Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 232-236
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164108

Hans汉斯

线性微分方程组解的结构的注记

王光庆，耿硕涵，李金辉*

阜阳师范大学数学与统计学院，安徽 阜阳

收稿日期：2026年3月5日；录用日期：2026年4月11日；发布日期：2026年4月23日

摘 要

一般线性微分方程组解的结构都是从齐次微分方程组的基解矩阵出发得到相应非齐次微分方程组的基本解组。本文主要讨论了从非齐次微分方程的基本解组如何构造对应齐次微分方程的基本解组。

关键词

线性微分方程组，解，齐次，非齐次，极大线性无关组

A Note on the Structure of Solutions to Linear Differential Equation Systems

Guangqing Wang, Shuohan Geng, Jinhui Li*

Fuyang Normal University, College of Mathematics and Statistics, Fuyang Anhui

Received: March 5, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

Abstract

Under the conventional framework of linear differential equation systems, the structure of solutions is typically derived from the fundamental solution matrix of the homogeneous system to obtain the general solution of the corresponding nonhomogeneous system. This paper, however, focuses on the reverse direction: constructing the fundamental solution set of the homogeneous equation from a known fundamental solution set of the nonhomogeneous system.

Keywords

Linear Differential Equation Systems, Solutions, Homogeneous, Nonhomogeneous, Maximal Linearly Independent Set

*通讯作者。

文章引用: 王光庆, 耿硕涵, 李金辉. 线性微分方程组解的结构的注记[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 232-236.
DOI: 10.12677/pm.2026.164108

1. 引言

线性微分方程组在数学、物理、工程等领域具有广泛应用。与线性代数中的线性代数方程组类似[1]，线性微分方程组也可分为齐次与非齐次两类。一般地，通过对应齐次方程组解的结构的描述，可以得到对应非齐次方程的解的结构。在文献[2]中作者回答了如何利用非齐次线性代数方程的解的结构来刻画齐次线性代数方程的解的结构。那么，这里的问题是，如何通过非齐次微分方程组解的结构来刻画齐次微分方程解的结构。在传统的教学中，学生习惯于“齐次到非齐次”的单向推导，然而逆向的视角“非齐次到齐次”这一探索性问题能够引导学生发现仿射空间的几何图像，从而将线性代数与微分方程进行深度融合。

2. 预备知识

考虑如下齐次线性微分方程组

$$x'(t)=A(t)x(t) \quad ((1)$$

与非齐次线性微分方程

$$x'(t)=A(t)x(t)+f(t) \quad (2)$$

其中 $A(t)$ 是 $n\times n$ 的连续矩阵函数， $f(t)$ 是连续向量函数， $x(t)$ 是未知向量函数。

记微分方程组(1)与(2)的解集分别为

$$\Gamma\equiv\{x(t)\,|\,x'(t)=A(t)x(t)\},$$

$$\Gamma_0\equiv\{x(t)\,|\,x'(t)=A(t)x(t)+f(t)\}.$$

一般的《常微分方程》的教材中针对微分方程组(1)与(2)的通解结构，有如下结论。

定理 1 [3] (齐次线性微分方程组的通解结构) 如果 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 为齐次线性方程组的线性无关的解，相应的基解矩阵为 $\Phi(t)$，则齐次线性微分方程组(1)的任一解 $\varphi(t)$ 均可表示

$$\varphi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)$$

或者

$$\varphi(t)=\Phi(t)c$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数， c 是由其构成的 n 维常数向量。

注 1： 集合 Γ 是线性空间，且维数为 n。

对于非齐次线性微分方程组(2)有如下基本性质。

性质 1 如果 $\varphi(t)$ 是(1)的解， $\psi(t)$ 是(2)的解，则 $\varphi(t)+\psi(t)$ 是(2)的解。

性质 2 如果 $\psi(t),\psi_0(t)$ 是(2)的两个解，则 $\psi(t)-\psi_0(t)$ 是(1)的解。

基于这两个基本性质有非齐次线性微分方程组的通解的结构。

定理 2 (非齐次线性微分方程组的通解结构) 如果 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 为齐次线性方程组的线性无关的解， $\psi_0(t)$ 是非齐次线性微分方程组(2)的某一解，则(2)的任一解 $\psi(t)$ 均可表示为

$$\psi(t)=\varphi(t)+\psi_0(t)$$

其中 $\varphi(t)$ 是(1)的某一解。

即

$$\psi(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)+\psi_0(t)$$

或

$$\psi(t)=\Phi(t)c+\psi_0(t)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数， c 是由其构成的 n 维常数向量。

