Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 304-315
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164116

Hans汉斯

纤维积的欧拉示性数

段　涵

重庆市理工大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2026年3月1日；录用日期：2026年4月4日；发布日期：2026年4月27日

摘　要

本文主要研究了两个不同流形M_1, M_2上Morse函数纤维积空间$C(f,g)$的欧拉示性数$\chi(C(f,g))$。通过建立适用于两个流形的欧拉示性数分解公式并结合Morse理论中水平集的欧拉示性数表达式。本文导出了$\chi(C(f,g))$的统一表达式。该公式涵盖了临界值对齐与不对齐的情形。研究结果表明，纤维积的欧拉示性数由两个Morse函数的临界点指数通过行列式型的交错和决定，体现了横截映射拓扑与Morse理论之间的深刻联系。

关键词

Morse函数，欧拉示性数，Mayer-Vietoris序列，纤维积

Euler Characteristic of Fiber Product

Han Duan

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: March 1, 2026; accepted: April 4, 2026; published: April 27, 2026

Abstract

This paper primarily investigates the Euler characteristic $\chi(C(f,g))$ of the fibre product space $C(f,g)$ of Morse functions on two distinct manifolds M_1 and M_2. By establishing a decomposition formula for the Euler characteristic applicable to both manifolds and combining it with the expression for the Euler characteristic of level sets in Morse theory, this paper derives a unified expression for $\chi(C(f,g))$. This formula encompasses both critical point alignment and non-alignment scenarios. The findings reveal that the Euler characteristic of the fibre product is determined by the critical point indices of the two Morse functions through a determinant-type alternating sum, reflecting a profound connection between the topology of cross-maps and Morse theory.

文章引用: 段涵. 纤维积的欧拉示性数[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 304-315.
DOI: 10.12677/pm.2026.164116

Keywords

Morse Function, Euler Characteristic Number, Mayer Vietoris Sequence, Fiber Product

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

Morse 理论是现代微分拓扑研究中的基本工具之一，由美国数学家 Marston Morse 在 20 世纪 30 年代建立。该理论通过研究光滑流形上实值光滑函数的临界点及其指标，将函数的局部微分性质与流形的整体拓扑结构联系起来，从而为研究流形的同调结构、欧拉示性数以及 CW 复形分解提供了重要方法。Morse 理论的核心思想在于，通过对 Morse 函数临界点的分析，可以将复杂的拓扑问题转化为对有限个临界点及其指数结构的研究，从而揭示流形在不同临界值处的拓扑变化规律。这种将分析方法与拓扑结构相结合的研究思路，在现代微分拓扑、辛几何以及代数拓扑等领域中产生了深远影响，并成为研究复杂空间结构的重要理论工具。

本文利用 Morse 理论的基本思想，通过构造适当的辅助函数并分析其临界点结构，将纤维积空间的拓扑问题转化为对 Morse 函数临界点性质的研究。通过研究临界点的指标以及梯度流所诱导的拓扑变化，可以刻画纤维积空间在不同临界值附近的拓扑结构变化，并进一步得到与欧拉示性数相关的重要结论。这种方法将经典 Morse 理论的分析工具引入到纤维积空间的研究中，为计算和理解该类空间的拓扑不变量提供了一种新的思路。

经典的 Morse 理论由美国数学家 Marston Morse 在 20 世纪 20 年代至 30 年代建立。Morse 在研究测地线和变分问题时提出了一种新的方法，通过研究函数的临界点结构来刻画流形的拓扑。Morse 通过引入 Morse 函数以及临界点指数等相关概念证明了著名的 Morse 不等式[1]。到了 20 世纪 50 年代以后，莫尔斯理论被进一步发展为研究流形拓扑结构的重要工具。其中最重要的贡献来自 John Milnor。他的经典著作《Morse Theory》中对 Morse 理论进行了系统化与拓扑化处理。具体来说 $M_{a+\varepsilon}$ 可以由 $M_{a-\varepsilon}$ 通过粘接一个 $D^k \times D^{n-k}$ 得到。这一结果表明流形可以通过 Morse 函数的临界点分解为一系列 handle 的组合。这一思想不仅为流形拓扑提供了新的研究方法，也与 CW 复形结构建立了联系[2]。

到了 20 世纪 50 年代，Stephen Smale 将 Morse 理论与动力系统方法结合，提出了 Morse–Smale 系统[3]。在这种框架下，可以通过研究函数梯度流

$$\dot{x} = -\nabla f\left(x\right)$$

的轨道结构来分析临界点之间的关系。在 Morse-Smale 条件下，不同临界点的稳定流形与不稳定流形横截，从而可以构造 Morse 复形。通过计算临界点之间梯度流线的数量，可以定义链复形并证明其同调与流形的奇异同调同构

$$H_*\left(\text{Morse complex}\right) \cong H_*\left(M\right)$$

主要结果

假设有两个态射 $f: M_1 \to \mathbb{R}$ 与 $g: M_2 \to \mathbb{R}$，其中 M_1 和 M_2 是连通的闭流形，$\mathbb{R}$ 为实数。对每个值 $a_i \in \mathbb{R}$ 考虑态射 f, g 的纤维积，即我们会有一个态射 $\varphi: M_1 \times_{\mathbb{R}} M_2 \to \mathbb{R}$ 我们考虑以下这个问题：设函数

