Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 316-322
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164117

线性空间中集值优化问题的II型E-Benson真有效解及其非线性标量化

殷世林

重庆理工大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2026年3月4日；录用日期：2026年4月5日；发布日期：2026年4月27日

摘 要

集值优化问题是向量优化，多目标优化及非线性规划的推广与统一，广泛应用于数学规划、工程技术、数理经济及社会经济系统等领域。本文在实线性空间框架下，针对集值优化问题，研究了II型E-Benson真有效解及其非线性标量化。全文安排如下：在第一节，我们介绍了研究集值优化问题非线性标量化的意义和动机。在第二节，我们回顾了一些基本概念和定义，包括锥包、向量闭包和改进集等。在第三节，我们在一般线性空间中，给出了集值优化问题的两种真有效解并举例进行说明。在第四节，在实赋范线性空间中，利用非线性函数给出了集值优化问题的非线性标量化刻画的极小解。

关键词

集值优化，II型E-Benson真有效解，非线性标量化

Type II E-Benson Properly Efficient Solutions for Set-Valued Optimization Problems in Linear Spaces and Their Nonlinear Scalarization

Shilin Yin

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: March 4, 2026; accepted: April 5, 2026; published: April 27, 2026

Abstract

Set-valued optimization problem is the generalization and unification of vector optimization, multi-

文章引用: 殷世林. 线性空间中集值优化问题的 II 型 E-Benson 真有效解及其非线性标量化[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 316-322. DOI: 10.12677/pm.2026.164117

objective optimization and nonlinear programming. It is widely used in mathematical programming, engineering technology, mathematical economy and social economic system. In this paper, under the framework of real linear space, the type II-Benson properly efficient solution and its nonlinear scalarization are studied for set-valued optimization problems. This paper is organized as follows: In Section 1, we introduce the significance and motivation of studying the nonlinear scalarization of set-valued optimization problems. In Section 2, we review some basic concepts and definitions, including cone hulls, vector closures and improvement sets. In Section 3, we give two proper efficiently solutions of set-valued optimization problems in real linear spaces and illustrate them with examples. In Section 4, in real normed linear spaces, the minimal solution of the nonlinear scalarization characterization of set-valued optimization problems is given by using nonlinear functions.

Keywords

Set-Valued Maps, Type II *E*-Benson Properly Efficient Solution, Nonlinear Scalarization

1. 绪论

在变分问题、不动点理论、控制论以及函数逼近论等多个数学研究领域中，许多实际问题的抽象描述与理论建模均可归结为集值映射的形式。集值优化问题作为向量优化、多目标优化以及非线性规划的重要推广和统一，不仅深化了相关数学理论的研究，还在管理科学理论、工程技术、数理经济以及社会经济系统等诸多交叉学科中展现出广泛的应用前景，因此集值优化问题正日益成为学术界关注的研究热点。

线性标量化方法与非线性标量化方法是处理集值优化问题的两类重要手段。在传统的研究框架下，线性标量化方法通常需要借助目标函数具备某种凸性或广义凸性条件，从而实现对集值优化问题的有效处理。然而，在大量复杂的实际问题中，许多函数往往难以满足上述凸性假设，这在一定程度上限制了线性标量化方法的适用范围。针对这一局限，一些学者开始探索通过构造非线性标量化函数的方式，系统研究集值优化问题的非线性标量化方法。

郑喜印[1]在一般赋范空间中，针对有基闭凸锥诱导的序结构，用单调 Minkowski 泛函刻画了一般集的 Henig 真有效点，用连续范数刻画了有界集的 Henig 真有效点，获得了弱紧集上 Henig 真有效点集在弱拓扑下的连通性。Dhingra 和 Lalitha [2]在实 Hausdorff 拓扑空间中研究了集值优化问题的 ε-弱有效解，并利用 Gerstewitz 泛函对其进行非线性标量化刻画。Chinaie 和 Fakhar 等[3]在实线性空间中利用向量闭包和代数内部等代数工具，研究非凸集值优化问题的弱极小解，利用 Gerstewitz 泛函得到非线性标量化定理。徐义红等[4]在局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间中，利用正齐次，次可加且严格单调的连续非线性泛函对集值均衡问题的近似 Benson 真有效解进行刻画，得到非线性标量化充要条件。周志昂等[5]在局部凸空间的框架下，引入变序结构集值优化问题(SVOPVOS)的近似弱有效解，在没有任何凸性的情况下，建立了(SVOPVOS)的非线性标量化定理。

