|Aut(N)\right|=p^3(p-1)^3(p+1)(p^2+p+1)$，则

$$\left|G:C_G(N)\right|\left|Aut(N)\right|=p^3(p-1)^2(p+1)(p^2+p+1)$$

又由 p 为最小素因子有 $\left|G:C_G(N)\right|\le p^3(p^2+p+1)$。

接下来考虑 N 非交换时的情形，此时由引理 2.3 可得：

Case 1： $N=\left\langle a,b\,\middle|\,a^{p^2}=b^p=1,b^{-1}ab=a^{1+p}\right\rangle$ 时，此时 $\left|Aut(N)\right|=p^3(p-1)$，则 $\left|G:C_G(N)\right|\left|Aut(N)\right|=p^3(p-1)$，又由 p 为最小素因子有 $\left|G:C_G(N)\right|\le p^3$。

Case 2： $N=\left\langle a,b\,\middle|\,a^p=b^p=c^p=1,[a,b]=c,[a,c]=[b,c]=1\right\rangle$ 时，

此时 $\left|Aut(N)\right|=p^3(p-1)^3(p+1)$，则 $\left|G:C_G(N)\right|\left|Aut(N)\right|=p^3(p-1)^2(p+1)$，又由 p 为最小素因子有 $\left|G:C_G(N)\right|\le p^3$。

因此 $\left|G:C_G(N)\right|\le p^3$ 或 N 是初等交换 p-群时 $\left|G:C_G(N)\right|\le p^3(p^2+p+1)$。

此时只能确定 $\left|G:C_G(N)\right|$ 的取值范围，关于 G 的结构还不明朗，故接下来考虑加上条件 $|G|_p=p^3$。

定理 3.2： 设 p 是奇数阶群 G 的最小素因子，若 $N\trianglelefteq G$ 且 $|N|=|G|_p=p^3$，则下列之一成立：

(i) N 交换时，G 有正规 p-补 $G_{p'}$ 使得 $G=N\times G_{p'}$；

(i) N 非交换时，$C_G(N)$ 有正规 p-补 $A_{p'}$ 使得 $G\cong(A_{p'}\times Z_p).(Z_p\times Z_p)$。

证明： 由 $|G|_p=p^3$ 知 N 为 G 的 *Sylow* p-子群。

(i) 由 N 交换知 $N\le C_G(N)$。

又 $\left(p,\left|G:C_G(N)\right|\right)=1$，故由引理 2.2 有 $\left|G:C_G(N)\right|=1$，从而 $G=C_G(N)=N_G(N)$。

接着由 ***Bunside*** 定理有 G 为 p-幂零群。

因此 G 有正规 p-补 $G_{p'}$ 使得 $G=N\times G_{p'}$。

(i) **Case 1：** 当 $N=\left\langle a,b\,\middle|\,a^{p^2}=b^p=1,b^{-1}ab=a^{1+p}\right\rangle$ 时，明显有 N 非交换，从而有

$$N\not\le C_G(N).$$

又 N 为 p-群且 p-群的中心非平凡，故而有 $Z(N)=N\cap C_G(N)>1$。

再由 N 的结构我们知道 $\left(a^p\right)^b=\left(a^b\right)^p=\left(a^{1+p}\right)^p=a^p$，从而有 $\left\langle a^p\right\rangle\le Z(N)$，又由 $a^p=a^{1+p}$ 知 $a,b\notin Z(N)$，可以得到 $Z(N)<p^2$。

因此 $Z(N)=\left\langle a^p\right\rangle$。记 $A=C_G(N)$，设 $P\in Syl_p(A)$，则 $P\cong Z_p$。

由 $A=\left\{g\in G\,\middle|\,ng=gn,\forall n\in N\right\}$ 及 $P\le N$ 知 P 中元与 A 中元可交换，故 $P\trianglelefteq A$。

对 P 运用 N/C 定理有：

$$N_A(P)/C_A(P)=A/C_A(P)\lesssim Aut(P)$$

则 $\left|A/C_A(P)\right|\left|Aut(P)\right|=p-1$。

又由 p 是 A 的最小素因子有 $A=C_A(P)$，即 $P\le Z(A)$。从而 $A=C_A(P)=N_A(P)$，故由 ***Bunside*** 定理有 A 有正规 p-补 $A_{p'}$。

因而有 $C_G(N)=A\cong A_{p'}\times Z_p$。

而 $\left|G/C_G(N)\right|=p^2$，从而 $G/C_G(N)\cong Z_{p^2}$ 或 $G/C_G(N)\cong Z_p\times Z_p$。

因此 $G\cong(A_{p'}\times Z_p).Z_{p^2}$ 或 $G\cong(A_{p'}\times Z_p).(Z_p\times Z_p)$。但因 $G/C_G(N)\cong Z_p\times Z_p$，故 $N/Z(N)\cong Z_p\times Z_p$，

因此 $G\cong\left(A_{p'}\times Z_p\right).\left(Z_p\times Z_p\right)$。

Case 2： 当 $N=\left\langle a,b\middle|a^p=b^p=c^p=1,[a,b]=c,[a,c]=[b,c]=1\right\rangle$ 时，N 非交换，因此同以上证明，结合 N 为 p-群知 $Z(N)=N\cap C_G(N)>1$，再由 N 的结构我们知道 $a,b\notin Z(N),c\in Z(N)$。