$\varphi: M_1 \times_{\mathbb{R}} M_2 \to \mathbb{R}$ 由

$$\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1}) = x_{n+1}$$

定义的高度函数。假设 p, q 分别是 M_1 和 M_2 上的两点，并且满足 $f(p) = g(q)$。设纤维积空间 $C(f, g)$ 是由 p 和 q 的所有可能的位置构成的空间。我们的问题是：$C(f, g)$ 的拓扑结构是怎样的？设 $\varphi: M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ 是一个严格的 Morse 函数，我们定义 $C(f, g) := \{(p, q) \in M_1 \times M_2 \mid f(p) = g(q)\}$，我们的目标是得到 $C(f, g)$ 的欧拉示性数 $\chi(C(f, g))$。

现在我们给出一些公式符号说明：首先 M_1 和 M_2 是连通的闭流形，维数分别为 $m_1 = \dim M_1$ 和 $m_2 = \dim M_2$，$f: M_1 \to \mathbb{R}$ 和 $g: M_2 \to \mathbb{R}$ 是 Morse 函数。$a_1, a_2, \cdots a_m$ 是 f 和 g 的所有临界值的并集排序后的值，且 m 是临界值的个数。$L_{a_i}^f = f^{-1}(a_i)$ 和 $L_{a_i}^g = g^{-1}(a_i)$ 分别是函数 f, g 是临界水平集，同时 N_i^f 和 N_i^g 是函数 f, g 的正则水平集，其中 $N_i^f = f^{-1}(r_i), N_i^g = g^{-1}(r_i)$ 并且对于 $i = 1, \cdots, m+1$，我们有 $r_i \in (a_{i-1}, a_i)$ 其中 $a_0 = -\infty, a_{m+1} = +\infty$。对于每一个 i，我们设 $\{p_i^j \mid 1 \le j \le v_i\}$ 是临界水平集 $L_{a_i}^f$ 或 $L_{a_i}^g$ 上的临界点，而是在 v_i 是临界水平集既是 $L_{a_i}^f$ 或 $L_{a_i}^g$ 中临界点的个数。设 μ_i^j 是临界点 p_i^j 的指数

其次我们还需要需要引入临界水平集 $L_{a_i}^f$ 和 $L_{a_i}^g$ 的局部映射度之和：

$$\Omega_i^f := \sum_{j=1}^{v_i} (-1)^j \mu_i^j$$

以及

$$\Omega_i^g := \sum_{j=1}^{v_i} (-1)^j \mu_i^j$$

定理 1.1：设 M_1, M_2 为连通闭流形，设函数 $f: M_1 \to \mathbb{R}$ 和 $g: M_2 \to \mathbb{R}$ 为 Morse 函数。我们得到如下公式：

$$\chi(C(f, g)) = \begin{cases} (-1)^{m_2} \sum_{i=1}^{m} \Omega_i^f \Omega_i^g & m_1 + m_2 \text{ 为偶数} \\ (-1)^{m_2} \sum_{1 \le q < r \le m} \begin{vmatrix} \Omega_q^f & \Omega_q^g \\ \Omega_r^f & \Omega_r^g \end{vmatrix} & m_1 + m_2 \text{ 为奇数} \end{cases}$$

其中 m 是临界值的个数。

2. 基础知识

定义 2.1 [4]：由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列。

定义 2.2 [4]：在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么他们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数。

定义 2.3 [4]：逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

定义 2.4 [4]：n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{2}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项(2)都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，(2)带有正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，(2)带有负号。这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{3}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和。

定义 2.2 [5]-[7]：设 φ 是流形 M 上的光滑实值函数。如果诱导映射 $\varphi_*:TM_p \to T\mathbb{R}_{\varphi(p)}$ 为零。则点 $p\in M$ 称为 φ 的临界点。

如果函数 φ 在某个临界点 p 使得 $\varphi(p)=c$，我们称一个实数 c 是 φ 的一个临界值。一个临界点被称为非退化的当且仅当 Hessian 矩阵 $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\right)$ 是非奇异的。同时可以直接证明，非退化的临界点不依赖于坐标系的选取。同时对于一个 Morse 函数的非退化临界点 p，其临界点指数 $\lambda(p)$ 定义为 Hessian 矩阵 $H(\varphi(p))$ 的负特征值的个数。

定义 2.3 [2]：若函数 $\varphi: M\to\mathbb{R}$ 上的任意临界点 $p\in M$ 都是非退化的。那么我们说 φ 是 Morse 函数。若 φ 的任意两个临界点 $x\neq y$ 有 $\varphi(x)\neq\varphi(y)$，我们就称函数 φ 是严格 Morse 函数。