此外，通过“改进集 E”来统一刻画各种解的概念近年来成为研究热点。赵克全和杨新民[6]在实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间中，将改进集与 Benson 真有效性相结合，提出了集值向量优化问题的 E-Benson 真有效解的概念，在集值映射为 E-次似凸的凸性假设下，建立了择一性定理，进而对 E-Benson 真有效解进行标量化刻画，获得了拉格朗日乘子定理。周志昂等[7]在实局部凸空间的框架下研究集值优化

问题，基于改进集给出了 E-超有效解的定义，并在集值映射为近似 E-次似凸的条件下，建立了相应的充分与必要标量化定理。周志昂等[8]将集合的 II 型 E-Benson 真有效点从赋范空间推广到局部凸空间，引进了集值优化问题的 II 型 E-Benson 真有效解，得到了该解在局部凸空间框架下的非线性标量化定理。

Kasimbeyli [9]基于一般的对偶锥，提出了增广对偶锥，引入一类非线性标量化函数，得到了非凸向量优化问题的非线性标量化结果。本文利用这种非线性锥标量化方法，在实线性空间中，对 II 型 E-Benson 真有效解进行非线性标量化刻画，得到集值优化问题的非线性标量化结果。

2. 预备知识

设 X 和 Y 是实线性空间，Y 的代数对偶空间为 Y^*。数零和零向量分别用 0 和 $\mathbf{0}$ 表示。我们记 $\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$。设 $S \subseteq Y$：(i) S 称为一个凸集当且仅当对任意的 $s_1, s_2 \in S$ 和 $\lambda \in [0,1]$，有 $\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2 \in S$；(ii) S 称为一个锥当且仅当对任意的 $s \in S$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}_+$，有 $\lambda s \in S$；(iii) S 称为点的当且仅当 $S \cap (-S) = \{\mathbf{0}\}$；(iv) S 称为非平凡的当且仅当 $S \neq \{\mathbf{0}\}$ 和 $S \neq Y$。

设 $\varnothing \neq K \subseteq Y$，$K$ 的锥包 $\mathrm{cone}K$、代数内部 $\mathrm{cor}K$ 和向量闭包 $\mathrm{vcl}K$ 分别定义为：

$$\mathrm{cone}K := \{\alpha k : \alpha \geq 0, k \in K\},$$

$$\mathrm{cor}K := \{x \in K : \forall d \in Y, \exists \alpha > 0, \forall \beta \in [0,\alpha], x + \beta d \in K\}$$

和

$$\mathrm{vcl}K := \{x \in Y : \exists d \in Y, \forall \alpha > 0, \exists \beta \in]0,\alpha], x + \beta d \in K\}.$$

设 $\varnothing \neq K \subseteq Y$，(i) 如果 $\mathrm{vcl}K = K$，则称 K 是向量闭的；(ii) 如果 $\mathrm{cor}K = K$，则称 K 是代数开的。从现在开始，我们假设 C 是 Y 中代数内部非空的点的向量闭凸锥。C 的代数对偶锥和严格代数对偶锥分别定义为

$$C^+ := \{y^* \in Y^* : \langle c, y^* \rangle \geq 0, \forall c \in C\}$$

和

$$C^{+i} := \{y^* \in Y^* : \langle c, y^* \rangle > 0, \forall c \in C \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

其中，$\langle c, y^* \rangle$ 为线性连续泛函 y^* 在点 c 处的值。

定义 2.1 [10] 设 C 是 Y 中代数内部非空的点的向量闭凸锥，E 是 Y 中的非空子集。如果有 $\mathbf{0} \notin E$ 且 $E + C = E$，则称 E 是相对于 C 的改进集。Y 中所有相对于 C 的改进集构成的集合记为 $\mathfrak{L}_C$。