3. 主要结果

为了方便约定： $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 为齐次线性微分方程组(1)的基本解组，即向量组 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 满足线性微分方程组(1)且线性无关。另外约定 $\psi_0(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_m(t)$ 为非齐次线性微分方程组(2)的 $m+1$ 个线性无关的解。那么有如下重要结果。

命题 1 函数向量组 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t),\psi_0(t)$ 线性无关。

证：采用反证法。假设向量函数 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t),\psi_0(t)$ 线性相关，则存在不全为零的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n,k$ 使得

$$k_1\varphi_1(t)+k_2\varphi_2(t)+\cdots+k_n\varphi_n(t)+k\psi_0(t)=0$$

事实上 $k\neq 0$ 。否则存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$$k_1\varphi_1(t)+k_2\varphi_2(t)+\cdots+k_n\varphi_n(t)=0,$$

矛盾。得证。

命题 2 函数向量组 $\psi_1(t)-\psi_0(t),\psi_2(t)-\psi_0(t),\cdots,\psi_m(t)-\psi_0(t)$ 线性无关。

证：假设存在不全为零的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1(\psi_1(t)-\psi_0(t))+k_2(\psi_2(t)-\psi_0(t))+\cdots+k_m(\psi_m(t)-\psi_0(t))=0,$$

即

$$-(k_1+\cdots+k_m)\psi_0(t)+k_1\psi_1(t)+k_2\psi_2(t)+\cdots+k_m\psi_m(t)=0.$$

由函数向量组 $\psi_0(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_m(t)$ 的线性无关性可得 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 。从而得证。

命题 3 函数向量组 $\varphi_1(t)+\psi_0(t),\varphi_2(t)+\psi_0(t),\cdots,\varphi_n(t)+\psi_0(t),\psi_0(t)$ 线性无关，是非齐次线性方程组(2)的解集 Γ_0 的极大线性无关组。

证：首先证明向量组函数 $\varphi_1(t)+\psi_0(t),\varphi_2(t)+\psi_0(t),\cdots,\varphi_n(t)+\psi_0(t),\psi_0(t)$ 线性无关。采用反证法。假设存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$$k_1(\varphi_1(t)+\psi_0(t))+k_2(\varphi_2(t)+\psi_0(t))+\cdots+k_n(\varphi_n(t)+\psi_0(t))+k\psi_0(t)=0,$$

则有 $k_1+k_2+\cdots+k_n+k=0$ 。若不然有

$$\psi_0(t)=\frac{-k_1}{k_1+k_2+\cdots+k_n+k}\varphi_1(t)-\frac{k_2}{k_1+k_2+\cdots+k_n+k}\varphi_2(t)$$
$$-\cdots-\frac{k_n}{k_1+k_2+\cdots+k_n+k}\varphi_n(t),$$

则 $\psi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 线性相关，这与命题 1 矛盾。因此有

$$k_1\varphi_1(t)+k_2\varphi_2(t)+\cdots+k_n\varphi_n(t)=0,$$

从而

$$k_1=k_2=\cdots=k_n \text{ 且 } k=0.$$

从而证明了向量组函数 $\varphi_1(t)+\psi_0(t),\varphi_2(t)+\psi_0(t),\cdots,\varphi_n(t)+\psi_0(t),\psi_0(t)$ 线性无关。

另一方面，假设非齐次方程组(2)存在 $n+2$ 个线性无关的解 $\psi_0(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_{n+1}(t)$，则由命题 2 可得

$$\psi_1(t)-\psi_0(t),\psi_2(t)-\psi_0(t),\cdots,\psi_n(t)-\psi_0(t),\psi_{n+1}(t)-\psi_0(t)$$

是齐次方程组(1)的 $n+1$ 个线性无关的解，这与定理 1 矛盾。综上得证。

基于命题 3 可以定义非齐次线性方程(2)的基本解组。

定义 1 非齐次系统的基本解组是指其解集 Γ_0 中 $n+1$ 个线性无关的解。

注 2： 非齐次系统的解集 Γ_0 是维数为 $n+1$ 的仿射空间，即是由其齐次方程解空间(线性空间)平移而成。

命题 4 设函数向量组 $\psi_0(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)$ 是非齐次方程组(2)的 $n+1$ 个线性无关的解，即基本解组，则可得到其解集 Γ_0 的刻画

$$\left\{\psi(t)=k_0\psi_0(t)+k_1\psi_1(t)+k_2\psi_2(t)+\cdots+k_n\psi_n(t)\,|\sum_{i=0}^{n}k_i=1\right\}=\Gamma_0$$