定义 2.4 [2]：对于一个可三角化空间 X，欧拉示性数定义为同调群的交错和：

$$\chi(X)=\sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim H_i(X;\mathbb{R})$$

其中 $H_i(X;\mathbb{R})$ 是 X 的奇异同调群。

引理 2.5 [8]：设 X 是一个拓扑空间，U 和 V 是 X 的开子集，且 $X=U\cup V$。则存在奇异同调的长正合序列：

$$\cdots\to H_{i+1}(X)\to H_i(U\cap V)\to H_i(U)\oplus H_i(V)\to H_i(X)\to H_{i-1}(U\cap V)\to\cdots$$

该序列称为 Mayer-Vietoris 序列。

引理 2.6 [8]：如果 $X=U\cup V$，且 $U,V,U\cap V$ 的欧拉示性数都有定义，则：

$$\chi(X)=\chi(U)+\chi(V)-\chi(U\cap V) \tag{4}$$

证明：考虑 Mayer-Vietoris 序列，假设存在 N 使得对于所有的 $i>N$，$H_i(U\cup V)$，$H_i(U)$，$H_i(V)$，$H_i(X)$ 均为零。我们即可将序列写为有限形式：

$$0\to H_N(U\cap V)\to H_N(U)\oplus H_N(V)\to H_N(X)\to\cdots\to H_0(U\cap V)\to H_0(U)\oplus H_0(V)\to 0$$

由于这是一个正和序列，欧拉示性数为零。并且第 j 项的符号为 $(-1)^{j-1}$ 所以我们可以计算出整个序列的欧拉示性数为：

$$\sum_{j=1}^{3(N+1)}(-1)^{j-1}\dim(\text{第 } j \text{ 项})=0$$

对于序列中的 $H_i(U\cap V)$，$H_i(U)\oplus H_i(V)$，$H_i(X)$ 我们调整符号可得：

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^{N-i}\left[\dim H_i(U\cap V)-\dim\left(H_i(U)\oplus H_i(V)\right)+\dim H_i(X)\right]=0$$

由于 $\dim\left(H_i(U)\oplus H_i(V)\right)=\dim H_i(U)+\dim H_i(V)$，我们有：

$$\sum_{i=0}^{N}(-1)^{N-i}\left[\dim H_i(U\cap V)-\dim H_i(U)-\dim H_i(V)+\dim H_i(X)\right]=0$$

上式等价于：

$$-\chi(U\cap V)+\chi(U)+\chi(V)-\chi(X)=0$$

通过整理得到等式(4)。

引理 2.7 [9]：我们设 $N_i:=\varphi^{-1}(r_i)$ 并应用 Mayer-Vietoris 序列有以下方程：

$$\chi(M)=\sum_{i=1}^{m}\chi(L_i)-\sum_{i=1}^{m-1}\chi(N_i)$$

同理：L_i 和 N_i 分别为函数 φ 的临界水平集和正则水平集。

定义 2.8 [3]：设 $f:M_1\to\mathbb{R}$ 和 $g:M_2\to\mathbb{R}$ 为光滑函数。称映射对 (f,g) 是横截的，如果函数 $H:M_1\times M_2\to\mathbb{R}$，$H(p,q)=f(p)-g(q)$，以 0 为正则值，即对所有满足 $H(p,q)=0$ 的点，微分 $\mathrm{d}H_{(p,q)}$ 是满射。

3. 定理 1.1 证明

3.1. 纤维积的维数

引理 3.1：设 $f:M_1\to\mathbb{R}$ 和 $g:M_2\to\mathbb{R}$ 为光滑函数。定义函数 $H:M_1\times M_2\to\mathbb{R}$ 由：

$$H(p,q)=f(p)-g(q)$$

给出。则：

1) $(p,q)\in M_1\times M_2$ 是 H 的临界点当且仅当 p 是 f 的临界点且 q 是 g 的临界点，即：

$$Crit(H)=Crit(f)\times Crit(g)$$

2) f 和 g 是 Morse 函数，那么 H 也是 Morse 函数，并且在临界点 (p,g) 处，H 的指数为：

$$\mu_H(p,q)=\mu_f(p)+\left(\dim M_2-\mu_g(q)\right)$$

证明(1)：在点 (p,q)，微分 $\mathrm{d}H_{(p,q)}:T_{(p,q)}(M_1\times M_2)\to\mathbb{R}$ 由下式给出：

$$\mathrm{d}H_{(p,q)}(v,w)=\mathrm{d}f_p(v)-\mathrm{d}g_q(w)\quad\forall(v,w)\in T_pM_1\times T_qM_2$$

因此，$\mathrm{d}H_{(p,q)}=0$ 当且仅当 $\mathrm{d}f_p=0$ 和 $\mathrm{d}g_q=0$ 即说明 (p,q) 是 H 的临界点当且仅当 p,q 分别是 f 和 g 的临界点