在本节中，我们假设 $E \in \mathfrak{L}_C$，M 是 Y 中的一个非空子集。我们在一般线性空间中利用改进集 E 引入两种 Benson 真有效点。

定义 2.2 设 $m \in M$，如果有

$$\mathrm{vclcone}(M + E - m) \cap (-C) = \{\mathbf{0}\},$$

则称 m 是集合 M 的 I 型 E-Benson 真有效点。$O^E_{(\mathrm{BS,I})}(M)$ 表示所有 M 的 I 型 E-Benson 真有效点构成的集合。

定义 2.3 设 $m \in M$，如果有

$$\mathrm{vclcone}(M + C - m) \cap (-E) = \varnothing,$$

则称 m 是集合 M 的 II 型 E-Benson 真有效点。$O^E_{(\mathrm{BS,II})}(M)$ 表示所有 M 的 II 型 E-Benson 真有效点构成的集合。

注 2.1 如果 Y 是实拓扑向量空间，$E=C\setminus\{\mathbf{0}\}$，则定义 2.3 退化为文献[11]中的 Benson 真有效点。

3. II 型 *E*-Benson 真有效解

设 A 是 X 的非空子集，$F:A\rightrightarrows Y$ 是 A 上的集值映射。现在我们考虑下列集值优化问题(简称 SVOP)：

$$\begin{cases}\min F(x)\\ x\in S,\end{cases}\tag{SVOP}$$

其中，可行集 $S\subseteq A$，我们记 $F(S):=\bigcup_{x\in S}F(x)$。

定义 3.1 设 $\bar{x}\in S$，$\bar{y}\in F(\bar{x})$。如果 $\operatorname{vclcone}\left(F(S)+E-\bar{y}\right)\cap(-C)=\{\mathbf{0}\}$，则称 $\bar{x}$ 为(SVOP)的 I 型 *E*-Benson 真有效解。$(\bar{x},\bar{y})$ 被称为(SVOP)的 I 型 *E*-Benson 真有效元。

下面给出一个例子描述定义 3.1。

例 3.1 设 $X=Y:=\mathbb{R}^2$，$E:=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:y_1\geq 0,y_2\geq 0,y_1+y_2\geq 1\}$，$C:=\mathbb{R}^2_+$ 和 $S=A:=[0,1]\times[-1,0]$。对任意 $x=(x_1,x_2)\in A$，定义集值映射 $F:A\rightrightarrows Y$ 如下：

$$F(x)=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:0\leq y_1\leq x_1,x_2\leq y_2\leq 0,y_1+y_2\leq 0\}\quad\forall x=(x_1,x_2)\in A.$$

易知 $E\in\mathfrak{L}_C$ 且 $F(S)=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:0\leq y_1\leq 1,-1\leq y_2\leq 0,y_1+y_2\leq 0\}$。设 $\bar{x}=(1,-1)\in S$ 和 $\bar{y}=(0,0)\in F(\bar{x})$，则 $\operatorname{vclcone}\left(F(S)+E-\bar{y}\right)\cap(-C)=\{\mathbf{0}\}$。此时，$(\bar{x},\bar{y})$ 是(SVOP)的 I 型 *E*-Benson 真有效元。

定义 3.2 设 $\bar{x}\in S$，$\bar{y}\in F(\bar{x})$。如果 $\operatorname{vclcone}\left(F(S)+C-\bar{y}\right)\cap(-E)=\varnothing$，则称 $\bar{x}$ 为(SVOP)的 II 型 *E*-Benson 真有效解。$(\bar{x},\bar{y})$ 被称为(SVOP)的 II 型 *E*-Benson 真有效元。