因此 $Z(N)=\langle c\rangle$。

记 $A'=C_G(N)$，设 $P\in Syl_p(A')$，则 $P\cong Z_p$。

同(ii)的证明可以得到 A' 有正规 p-补 $A'_{p'}$。

因而有 $C_G(N)=A'\cong A'_{p'}\times Z_p$。

而 $\left|G/C_G(N)\right|=p^2$，从而 $G/C_G(N)\cong Z_{p^2}$ 或 $G/C_G(N)\cong Z_p\times Z_p$。

从而 $G\cong\left(A'_{p'}\times Z_p\right).Z_{p^2}$ 或 $G\cong\left(A'_{p'}\times Z_p\right).\left(Z_p\times Z_p\right)$。

但由 $N\trianglelefteq G$ 以及 N 的结构我们知道 G 中不含 p^2,p^3 阶元，因此 $G\cong\left(A'_{p'}\times Z_p\right).\left(Z_p\times Z_p\right)$。

综上，N 非交换时，$C_G(N)$ 有正规 p-补 $A_{p'}$ 使得 $G\cong\left(A_{p'}\times Z_p\right).\left(Z_p\times Z_p\right)$。

接下来我们利用以上方法确定一个例子的结构。

例： 设 $|G|=3^3\cdot5\cdot11$，则 G 有如下 10 种结构：

(i) $G=\left\langle a,b,c\middle|a^{27}=b^5=c^{11}=1\right\rangle$

(ii) $G=\left\langle a,b,c\middle|a^{27}=b^5=c^{11}=1,c^b=c^5\right\rangle$

(iii) $G=\left\langle a,b,c,d\middle|a^9=b^3=c^5=d^{11}=1\right\rangle$

(iv) $G=\left\langle a,b,c,d\middle|a^9=b^3=c^5=d^{11}=1,d^c=d^9\right\rangle$

(v) $G=\left\langle a,b,c,d,e\middle|a^3=b^3=c^3=d^5=e^{11}=1\right\rangle$

(vi) $G=\left\langle a,b,c,d,e\middle|a^3=b^3=c^3=d^5=e^{11}=1,e^d=e^3\right\rangle$

(vii) $G=\left\langle a,b,c,d\middle|a^9=b^3=c^5=d^{11}=1,b^a=ba^3\right\rangle$

(viii) $G=\left\langle a,b,c,d\middle|a^9=b^3=c^5=d^{11}=1,b^a=ba^3,d^c=e^9\right\rangle$

(ix) $G=\left\langle a,b,c,d,e\middle|a^3=b^3=c^3=d^5=e^{11}=1,b^a=bc\right\rangle$

(x) $G=\left\langle a,b,c,d,e\middle|a^3=b^3=c^3=d^5=e^{11}=1,b^a=bc,e^d=e^9\right\rangle$

证明： 由 G 的阶知它满足定理 3.2 中的条件，下面通过定理 3.2 得到 G 的整体结构：

设 $N\in Syl_3(G)$，

Case 1： 当 N 交换时，由定理 3.2 知 $G\cong N\times G_{3'}$，并且 $\left|G_{3'}\right|=5\cdot11$，且有两种结构，分别是 $G_{3'}\cong Z_5\times Z_{11}$ 和 $G_{3'}=\left\langle x,y\middle|x^5=1,y^{11}=1,y^x=y^4\right\rangle$ 因此当 $N\cong Z_{3^3}$ 时，G 的结构为(i)~(ii)；当 $N\cong Z_{3^2}\times Z_3$ 时，G 的结构为(iii)~(iv)；当 $N\cong Z_3\times Z_3\times Z_3$ 时，G 的结构为(v)~(vi)；

Case 2： 当 N 非交换时，由定理 3.2 知 $G\cong\left(A_{3'}\times Z_3\right).\left(Z_3\times Z_3\right)$，此时 $A_{3'}$ 的结构同 Case 1 中的 $G_{3'}$ 的结构，因此当 $N=\left\langle a,b\middle|a^{3^2}=b^3=1,b^{-1}ab=a^4\right\rangle$ 时，G 的结构为(vii)~(viii)；当 $N=\left\langle a,b\middle|a^3=b^3=c^3=1,[a,b]=c,[a,c]=[b,c]=1\right\rangle$ 时，G 的结构为(ix)~(x)。

4. 结束语

在群论中，p-群是一类重要的有限群，并且其有良好的数学性质，例如其阶的确定性、幂零性以及中心非平凡等等。因此我们可以通过 p-群的相关理论和性质研究构造其它有限群。在本篇论文中，受到《有限群导引》一书中两个习题的启发，我们考虑一个奇数阶群含一个阶为 p^3 的正规子群时会得到怎样的结论。首先我们从 p^3 阶群的结构入手，紧接着求得了其自同构群的阶，之后再利用群论中非常重要的定理 ***Bunside*** 定理以及 ***N/C*** 定理可以得到本文中的两个定理，这为之后研究部分有限群提供一些启发。在接下来的研究当中，我们可以继续尝试考虑有限群 G 含一个阶为更高次幂 p-群的正规子群时会有怎样的结果，当然这与 p-群的进一步研究密不可分。

参考文献

[1] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[2] Lang, S. (2002) Algebra. 3rd Edition. Springer-Verlag, New York.

[3] 张远达. 有限群构造: 上册[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[4] 聂灵沼, 丁石孙. 代数学引论[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[5] Dixon, J.D. (1996) Permutation Groups. Springer-Verlag, New York.