证明(2)：假设 f 和 g 是 Morse 函数，即它们的临界点都是非退化的。选择 p 附近的局部坐标系 $x^1,\cdots,x^{m_1}$ 和 q 附近的局部坐标系 $y^1,\cdots,y^{m_2}$，则 (x,y) 是 $M_1\times M_2$ 的局部坐标系，且：

$$H(x,y)=f(x)-g(y)$$

在临界点 (p,q) 处，对于所有的 i,j 有 $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)=0$ 和 $\frac{\partial g}{\partial y^j}(q)=0$，因此一阶导数为零。二阶导数为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial x^j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j},\quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial y^j}=0,\quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^i \partial y^j}=-\frac{\partial^2 g}{\partial y^i \partial y^j}$$

因此，H 在点 (p,q) 处的 Hessian 矩阵为：

$$\mathrm{Hess}_{(p,q)} H=\begin{pmatrix}\mathrm{Hess}_p f & 0\\ 0 & -\mathrm{Hess}_q g\end{pmatrix}$$

由于 f 和 g 是 Morse 函数，$\mathrm{Hess}_p f$ 和 $\mathrm{Hess}_q g$ 都是非奇异的，故 $\mathrm{Hess}_{(p,q)} H$ 也是非奇异的，表明 H 在 (p,q) 是非退化的。因此，H 是 Morse 函数。

Morse 指数 $\mu_H(p,q)$ 是 $\mathrm{Hess}_{(p,q)} H$ 的负特征值个数。由于矩阵块对角，特征值由 $\mathrm{Hess}_p f$ 和 $-\mathrm{Hess}_q g$ 的特征值组成。$\mathrm{Hess}_p f$ 有 $\mu_f(p)$ 个负特征值，而 $-\mathrm{Hess}_q g$ 的特征值是 $\mathrm{Hess}_q g$ 的特征值的相反数，故 $-\mathrm{Hess}_q g$ 的负特征值个数等于 $\mathrm{Hess}_q g$ 的正特征值个数，即 $m_2-\mu_g(q)$ 因此：

$$\mu_H(p,q)=\mu_f(p)+\left(m_2-\mu_g(q)\right) \tag{5}$$

3.2. 纤维积上的 Mayer-Vietoris

定理 3.2：设：$X=\bigcup_{i=1}^{n} X_i$，且所有有限非空交集 $X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}$ 均可三角化，则：

$$\chi(X)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\chi\left(X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}\right)$$

证明：定理 3.2 的证明我们采用数学归纳法。

当 $n=1$ 时情况显然成立。现假设定对于任意 m 个满足条件的集合 $(m\le n-1)$，公式成立。考虑 n 个集合 $X_1,\cdots,X_n$ 令：

$$U=\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i, V=X_n$$

则 $X=U\cup V$，因为所有有限非空交集都可三角化，故 U,V 以及

$$U\cap V=\bigcup_{i=1}^{n-1}\left(X_i\cap X_n\right)$$

也可三角化，且它们的有限非空交集也是原集合交的子集，满足可三角化条件。应用 Mayer-Vietoris 序列得：

$$\chi(X)=\chi(U)+\chi(V)-\chi(U\cap V) \tag{6}$$

现在对于 $U=\bigcup_{i=1}^{n-1} X_i$ 由归纳假设得：

$$\chi(U)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n-1}\chi\left(X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}\right) \tag{7}$$

$U\cap V=\bigcup_{i=1}^{n-1}\left(X_i\cap X_n\right)$ 其集合族为 $\left\{X_i\cap X_n\right\}_{i=1}^{n-1}$ 它们交集为：

$$\left(X_{i_1}\cap X_n\right)\cap\cdots\cap\left(X_{i_k}\cap X_n\right)=X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}\cap X_n$$

由归纳假设得：

$$\chi(U\cap V)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n-1}\chi\left(X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}\cap X_n\right) \tag{8}$$

此外，$\chi(V)=\chi(X_n)$

现在将(7)和(8)代入(6)：

$$\chi(X)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n-1}\chi\left(X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}\right)+\chi(X_n)-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n-1}\chi\left(X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}\cap X_n\right) \tag{9}$$

现在将右端重新整理为对指标集$\{1,\cdots,n\}$的所有非空子集求和。设$J\subseteq\{1,\cdots,n\}$非空，集合J的个数记为$|J|$分三种情形：

1) 若$J\subseteq\{1,\cdots,n-1\}$，则项$\chi\left(\bigcap_{j\in J}X_j\right)$出现在(9)的第一项中，系数为$(-1)^{k+1}$

2) 若$J=\{n\}$，则项$\chi(X_n)$单独出现，系数为1。而$(-1)^{|J|+1}=(-1)^{1+1}=1$

3) 若J包含n且$|J|\ge 2$，则$J=I\cup\{n\}$，其中$I\subseteq\{1,\cdots,n-1\}$非空，$|I|=k-1$。这样的项出现在(9)的第三项中，但注意第三项前有负号，且其求和指标为I，系数为$(-1)^{(k+1)+1}=(-1)^k$因此该项贡献为：

$$-\left[(-1)^k\chi\left(\bigcap_{j\in I}X_j\cap X_n\right)\right]=(-1)^{k+1}\chi\left(\bigcap_{j\in J}X_j\right)$$