下面给出一个例子描述定义 3.2。

例 3.2 让 $X=Y:=\mathbb{R}^2$，$E:=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:y_1\geq 1,y_2\geq 1\}$ $C:=\mathbb{R}^2_+$ 和 $S=A:=[-1,0]\times[0,1]$。对任意 $x=(x_1,x_2)\in A$，我们定义集值映射 $F:A\rightrightarrows Y$ 如下：

$$F(x)=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:(y_1,y_2)\in[0,-x_1]\times[0,x_2]\},\quad\forall x=(x_1,x_2)\in A.$$

易知 $E\in\mathfrak{L}_C$ 且 $F(S)=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:0\leq y_1\leq 1,0\leq y_2\leq 1\}$。设 $\bar{x}=(-1,0)\in S$ 和 $\bar{y}=(0,0)\in F(\bar{x})$，由 $\operatorname{vclcone}\left(F(S)+C-\bar{y}\right)=\mathbb{R}^2_+$，可得 $\operatorname{vclcone}\left(F(S)+C-\bar{y}\right)\cap(-E)=\varnothing$。此时，$(\bar{x},\bar{y})$ 是(SVOP)的 II 型 *E*-Benson 真有效元。

4. 非线性标量化

设 $(Y,\|\cdot\|)$ 为实赋范线性空间且 $C^{+i}\neq\varnothing$，引入以下锥：

$$C^{a^*}=\left\{(y^*,\alpha)\in C^{+i}\times\mathbb{R}_+:y^*(y)-\alpha\|y\|\geq 0,\forall y\in C\right\}$$

和

$$C^{a\#}=\left\{(y^*,\alpha)\in C^{+i}\times\mathbb{R}_+:y^*(y)-\alpha\|y\|>0,\forall y\in C\setminus\{\mathbf{0}\}\right\},$$

其中 $y^*\in Y^*\setminus\{\mathbf{0}\}$。设 $\alpha\in\mathbb{R}_+$，定义函数 $g_{(y^*,\alpha)}:Y\to\mathbb{R}$ 如下：

$$g_{(y^*,\alpha)}(y)=y^*(y)+\alpha\|y\|,\quad\forall y\in Y.$$

设 $(y^*,\alpha)\in\left(Y^*\setminus\{\mathbf{0}\}\right)\times\mathbb{R}_+$，我们考虑以下非线性标量化问题

$$\begin{cases}\min g_{(y^*,\alpha)}(y) \\ y\in F(S).\end{cases} \tag{NSP}$$

定义 4.1 设 $\overline{x}\in S$ 和 $\overline{y}\in F(\overline{x})$，如果对于任意的 $y\in F(S)$ 有 $g_{(y^*,\alpha)}(\overline{y})\le g_{(y^*,\alpha)}(y)$ 成立，则称 $\overline{x}$ 为(NSP)的最优解，$(\overline{x},\overline{y})$ 被称为(NSP)的最优元。

定理 4.1 设 $\overline{x}\in S$，$\overline{y}\in F(\overline{x})$，$E\in\mathfrak{L}_C$，$E$ 是代数开集，并且 $(\overline{x},\overline{y})$ 是(NSP)的最优元。如果 $(y^*,\alpha)\in C^{a*}\cap(\text{cone}E)^{a\#}$，那么 $(\overline{x},\overline{y})$ 是(SVOP)的一个 II 型 E-Benson 真有效元。

证明 假设 $(\overline{x},\overline{y})$ 不是(SVOP)的一个 II 型 E-Benson 真有效元，则有

$$\text{vclcone}\left(F(S)+C-\overline{y}\right)\cap(-E)\ne\varnothing.$$

由于 E 是代数开集，有 $E=\text{cor}E$，那么存在 $\mathbf{0}\ne d\in\text{vclcone}\left(F(S)+C-\overline{y}\right)\cap(-\text{cor}E)$。由 $d\in\text{vclcone}\left(F(S)+C-\overline{y}\right)$ 可得，存在 $h_1\in Y$，对任意 $\epsilon_1>0$，存在 $t_1\in\left]0,\epsilon_1\right]$，使得

$$d+t_1h_1\in\text{cone}\left(F(S)+C-\overline{y}\right).$$

由 $d\in-\text{cor}E$ 且 $\mathbf{0}\notin E$ 可得，对任意 $h_2\in Y$，存在 $\epsilon_2>0$，对任意 $t_2\in[0,\epsilon_2]$，使得

$$\mathbf{0}\ne d+t_2h_2\in-E.$$

令 $h_2:=h_1$，$\epsilon_1:=\epsilon_2$ 和 $t_2:=t_1$，我们有

$$0\ne d+t_1h_1=d+t_2h_2\in\text{cone}\left(F(S)+C-\overline{y}\right)\cap(-E).$$

