Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 46-52
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164090

Hans汉斯

一类二阶偏微分方程边值问题解的相似构造法

谢佳佳

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2026年3月4日；录用日期：2026年4月9日；发布日期：2026年4月17日

摘　要

本文针对一类二阶偏微分方程边值问题，提出一种基于相似结构的求解方法。该方法通过定解方程的基础解系构造引解函数，再将其结合边界条件系数形成相似核函数，进而得到完整解式。所得解呈现稳定的连分式结构，不随外边界条件形式的变化而改变其整体框架。该方法避免了传统求解中繁琐的推导过程，使解析解构造更为简洁高效，并具有良好的统一性和适用性。

关键词

相似结构，微分方程，边值问题，相似核函数

Similar Construction Method for Solution of a Class of Second-Order Partial Differential Equation Boundary Value Problems

Jiajia Xie

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: March 4, 2026; accepted: April 9, 2026; published: April 17, 2026

Abstract

This paper proposes a similarity-based method for solving a class of second-order partial differential equation boundary value problems. The method constructs guiding functions from the fundamental solution system of the governing equation and then combines them with boundary-condition coefficients to form a similarity kernel function, from which the complete analytical solution can be systematically derived. The resulting solutions exhibit a stable continued-fraction structure whose overall framework remains unchanged despite variations in the form of the external boundary conditions. This approach avoids the cumbersome derivations required by traditional solution

文章引用: 谢佳佳. 一类二阶偏微分方程边值问题解的相似构造法[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 46-52.
DOI: 10.12677/pm.2026.164090

methods, making the construction of analytical solutions more concise and efficient, while offering strong consistency and broad applicability.

Keywords

Similarity Structure, Differential Equation, Boundary Value Problem, Similarity Kernel Function

1. 引言

随着科学技术的快速发展，许多工程与应用科学中的实际问题往往需要通过建立微分方程模型并求解相应的边值问题来获得定量描述。尤其是在油藏渗流研究中，如分形油藏[1]、双孔油藏[2]、分形双孔油藏[3]、多层油藏[4]以及双孔合采油藏[5]等，这些模型在建立过程中通常会转化为一类变型 Bessel 方程的边值问题。因此，发展能够有效求解此类偏微分方程边值问题的数学方法，对于精准刻画复杂油藏系统具有重要意义。

对于一些典型的边值问题，早期已有学者对其解的表达式进行了系统研究。研究发现，其解可统一表示为连分式的结构形式。最初，李顺初对二阶常系数齐次线性微分方程的边值问题[6]展开研究，随后又整理了二阶齐次线性微分方程边值问题解式的相似结构[7]，证明它们的解可写成连分式形式。之后，李顺初在此基础上对相似结构的研究进行了总结[8]，并提出了“相似构造法”，为处理复杂微分方程边值问题提供了一种统一的数学框架。基于此思想，其他研究者将相似构造法进一步推广至 Bessel 方程、Weber 方程、Tschebysheff 方程和 Legendre 方程等多种特殊函数体系[9]-[12]，从而形成了面向不同边值条件的通用表达结构，有效推动了复杂物理模型解析方法的发展。

随着油气藏开发对动态特征描述的精细化需求不断提高，研究者逐渐将相似构造思想引入更为实际的油藏渗流模型求解之中。在传统研究中，油藏模型通常采用理想化的外边界条件(如封闭、定压或无穷大)，这在一定程度上限制了对真实地层响应的刻画。为弥补这一缺陷，弹性外边界条件被逐步引入油藏渗流分析中[13]-[15]，使得模型求解自然转化为更广泛的偏微分方程边值问题。在这种背景下，本文基于相似构造思想，针对此类偏微分方程边值问题给出统一的相似结构表达式。该方法不仅能够在不同外边界条件下保持解结构的一致性，还能够显著简化求解过程，降低处理复杂偏微分方程的计算难度。

2. 预备知识

纸型

在求解过程中，需要处理由变型 Bessel 方程产生的特殊函数组合。为使推导过程更为简洁，本节首先引入一类对后续表达式具有统一化作用的组合函数 $\psi_{m,n}(x,y,z)$ 并给出其相关的微分性质。随后，针对求解过程中将出现的扩展变型 Bessel 方程，给出其通解。