与所需系数$(-1)^{|J|+1}$一致。

综上，所有非空子集J的贡献恰好为$(-1)^{|J|+1}\chi\left(\bigcap_{j\in J}X_j\right)$。因此

$$\chi(X)=\sum_{\substack{J\subseteq\{1,\cdots,n\}\\ J\neq\varnothing}}(-1)^{|J|+1}\chi\left(\bigcap_{j\in J}X_j\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\chi\left(X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_k}\right) \tag{10}$$

在上面通过定理3.2中我们通过Mayer-Vietoris序列计算出了将一个均可三角化的拓扑空间的欧拉示性数公式。我们将利用定理3.2的结果来推导出纤维积上的欧拉示性数公式。

定理3.3: 已知$L_{a_i}^f=f^{-1}(a_i)$和$L_{a_i}^g=g^{-1}(a_i)$分别是函数f,g是临界水平集，同时N_i^f和N_i^g是函数f,g的正则水平集，我们以下纤维积的欧拉示性数公式：

$$\chi(C(f,g))=\sum_{i=1}^{m}\chi\left(L_{a_i}^f\right)\chi\left(L_{a_i}^g\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)$$

其中m为临界值的个数。

证明: 对于函数$\varphi:C(f,g)\to\mathbb{R}$定义为$\varphi(p,q)=f(p)=g(q)$。函数$\varphi$的水平集即为$f$与$g$的公共水平集的乘积：$\varphi^{-1}(c)=f^{-1}(c)\times g^{-1}(c)$。我们利用临界值$a_i$将$C(f,g)$划分为$C(f,g)M$个子集：

$$A_i=\left\{(p,q)\in C(f,g)\mid a_{i-1}\le\varphi(p,q)\le a_i\right\}\quad\forall i=1,2,\cdots,m$$

并且我们记：$a_0=-\infty,a_{m+1}=+\infty$。显然我们可以得到：

$$C(f,g)=\bigcup_{i=1}^{m+1}A_i$$

且相邻子空间交于正则水平集的乘积：

$$A_i\cap A_{i+1}=f^{-1}(r_i)\times g^{-1}(r_i)=N_i^f\times N_i^g,\quad i=1,\cdots,m+1$$

而非相邻子空间交集为空。于是由 Mayer–Vietoris 序列逐步粘合可得：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}\chi\left(A_i\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right) \tag{11}$$

下面对每一个 A_i 计算 $\chi\left(A_i\right)$，我们固定每一个 i，将区间 $\left[r_{i-1},r_i\right]$ 以临界值 a_i 为界分为两个部分：

$$U_i=\left\{\left(p,q\right)\subseteq C_i \mid f\left(p\right)=g\left(q\right)\le a_i\right\},\quad V_i=\left\{\left(p,q\right)\subseteq C_i \mid f\left(p\right)=g\left(q\right)\ge a_i\right\}$$

显然 $U_i\cap V_i=f^{-1}\left(a_i\right)\times g^{-1}\left(a_i\right)=L_i$。又因为在区间 $\left[r_{i-1},a_i\right)$ 上无临界点，故沿梯度流可将 U_i 形变收缩到 $f^{-1}\left(r_{i-1}\right)\times g^{-1}\left(r_{i-1}\right)=N_{i-1}^f\times N_{i-1}^g$，同理 V_i 可收缩到 $N_i^f\times N_i^g$。因此：

$$\chi\left(U_i\right)=\chi\left(N_{i-1}^f\right)\chi\left(N_{i-1}^g\right),\quad \chi\left(V_i\right)=\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)$$

所以对于 $A_i=U_i\cup V_i$ 我们同样可以应用 Mayer-Vietoris 序列得：

$$\chi\left(A_i\right)=\chi\left(U_i\right)+\chi\left(V_i\right)-\chi\left(U_i\cap V_i\right)=\chi\left(N_{i-1}^f\right)\chi\left(N_{i-1}^g\right)+\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)-\chi\left(L_i\right) \tag{12}$$

将(12)式代入(11)式得：

$$\begin{aligned}\chi\left(C\left(f,g\right)\right)&=\sum_{i=1}^{m}\left(\chi\left(N_{i-1}^f\right)\chi\left(N_{i-1}^g\right)+\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)-\chi\left(L_i\right)\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)\\&=\sum_{i=1}^{m}\chi\left(N_{i-1}^f\right)\chi\left(N_{i-1}^g\right)+\sum_{i=1}^{m}\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)-\sum_{i=1}^{m}\chi\left(L_i\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)\end{aligned} \tag{13}$$

我们令第一个和式中 $j=i-1$ 得：

$$\sum_{i=1}^{m}\chi\left(N_{i-1}^f\right)\chi\left(N_{i-1}^g\right)=\chi\left(N_0^f\right)\chi\left(N_0^g\right)+\sum_{j=1}^{m-1}\chi\left(N_j^f\right)\chi\left(N_j^g\right) \tag{14}$$