其中 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数。

证：设 $\psi_0(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)$ 是非齐次方程组(2)的 $n+1$ 个线性无关的解，且 $\psi(t)$ 是非齐次微分方程组(2)的任意解，则由命题 2 可知存在常数 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$$\psi(t)=k_0\psi_0(t)+k_1\psi_1(t)+k_2\psi_2(t)+\cdots+k_n\psi_n(t).$$

由于 $\psi_i(t),i=0,\cdots,n$ 是非齐次方程组(2)的解，因此

$$k_i\psi_i'(t)=A(t)k_i\psi_i(t)+k_if(t),i=0,1,\cdots,n.$$

将上述 $n+1$ 个方程相加可得

$$\sum_{i=0}^{n}k_i\psi_i'(t)=A(t)\sum_{i=0}^{n}k_i\psi_i(t)+\sum_{i=0}^{n}k_if(t),$$

即

$$\psi'(t)=A(t)\psi(t)+\left(\sum_{i=0}^{n}k_i\right)f(t).$$

而 $\psi(t)$ 是非齐次微分方程组(2)的解，从而 $\sum_{i=0}^{n}k_i=1$。因此

$$\left\{\psi(t)=k_0\psi_0(t)+k_1\psi_1(t)+k_2\psi_2(t)+\cdots+k_n\psi_n(t)\,|\sum_{i=0}^{n}k_i=1\right\}\supset\Gamma_0.$$

另一方面设方程组(2)的任意解 $\psi(t)$ 满足

$$\psi(t)=k_0\psi_0(t)+k_1\psi_1(t)+k_2\psi_2(t)+\cdots+k_n\psi_n(t),$$

其中 $k_0,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数并且 $\sum_{i=0}^{n}k_i=1$。显然 $\psi(t)$ 满足非齐次微分方程组(2)，即 $\psi(t)\in\Gamma_0$，从而

$$\left\{\psi(t)=k_0\psi_0(t)+k_1\psi_1(t)+k_2\psi_2(t)+\cdots+k_n\psi_n(t)\,|\,\sum_{i=0}^{n}k_i=1\right\}\subset\Gamma_0.$$

得证。

命题 5 设函数向量组 $\psi_0(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)$ 是非齐次次方程组(2)的 $n+1$ 个线性无关的解，则 $\psi_1(t)-\psi_0(t),\psi_2(t)-\psi_0(t),\cdots,\psi_n(t)-\psi_0(t)$ 为齐次方程组(1)的基本解组，且对于方程组(1)的任意解 $\varphi(t)$ 存在一组常数 $c_1,\cdots,c_n$ 使得

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(\psi_i(t)-\psi_n(t)\right).$$

证：设 $\psi_0(t),\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)$ 是非齐次方程组(2)的 $n+1$ 个线性无关的解，由定理 1 及命题 2 可知函数向量组 $\psi_1(t)-\psi_0(t),\psi_2(t)-\psi_0(t),\cdots,\psi_n(t)-\psi_0(t)$ 为齐次线性方程(1)的基本解组，且对(1)的任意解存在一组常数 $c_1,\cdots,c_n$ 使得：

$$\varphi(t)=c_1\left(\psi_1(t)-\psi_0(t)\right)+c_2\left(\psi_2(t)-\psi_0(t)\right)+\cdots+c_n\left(\psi_n(t)-\psi_0(t)\right),$$

从而得证。

4. 结论

本文从线性代数的视角出发，系统分析了齐次与非齐次线性微分方程组解的结构的关系，尤其是总结出非齐次方程解集的三个重要特征：1) 任意两个解的差是对应齐次方程的解；2) 解集的“维度”比齐次方程高一维；3) 任意 $n+1$ 个线性无关解的线性组合可以表示所有解。基于这些特征本文给出了依据非齐次微分方程组的基本解组构造齐次微分方程基本解组的方法。这一研究不仅丰富了微分方程的教学内容，加深了学生对于解空间几何结构的认识，也为线性代数与微分方程的融合教学提供了新的路径。

基金项目

安徽省高等学校自然科学研究重点项目(2023AH050415)；阜阳师范大学教育教学改革研究项目(2024JYXM0018)；阜阳师范大学线下一流课程(2024YLKC003，2025XTTZKC05)；安徽省一流课程——线上线下混合式课程(2024xsxx041)；国家级大学生创新创业项目“两菌株肺结核传播的常微分方程模型及其在安徽省的应用”(202410371031)。

参考文献

[1] 刘先忠, 杨明. 线性代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.
[2] 吴莺, 胡吉卉. 线性方程组解的注记[J]. 大学数学, 2019, 35(6): 100-104.
[3] 王高雄, 周之铭, 朱思铭. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.