一方面，由 $d+t_1h_1\in\text{cone}\left(F(S)+C-\overline{y}\right)$ 可知，存在 $\lambda>0$，$y_1\in F(S)$ 和 $c_1\in C_1$，使得

$$d+t_1h_1=\lambda\left(y_1+c_1-\overline{y}\right).$$

由于 $(y^*,\alpha)\in C^{a*}$，则

$$y^*(c)-\alpha\|c\|\ge 0,\quad \forall c\in C. \tag{1}$$

再由 $(\overline{x},\overline{y})$ 是(NSP)的最优元，得到

$$g_{(y^*,\alpha)}(y)\ge g_{(y^*,\alpha)}(\overline{y}),\quad \forall y\in F(S),$$

即有

$$y^*(y)+\alpha\|y\|\ge y^*(\overline{y})+\alpha\|\overline{y}\|,\quad \forall y\in F(S).$$

因此，

$$y^*(y-\overline{y})+\alpha\left(\|y\|-\|\overline{y}\|\right)\ge 0,\quad \forall y\in F(S). \tag{2}$$

由(1)和(2)，得到

$$\begin{aligned} g_{(y^*,\alpha)}(d+t_1h_1) &= g_{(y^*,\alpha)}\left(\lambda\left(y_1+c_1-\overline{y}\right)\right) \\ &= y^*\left(\lambda\left(y_1+c_1-\overline{y}\right)\right)+\alpha\left\|\lambda\left(y_1+c_1-\overline{y}\right)\right\| \\ &\ge \lambda\left(y^*(y_1-\overline{y})+\alpha\|y_1-\overline{y}\|+y^*(c_1)-\alpha\|c_1\|\right) \\ &\ge 0. \end{aligned} \tag{3}$$

另一方面，由 $(y^*,\alpha)\in(\text{cone}E)^{a\#}$，$d+t_2h_2\in-E\subseteq-\text{cone}E$ 且 $0\notin E$，得到

$$
\begin{aligned}
g_{(y^*,\alpha)}(d+t_1h_1) = g_{(y^*,\alpha)}(d+t_2h_2) \\
&= y^*(d+t_2h_2)+\alpha\|d+t_2h_2\| \\
&= -\left(y^*(-d-t_2h_2)-\alpha\|-d-t_2h_2\|\right) \\
&< 0,
\end{aligned}
$$

这与(3)矛盾。因此，$(\bar{x},\bar{y})$是(SVOP)的一个 II 型 E-Benson 真有效元。

下面通过一个例子说明定理 4.1。

例 4.1 令$(Y,\|\cdot\|)=(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$，$X=\mathbb{R}^2$，$E:=\{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2: y_1>1, y_2>1\}$，集合$C$、$S$、$A$和集值映射$F:A\rightrightarrows Y$参见例 3.2。易知$E\in\mathfrak{L}_C$。设$(y^*,\alpha)=((1,2),1)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\times\mathbb{R}_+$，$\bar{x}=(-1,0)\in S$和$\bar{y}=(0,0)\in F(\bar{x})$，由

$$
g_{(y^*,\alpha)}(y)=y_1+2y_2+\sqrt{y_1^2+y_2^2}\ge 0,\ \forall y=(y_1,y_2)\in F(S),
$$

可知$\bar{x}$为(NSP)的最优解，$(\bar{x},\bar{y})$是(NSP)的最优元。

由于$(1,2)\in C^{+i}$且

$$
y^*(y)-\alpha\|y\|_2=y_1+2y_2-\sqrt{y_1^2+y_2^2}=y_1+y_2-\sqrt{y_1^2+y_2^2}+y_2\ge 0,\quad \forall y=(y_1,y_2)\in C
$$