第二个和式为：

$$\sum_{i=1}^{m}\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)=\sum_{j=1}^{m-1}\chi\left(N_j^f\right)\chi\left(N_j^g\right)+\chi\left(N_m^f\right)\chi\left(N_m^g\right) \tag{15}$$

将(14)式和(15)式代入(13)式得：

$$\begin{aligned}\chi\left(C\left(f,g\right)\right)&=\left(\chi\left(N_0^f\right)\chi\left(N_0^g\right)+\sum_{j=1}^{m-1}\chi\left(N_j^f\right)\chi\left(N_j^g\right)\right)+\left(\sum_{j=1}^{m-1}\chi\left(N_j^f\right)\chi\left(N_j^g\right)+\chi\left(N_m^f\right)\chi\left(N_m^g\right)\right)\\&\quad-\sum_{i=1}^{m}\chi\left(L_i\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)\\&=\chi\left(N_0^f\right)\chi\left(N_0^g\right)+\chi\left(N_m^f\right)\chi\left(N_m^g\right)+\sum_{j=1}^{m-1}\chi\left(N_j^f\right)\chi\left(N_j^g\right)-\sum_{i=1}^{m}\chi\left(L_i\right)\end{aligned}$$

选取 r_0 充分小(小于 f 和 g 的最小值)以及 r_m 充分大(大于最大值)，则 $f^{-1}\left(r_0\right)=g^{-1}\left(r_0\right)=\varnothing$，$f^{-1}\left(r_m\right)=g^{-1}\left(r_m\right)=\varnothing$ 从而 $\chi\left(N_0^f\right)\chi\left(N_0^g\right)=0$，$\chi\left(N_m^f\right)\chi\left(N_m^g\right)=0$ 于是：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}\chi\left(L_i\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\chi\left(N_i^f\right)\chi\left(N_i^g\right)$$

最后注意到 $L_i=L_{a_i}^f\times L_{a_i}^g$，故 $\chi\left(L_i\right)=\chi\left(L_{a_i}^f\right)\chi\left(L_{a_i}^g\right)$。因此：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}\chi\left(L_{a_i}^{f}\right)\chi\left(L_{a_i}^{g}\right)-\sum_{i=1}^{m-1}\chi\left(N_i^{f}\right)\chi\left(N_i^{g}\right) \tag{16}$$

以上的证明当中关于在临界水平集纤维积的欧拉示性数

3.3. 纤维积上的欧拉示性数

对于单个流形上的 Morse 函数，临界水平集和正则水平集的欧拉示性数公式为：

$$\chi\left(L_i\right)=2\sum_{q=1}^{i-1}\Omega_q+\Omega_i,\chi\left(N_i\right)=2\sum_{q=1}^{i}\Omega_q$$

具体而言，针对于 Morse 函数 f,g 我们定义：$\Omega_i^f=\sum_j(-1)^{\mu_{i,j}^f}$ 和 $\Omega_i^g=\sum_j(-1)^{\mu_{i,j}^g}$ 其中，μ_i^j 为 Morse 函数在临界点 p_i^j 的指数

对于 f 和 g，分别应用公式：

$$\chi\left(L_{a_i}^f\right)=2\sum_{q=1}^{i-1}\Omega_q^f+\Omega_i^f,\quad \chi\left(L_{a_i}^g\right)=2\sum_{q=1}^{i-1}\Omega_q^g+\Omega_i^g$$

$$\chi\left(N_i^f\right)=2\sum_{q=1}^{i}\Omega_q^f,\quad \chi\left(N_i^g\right)=2\sum_{q=1}^{i}\Omega_q^g$$

令 $A_i^f=\sum_{q=1}^{i}\Omega_q^f$ 和 $A_i^g=\sum_{q=1}^{i}\Omega_q^g$，则：

$$\chi\left(L_{a_i}^f\right)=2A_{i-1}^f+\Omega_i^f,\quad \chi\left(L_{a_i}^g\right)=2A_{i-1}^g+\Omega_i^g \tag{17}$$

$$\chi\left(N_i^f\right)=2A_i^f,\quad \chi\left(N_i^g\right)=2A_i^g \tag{18}$$

代入纤维积公式得：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(2A_{i-1}^f+\Omega_i^f\right)\left(2A_{i-1}^g+\Omega_i^g\right)-4\sum_{i=1}^{m-1}A_i^fA_i^g \tag{19}$$

展开第一项：

$$\sum_{i=1}^{m}\left[4A_{i-1}^fA_{i-1}^g+2A_{i-1}^f\Omega_i^g+2A_{i-1}^g\Omega_i^f+\Omega_i^f\Omega_i^g\right]$$

于是：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=4\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^fA_{i-1}^g+2\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^f\Omega_i^g+2\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^g\Omega_i^f+\sum_{i=1}^{m}\Omega_i^f\Omega_i^g-4\sum_{i=1}^{m-1}A_i^fA_i^g$$