引理 1 由 n 阶第一类变型 Bessel 函数 $I_n(*)$ 和 m 阶第二类变型 Bessel 函数 $K_m(*)$ 组合得

$$\psi_{m,n}(x,y,z)=K_m(xz)I_n(yz)+(-1)^{m-n+1}I_m(xz)K_n(yz)$$

该函数满足如下微分性质：

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_{m,n}(x,y,z)=\frac{m}{x}\psi_{m,n}(x,y,z)-z\psi_{m+1,n}(x,y,z) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\psi_{m,n}(x,y,z)=\frac{m}{y}\psi_{m,n}(x,y,z)+z\psi_{m,n+1}(x,y,z) \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_{m,n}(x,y,z)=\frac{m+n}{z}\psi_{m,n}(x,y,z)-x\psi_{m+1,n}(x,y,z)+y\psi_{m,n+1}(x,y,z) \tag{3}$$

引理 2 一类扩展变型 Bessel 方程

$$x^2y''+Axy'-B(z)x^Cy=0 \tag{4}$$

当 A,C 为任意常数，$B(z)$ 是有关 z 的函数，且 $C\neq 0$ 时，则方程通解[16]为：

$$y=A_1x^{\frac{1-A}{2}}I_v\left(\frac{2\sqrt{B(z)}}{C}x^{\frac{C}{2}}\right)+A_2x^{\frac{1-A}{2}}K_v\left(\frac{2\sqrt{B(z)}}{C}x^{\frac{C}{2}}\right) \tag{5}$$

证明 对方程(4)作变量替换

$$s=x^{-\frac{1-A}{2}}y,t=\frac{2\sqrt{B}}{C}x^{\frac{C}{2}}$$

则方程(4)可化简为如下变型 Bessel 方程

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-\left(t^2+\left(\frac{1-A}{C}\right)^2\right)s=0 \tag{6}$$

又方程(6)的通解为

$$s=A_1I_v(t)+A_2K_v(t) \tag{7}$$

由此可得到方程(4)的通解如式(5)所示。

2. 主要定理及证明过程

本文研究内容为一类二阶偏微分方程边值问题，即

$$\begin{cases}x^2\dfrac{\partial^2y(x,z)}{\partial x^2}+Ax\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}-zx^qy(x,z)=0\\ \left[Ey(x,z)+(G+EF)\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=a}=D\\ \left[\left(H_1x^2+H_2x+H_3\right)\dfrac{\partial^2y(x,z)}{\partial z^2}+x\dfrac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=b}=0\end{cases} \tag{8}$$

其中 A,D,E,F,G,a,b,q 为常数，且 $D\neq 0,0<a<x<b$。

定理 1 若边值问题(8)存在唯一解，其解可用如下一个连分式表示

$$y=D\cdot\cfrac{1}{E+\cfrac{G}{F+\phi(a,z)}}\cdot\frac{1}{F+\phi(a,z)}\cdot\phi(x,z) \tag{9}$$

其中 $\phi(x,z)$ 是相似核函数，其表示方式为

$$\phi(x,z)=\frac{\left(H_1b^2+H_2b+H_3\right)\varphi_{0,0}^{0,2}(x,b,z)-b\varphi_{0,1}^{0,0}(x,b,z)}{\left(H_1b^2+H_2b+H_3\right)\varphi_{1,0}^{0,2}(1,b,z)-b\varphi_{1,1}^{0,0}(1,b,z)} \tag{10}$$

其中 $\varphi_{0,0}^{0,0}(x,\xi,z),\varphi_{1,0}^{0,0}(x,\xi,z),\varphi_{0,1}^{0,0}(x,\xi,z),\varphi_{1,1}^{0,0}(x,\xi,z),\varphi_{0,0}^{0,2}(x,\xi,z),\varphi_{1,0}^{0,2}(x,\xi,z)$ 称为核函数的引解函数，其表示方法为

$$\varphi_{0,0}^{0,0}(x,\xi,z)=y_1(x,z)y_2(\xi,z)-y_2(x,z)y_1(\xi,z) \tag{11}$$

$$\varphi_{1,0}^{0,0}(x,\xi,z)=\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}y_2(\xi,z)-\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}y_1(\xi,z) \tag{12}$$

$$\varphi_{0,1}^{0,0}(x,\xi,z)=y_1(x,z)\frac{\partial y_2(\xi,z)}{\partial \xi}-y_2(x,z)\frac{\partial y_1(\xi,z)}{\partial \xi} \tag{13}$$