我们得到$((1,2),1)\in C^{a*}$。此外，由$\operatorname{cone}E=\operatorname{cor}\mathbb{R}_+^2\cup\{0\}$可知$((1,2),1)\in(\operatorname{cone}E)^{+i}\times\mathbb{R}_+$。再有

$$
y^*(y)-\alpha\|y\|_2=y_1+2y_2-\sqrt{y_1^2+y_2^2}\ge 0,\quad \forall y=(y_1,y_2)\in\operatorname{cone}E\setminus\{0\},
$$

可得$((1,2),1)\in(\operatorname{cone}E)^{a\#}$，从而有$(y^*,\alpha)=((1,2),1)\in C^{a*}\cap(\operatorname{cone}E)^{a\#}$。这样，定理 4.1 中的所有条件都得到满足。此时，由$\operatorname{vclcone}(F(S)+C-\bar{y})=\mathbb{R}_+^2$，可得$\operatorname{vclcone}(F(S)+C-\bar{y})\cap(-E)=\varnothing$，即$(\bar{x},\bar{y})$是(SVOP)的一个 II 型 E-Benson 真有效元。

基金项目

国家自然科学基金项目(12171061)；重庆理工大学研究生创新项目(gzlc20253349)。

参考文献

[1] Zheng, X.Y. (2000) Scalarization of Henig Proper Efficient Points in a Normed Space. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **105**, 233-247. https://doi.org/10.1023/a:1004626414839

[2] Dhingra, M. and Lalitha, C.S. (2017) Approximate Solutions and Scalarization in Set-Valued Optimization. *Optimization*, **66**, 1793-1805. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1271419

[3] Chinaie, M., Fakhar, F., Fakhar, M. and Hajisharifi, H.R. (2019) Weak Minimal Elements and Weak Minimal Solutions of a Nonconvex Set-Valued Optimization Problem. *Journal of Global Optimization*, **75**, 131-141. https://doi.org/10.1007/s10898-019-00810-0

[4] 徐义红, 龙鑫灿, 黄斌. 集值均衡问题近似 Benson 真有效解的非线性刻画[J]. 运筹学学报, 2021, 25(4): 80-90.

[5] Zhou, Z.A., Wei, W.B., Huang, F. and Zhao, K. (2024) Approximate Weak Efficiency of the Set-Valued Optimization Problem with Variable Ordering Structures. *Journal of Combinatorial Optimization*, **48**, Article No. 27. https://doi.org/10.1007/s10878-024-01211-0

[6] Zhao, K.Q. and Yang, X.M. (2015) *E*-Benson Proper Efficiency in Vector Optimization. *Optimization*, **64**, 739-752. https://doi.org/10.1080/02331934.2013.798321

[7] Zhou, Z.A., Yang, X.M. and Zhao, K.Q. (2016) *E*-Super Efficiency of Set-Valued Optimization Problems Involving Improvement Sets. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **12**, 1031-1039. https://doi.org/10.3934/jimo.2016.12.1031

[8] Zhou, Z.A., Feng, B. and Köbis, E. (2025) New Type of Benson Properly Efficient Solutions in Set-Valued Optimization: Scalarization Results and Optimality Conditions. *Optimization*, 1-21.

https://doi.org/10.1080/02331934.2025.2517323

[9] Kasimbeyli, R. (2010) A Nonlinear Cone Separation Theorem and Scalarization in Nonconvex Vector Optimization. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1591-1619. https://doi.org/10.1137/070694089

[10] Gutiérrez, C., Jiménez, B. and Novo, V. (2012) Improvement Sets and Vector Optimization. *European Journal of Operational Research*, **223**, 304-311. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050

[11] Li, Z.F. (1998) Benson Proper Efficiency in the Vector Optimization of Set-Valued Maps. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **98**, 623-649. https://doi.org/10.1023/a:1022676013609