注意到 $\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^fA_{i-1}^g=\sum_{i=0}^{m-1}A_i^fA_i^g$，因此

$$4\sum_{i=0}^{m-1}A_i^fA_i^g-4\sum_{i=1}^{m-1}A_i^fA_i^g=4A_0^fA_0^g=0$$

故：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=2\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^f\Omega_i^g+2\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^g\Omega_i^f+\sum_{i=1}^{m}\Omega_i^f\Omega_i^g \tag{20}$$

利用恒等式：$A_i^fA_i^g-A_{i-1}^fA_{i-1}^g=\left(A_{i-1}^f+\Omega_i^f\right)\left(A_{i-1}^g+\Omega_i^g\right)-A_{i-1}^fA_{i-1}^g=A_{i-1}^f\Omega_i^g+A_{i-1}^g\Omega_i^f+\Omega_i^f\Omega_i^g$ 对 $i=1$ 到 m 求

和得：

$$\sum_{i=1}^{m}\left(A_{i-1}^{f}\Omega_{i}^{g}+A_{i-1}^{g}\Omega_{i}^{f}\right)+\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g}=A_{m}^{f}A_{m}^{g}-A_{0}^{f}A_{0}^{g}=A_{m}^{f}A_{m}^{g}$$

因此：

$$\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^{f}\Omega_{i}^{g}+\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^{g}\Omega_{i}^{f}=A_{m}^{f}A_{m}^{g}-\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g} \tag{21}$$

代入(20)式得：

$$\chi(C)=2\left(A_{m}^{f}A_{m}^{g}-\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g}\right)+\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g}=2A_{m}^{f}A_{m}^{g}-\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g} \tag{22}$$

1) 当 m_1 和 m_2 均为偶数时：
此时 $\chi\left(N_i^f\right)=\chi\left(N_i^g\right)=0$，且 $\chi\left(L_{a_i}^f\right)=\Omega_i^f$， $\chi\left(L_{a_i}^g\right)=\Omega_i^g$
我们直接代入(16)式得：

$$\chi\left(C(f,g)\right)=\sum_{i=1}^{m}\chi\left(L_{a_i}^{f}\right)\chi\left(L_{a_i}^{g}\right)-0=\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g} \tag{23}$$

2) 当 m_1 和 m_2 均为奇数时：
有 $A_m^f=0$ 和 $A_m^g=0$ 所以根据(22)式

$$\chi\left(C(f,g)\right)=-\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g}$$

综上：当 m_1+m_2 为偶数时，我们可知：

$$\chi\left(C(f,g)\right)=(-1)^{m_2}\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g} \tag{24}$$

3) 当 m_1 为奇数和 m_2 为偶数时：
此时对于 M_1 有 $\chi\left(L_{a_i}^f\right)=2A_{i-1}^f+\Omega_i^f$， $\chi\left(N_i^f\right)=2A_i^f$；对于 M_2 有 $\chi\left(L_{a_i}^g\right)=\Omega_i^g$， $\chi\left(N_i^g\right)=0$
代入(16)得：

$$\chi\left(C(f,g)\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(2A_{i-1}^{f}+\Omega_{i}^{f}\right)\Omega_{i}^{g}=2\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^{f}\Omega_{i}^{g}+\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g} \tag{25}$$

注意 $\sum_{i=1}^{m}A_{i-1}^{f}\Omega_{i}^{g}=\sum_{1\le q<i\le m}\Omega_{q}^{f}\Omega_{i}^{g}$，所以：

$$\chi(C)=2\sum_{1\le q<i\le m}\Omega_{q}^{f}\Omega_{i}^{g}+\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g}\chi(C) \tag{26}$$

由于 M_1 为奇数维， $\chi(M_1)=\sum_{q=1}^{m}\Omega_q^f=0$，即 $A_m^f=0$。考虑乘积：

$$0=\left(\sum_{q=1}^{m}\Omega_{q}^{f}\right)\left(\sum_{r=1}^{m}\Omega_{r}^{g}\right)=\sum_{i=1}^{m}\Omega_{i}^{f}\Omega_{i}^{g}+\sum_{q\ne r}\Omega_{q}^{f}\Omega_{r}^{g}$$

将非对角项按 $q<r$ 和 $q>r$ 分组：

$$\sum_{q\ne r}\Omega_{q}^{f}\Omega_{r}^{g}=\sum_{1\le q<r\le m}\left(\Omega_{q}^{f}\Omega_{r}^{g}+\Omega_{r}^{f}\Omega_{q}^{g}\right).$$

于是

$$\sum_{i=1}^{m}\Omega_i^f\Omega_i^g=-\sum_{1\le q<r\le m}\left(\Omega_q^f\Omega_r^g+\Omega_r^f\Omega_q^g\right). \tag{27}$$

将(27)代入(26)：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=2\sum_{q<r}\Omega_q^f\Omega_r^g-\sum_{q<r}\left(\Omega_q^f\Omega_r^g+\Omega_r^f\Omega_q^g\right)=\sum_{q<r}\left(\Omega_q^f\Omega_r^g-\Omega_r^f\Omega_q^g\right) \tag{28}$$