$$\varphi_{1,1}^{0,0}(x,\xi,z)=\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\frac{\partial y_2(\xi,z)}{\partial \xi}-\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\frac{\partial y_1(\xi,z)}{\partial \xi} \tag{14}$$

$$\varphi_{0,0}^{0,2}(x,\xi,z)=y_1(x,z)\frac{\partial^2 y_2(\xi,z)}{\partial z^2}-y_2(x,z)\frac{\partial^2 y_1(\xi,z)}{\partial z^2} \tag{15}$$

$$\varphi_{1,0}^{0,2}(x,\xi,z)=\frac{\partial y_1(x,z)}{\partial x}\frac{\partial^2 y_2(\xi,z)}{\partial z^i}-\frac{\partial y_2(x,z)}{\partial x}\frac{\partial^2 y_1(\xi,z)}{\partial z^i} \tag{16}$$

证明 边值问题(8)中的方程 $x^2\frac{\partial^2 y(x,z)}{\partial x^2}+Ax\frac{\partial y(x,z)}{\partial x}-zx^q y(x,z)=0$ 有两个线性无关解分别为 $y_1(x,z)$，$y_2(x,z)$，则其通解可表示为

$$y(x,z)=A_1y_1(x,z)+A_2y_2(x,z) \tag{17}$$

将式(17)代入到边值问题(8)的左、右边界条件中可以得到

$$A_1\left[Ey_1+(G+EF)\frac{\partial y_1}{\partial x}\right]\bigg|_{x=a}+A_2\left[Ey_2+(G+EF)\frac{\partial y_2}{\partial x}\right]\bigg|_{x=a}=D \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&A_1\left[\left(H_1x^2+H_2x+H_3\right)\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}+x\frac{\partial y_1}{\partial x}\right]\bigg|_{x=a}\\&+A_2\left[\left(H_1x^2+H_2x+H_3\right)\frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2}+x\frac{\partial y_2}{\partial x}\right]\bigg|_{x=a}=0\end{aligned} \tag{19}$$

由于边值问题(8)的解存在且唯一，则联立式(18)和(19)可得有关待定系数 A_1,A_2 的系数矩阵 $\Delta\neq 0$，且

$$\begin{aligned}\Delta=&E\left[\left(H_1b^2+H_2b+H_3\right)\varphi_{0,0}^{0,2}(a,b,z)+b\varphi_{0,1}^{0,0}(a,b,z)\right]\\&+(G+EF)\left[\left(H_1b^2+H_2b+H_3\right)\varphi_{1,0}^{0,2}(a,b,z)+b\varphi_{1,0}^{0,0}(a,b,z)\right]\end{aligned} \tag{20}$$

根据克拉默法则可求得系数 A_1,A_2 为

$$A_1=\frac{D\left[\left(H_1x^2+H_2x+H_3\right)\frac{\partial^2 y_2}{\partial z^2}+x\frac{\partial y_2}{\partial x}\right]\bigg|_{x=b}}{\Delta} \tag{21}$$

$$A_2=-\frac{D\left[\left(H_1x^2+H_2x+H_3\right)\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2}+b\frac{\partial y_1}{\partial x}\right]\bigg|_{x=b}}{\Delta} \tag{22}$$

将 A_1, A_2 带入通解的表达式(17)中可得

$$y = D \cdot \frac{\left(H_1 b^2 + H_2 b + H_3\right)\varphi_{0,0}^{0,i}\left(x,b,z\right) + b\varphi_{0,1}^{0,0}\left(x,b,z\right)}{\Delta} \tag{23}$$

结合相似核函数(10)整理可得

$$y = D \cdot \frac{1}{E + \dfrac{G}{F + \phi\left(a,z\right)}} \cdot \frac{1}{F + \phi\left(a,z\right)} \cdot \phi\left(x,z\right) \tag{24}$$

即为式(9)。

3. 相似构造法步骤

为便于应用，我们给出求解类似边值问题(8)的具体步骤

第一步：求解出定解方程的线性无关解 $y_1\left(x,z\right), y_2\left(\xi,z\right)$；

第二步：由线性无关解构造引解函数 $\varphi_{0,0}^{0,0}\left(x,\xi,z\right), \varphi_{1,0}^{0,0}\left(x,\xi,z\right), \varphi_{0,1}^{0,0}\left(x,\xi,z\right), \varphi_{1,1}^{0,0}\left(x,\xi,z\right)$，

$$\varphi_{0,0}^{0,i}\left(x,\xi,z\right), \varphi_{1,0}^{0,i}\left(x,\xi,z\right);$$