即：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=\sum_{1\le q<r\le m}\begin{vmatrix}\Omega_q^f & \Omega_q^g\\ \Omega_r^f & \Omega_r^g\end{vmatrix} \tag{29}$$

4) 当 m_1 为偶数和 m_2 为奇数时，由对称得：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=-\sum_{1\le q<r\le m}\begin{vmatrix}\Omega_q^f & \Omega_q^g\\ \Omega_r^f & \Omega_r^g\end{vmatrix} \tag{30}$$

综上：当 m_1+m_2 为奇数时，我们可得到：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=\left(-1\right)^{m_2}\sum_{1\le q<r\le m}\begin{vmatrix}\Omega_q^f & \Omega_q^g\\ \Omega_r^f & \Omega_r^g\end{vmatrix} \tag{31}$$

所有由(24)和(31)可得：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=\begin{cases}\left(-1\right)^{m_2}\sum_{i=1}^{m}\Omega_i^f\Omega_i^g & m_1+m_2\text{ 为偶数}\\ \left(-1\right)^{m_2}\sum_{1\le q<r\le m}\begin{vmatrix}\Omega_q^f & \Omega_q^g\\ \Omega_r^f & \Omega_r^g\end{vmatrix} & m_1+m_2\text{ 为奇数}\end{cases} \tag{32}$$

4. 例子

1) 取两个偶数维流形 $M_1=S^1$， $M_2=S^2$ 取 Morse 函数 $f\left(\theta\right)=\cos\theta$ 。临界点为 $\theta=0$ （最大值，指数为 1)和 $\theta=\pi$ （最小值，指数为 0)。设临界值分别为 1 和−1，则： $\Omega_{-1}^f=\left(-1\right)^0=1$， $\Omega_1^f=\left(-1\right)^1=-1$

取 Morse 函数 $g\left(x,y,z\right)=z$ 。临界值为−1 和 1 指数分别为 $\Omega_{-1}^g=1$， $\Omega_1^g=1$ 此时我们知道临界值对齐，取他们的并集 $a_1=-1,a_2=1$ 此时 $m_1=1,m_2=2$

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=\begin{vmatrix}\Omega_{-1}^f & \Omega_{-1}^g\\ \Omega_1^f & \Omega_1^g\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot1-1\cdot\left(-1\right)=2$$

2) 取两奇数维流形 $M_1=S^3$， $M_2=\mathbb{R}P^3$，在 $M_1=S^3$ 存在一个 Morse 函数 f （直接由 Morse 理论去进行构造即可)有四个临界点，其指数分别为 $0,1,2,3$ ，且临界值互异。设临界值排序为 $a_1<a_2<a_3<a_4$ ，则：

$$\Omega_1^f=\left(-1\right)^0=1,\Omega_2^f=\left(-1\right)^1=-1,\Omega_3^f=\left(-1\right)^2=1,\Omega_4^f=\left(-1\right)^3=-1$$

在 $M_2=\mathbb{R}P^3$ 上，取标注 Morse 函数 g，其同样有四个临界点，指数分别为 $0,1,2,3$ 且可通过调整使临界值与 f 的临界值完全对齐，即 a_1,a_2,a_3,a_4 是 g 的临界值。于是：

$$\Omega_1^g=1,\Omega_2^g=-1,\Omega_3^g=1,\Omega_4^g=-1$$

此时 $m_1=m_2=3$ 均为奇数，有定理 1.1 得：

$$\chi\left(C\left(f,g\right)\right)=-\sum_{i=1}^{m}\Omega_i^f\Omega_i^g=\left(-1\right)^3\sum_{i=1}^{4}\Omega_i^f\Omega_i^g=-\left(1\cdot 1+\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)+1\cdot 1+\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)\right)=-4$$

参考文献

[1] Morse, M. (1934) The Calculus of Variations in the Large. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/coll/018

[2] Milnor, J.W. (1963) Morse Theory. Princeton University Press.

[3] Smale, S. (1961) On Gradient Dynamical Systems. *The Annals of Mathematics*, **74**, 199-206. https://doi.org/10.2307/1970311

[4] 王萼芳. 高等代数[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981: 47-49.

[5] Bott, R. (1982) Lectures on Morse Theory, Old and New. In: MacPherson, R.D., Ed., *Raoul Bott*: *Collected Papers*, Birkhäuser Boston, 120-147. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2564-5_8

[6] Bott, R. (1954) Nondegenerate Critical Manifolds. *The Annals of Mathematics*, **60**, 248-261. https://doi.org/10.2307/1969631

[7] Audin, M. (2012) The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds. Birkhäuser.

[8] Hatcher, A. (2005) Algebraic Topology. Tsinghua University Press.

[9] Kamiyama, Y. (2025) The Euler Characteristic of the Fiber Product of Morse Functions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **62**, 71-80.