第三步：利用右边界条件 $\left[\left(H_1 x^2 + H_2 x + H_3\right)\dfrac{\partial^2 y\left(x,z\right)}{\partial z^2} + x\dfrac{\partial y\left(x,z\right)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=b}$ 中的系数 H_1, H_2, H_3 和引解函数构造相似核函数 $\phi\left(x,z\right)$，如式(10)所示,并计算其值；

第四步：利用左边界条件 $\left[Ey\left(x,z\right) + \left(G + EF\right)\dfrac{\partial y\left(x,z\right)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=a} = D$ 的系数 E, F, G, D 和 $\Phi\left(x,z\right)$ 可构造出边值问题(8)的解，如式(9)所示。

4. 应用举例

求解如下一个具体的边值问题

$$\begin{cases} x^2 \dfrac{\partial^2 y\left(x,z\right)}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial y\left(x,z\right)}{\partial x} - zx^2 y\left(x,z\right) = 0 \\ \left[3y\left(x,z\right) + 13\dfrac{\partial y\left(x,z\right)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=1} = 2 \\ \left[\left(2x^2 + x + 1\right)\dfrac{\partial^2 y\left(x,z\right)}{\partial z^2} + x\dfrac{\partial y\left(x,z\right)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=2} = 0 \end{cases} \tag{25}$$

通过对比边值问题(8)和边值问题(25)可得 $A = 1, D = 2, E = 3, F = 4, G = 1, H_1 = 2, H_2 = 1, H_3 = 1, a = 1, b = 2$，按照第三节所给出的相似构造法步骤来进行求解

第一步：找到定解方程的线性无关解

由引理 2 可得定解方程 $x^2 \dfrac{\partial^2 y\left(x,z\right)}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial y\left(x,z\right)}{\partial x} - zx^2 y\left(x,z\right) = 0$ 的两个线性无关解为 $I_0\left(x\sqrt{z}\right), K_0\left(x\sqrt{z}\right)$；

第二步：构造引解函数

根据线性无关解 $I_0\left(x\sqrt{z}\right), K_0\left(x\sqrt{z}\right)$ 构造引解函数，由式(11)~(16)可得

$$\varphi_{0,0}(x,y,z)=\psi_{0,0}\left(x,y,\sqrt{z}\right) \tag{26}$$

$$\varphi_{0,1}=\sqrt{z}\psi_{0,1}\left(x,y,\sqrt{z}\right) \tag{27}$$

$$\varphi_{1,0}=-\sqrt{z}\psi_{1,0}\left(x,y,\sqrt{z}\right) \tag{28}$$

$$\varphi_{1,1}=-z\psi_{1,1}\left(x,y,\sqrt{z}\right) \tag{29}$$

$$\varphi_{0,0}^{0,2}(x,y,z)=K_0\left(x\sqrt{z}\right)\frac{\partial^2 I_0\left(y\sqrt{z}\right)}{\partial z^2}-I_0\left(x\sqrt{z}\right)\frac{\partial^2 K_0\left(x\sqrt{z}\right)}{\partial z^2} \tag{30}$$

$$\varphi_{1,0}^{0,2}(x,y,z)=\frac{\partial K_0\left(x\sqrt{z}\right)}{\partial x}\frac{\partial^2 I_0\left(y\sqrt{z}\right)}{\partial z^2}-\frac{\partial I_0\left(x\sqrt{z}\right)}{\partial x}\frac{\partial^2 K_0\left(x\sqrt{z}\right)}{\partial z^2} \tag{31}$$

第三步：构造相似核函数

利用右边界条件$\left[\left(2x^2+x+1\right)\frac{\partial^2 y(x,z)}{\partial z^2}+x\frac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=2}=0$中的系数$H_1=2,H_2=1$，$H_3=1,b=2$和式(10)可得相似核函数为

$$\phi(x,z)=\frac{11\varphi_{0,0}^{0,2}(x,2,z)-2\varphi_{0,1}^{0,0}(x,2,z)}{11\varphi_{1,0}^{0,2}(1,2,z)-2\varphi_{1,1}^{0,0}(1,2,z)} \tag{32}$$

第四步：构造相似结构解

利用左边界条件$\left[3y(x,z)+13\frac{\partial y(x,z)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=1}=2$中的系数$D=2,E=3,F=4,G=1,a=1$

和式(9)可得边值问题(25)的解为

$$y=2\cdot\frac{1}{3+\dfrac{1}{4+\phi(1,z)}}\cdot\frac{1}{4+\phi(1,z)}\cdot\phi(x,z) \tag{33}$$

5. 结论

在求解本文涉及的二阶偏微分方程边值问题(8)时，需找到定解方程的基础解系并构造出引解函数，随后，从右边界条件中提取相应的系数，并与构造好的引解函数相结合，建立具有普适性的相似核函数；该核函数作为连接边界条件与方程解的核心结构单元，能够反映模型在不同外边界条件下的统一数学形式。最终，再将左边界条件与相似核函数进行组合，便可系统地构建出边值问题的完整解表达式。

在这一过程中得到的解式通常呈现为具有层级结构的连分式形式，其显著特点在于：尽管外边界条件的形式或具体系数发生改变，解的整体相似结构却保持稳定不变，仅在相似核函数的具体形式上体现差异。这一结构性的统一性使得在不同外边界条件之间建立联系变得更加直接。

相似构造法应用于二阶偏微分方程的边值问题，不仅避免了繁琐的高阶求导与复杂代数推导，也减少了传统求解方法中常见的计算量大、表达式不易处理等困难。借助该方法，可以在保持数学严谨性的基础上，提高解的构造效率和整体可靠性，使得最终获得的解析表达式更加简洁、清晰且便于用于试井分析。

参考文献

[1] 徐文昭. 基于相似结构的分形油藏试井分析模型解及其分析软件的研制[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学,

2008.

[2] 暴喜涛. 双孔油藏球向非线性渗流模型的相似构造法的研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2013.

[3] 李顺初, 张建军. 分形双孔介质油藏试井分析解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2006, 25(1): 40-43.

[4] 黄荣军. 多层油藏渗流模型解的相似构造法研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2014.

[5] 李全勇, 李顺初, 李伟, 等. 基于相似结构的双孔合采油藏模型和求解[J]. 大学数学, 2013, 29(1): 56-60.

[6] 李顺初. 二阶常系数齐次线性微分方程边值问题的解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2007(1): 84-85+104.

[7] 李顺初. 二阶齐次线性微分方程的边值问题的解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2009, 28(5): 40-41+90.

[8] 李顺初. 微分方程解的相似结构初探与展望[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2010, 29(2): 223-226+238.

[9] 陈宗荣. 复合变型 Bessel 方程的一类边值问题的相似构造算法设计[J]. 电子科技大学学报, 2012, 41(3): 459-462.

[10] 黄荣军, 李顺初, 许东旭. 求解第一种 Weber 方程边值问题的相似构造法[J]. 绵阳师范学院学报, 2012, 31(11): 1-5+15.

[11] 郑鹏社, 杨雨, 李顺初, 等. 三区复合型 Tschebycheff 方程边值问题的相似构造法[J]. 徐州工程学院学报(自然科学版), 2022, 37(4): 8-14.

[12] 郑鹏社, 杨雨, 李顺初. 三区复合型连带 Legendre 方程边值问题的相似构造法[J]. 温州大学学报(自然科学版), 2023, 44(3): 11-19.

[13] Li, S.C., Zhao, C.C., Zheng, P.S., *et al*. (2019) Analysis of Oil and Gas Flow Characteristics in the Reservoir with the Elastic Outer Boundary. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **175**, 280-285. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.12.042

[14] Zheng, P.S., Tang, J., Leng, L.H., *et al*. (2022) Solving Nonlinear Ordinary Differential Equations with Variable Coefficients by Elastic Transformation Method. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **69**, 1297-1320. https://doi.org/10.1007/s12190-022-01791-2

[15] Sun, C.Y., Zheng, P.S., Qian, X., *et al*. (2023) Similar Construction Method for Non-Newtonian Power-Law Fluid Seepage Models with Elastic Outer Boundary Conditions. *Archive of Applied Mechanics*, **93**, 3609-3624. https://doi.org/10.1007/s00419-023-02456-7

[16] 刘式适, 刘式达. 特殊函数[M]. 第 2 版. 北京: 气象出版社, 2002.