Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 343-352
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164120

Hans汉斯

三阶上三角关系矩阵的谱、点谱和两类点谱的性质

邢馨元

内蒙古师范大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2026年3月5日；录用日期：2026年4月20日；发布日期：2026年4月30日

摘 要

设 H_1,H_2,H_3 为无穷维复可分Hilbert空间。对给定关系 $A\in\mathcal{BCR}(H_1)$，$B\in\mathcal{BCR}(H_2)$，$C\in\mathcal{BCR}(H_3)$，构造三阶上三角关系矩阵 $M_{D,E,F}=\begin{pmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$。本文从值域的稠密性角度出发，对有界线性算子的点谱进行进一步分类，将其划分为两类点谱。并利用分析方法给出了三阶上三角关系矩阵 $M_{D,E,F}$ 的谱，点谱和两类点谱的性质，得到了与算子矩阵不同的结果，最后用例子证明了结果的准确性。

关键词

关系矩阵，谱，点谱

Properties of the Spectrum, Point Spectrum, and Two Types of Point Spectra of Third-Order Upper Triangular Relation Matrices

Xinyuan Xing

College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot Inner Mongolia

Received: March 5, 2026; accepted: April 20, 2026; published: April 30, 2026

文章引用: 邢馨元. 三阶上三角关系矩阵的谱、点谱和两类点谱的性质[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 343-352.
DOI: 10.12677/pm.2026.164120

Abstract

Let H_1, H_2, H_3 be infinite-dimensional complex separable Hilbert spaces. For given linear relations $A \in \mathcal{BCR}(H_1)$, $B \in \mathcal{BCR}(H_2)$, $C \in \mathcal{BCR}(H_3)$, define the third-order upper triangular relation matrix $M_{D,E,F} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Based on the density of the range, this paper further classifies the point spectrum of bounded linear operators into type-1 and type-2 point spectrum. Using analytical methods, the properties of the spectrum, the point spectrum, and the two types of point spectrum of the third-order upper triangular relation matrix $M_{D,E,F}$ are obtained, yielding results that differ from those for operator matrices. Finally, examples are provided to verify the correctness of the results.

Keywords

Relation Matrix, Spectrum, Point Spectrum

1. 引言

自算子理论确立以来，凭借其坚实的理论基础、严密逻辑及广泛应用前景，已成为数学及相关交叉学科研究的核心领域。算子谱理论作为其重要分支，系统研究算子的代数结构、拓扑特性及运算规律，并揭示线性与非线性系统的稳定性、能量传递与演化机制，为理论研究、方法创新及应用实践提供了支撑。在基础数学领域，算子谱理论为矩阵论、计算数学及泛函分析提供了关键工具；在交叉学科中，它支撑量子力学、经典物理、工程控制及信号处理等问题，如微分方程特征值求解、振动频率分析及复杂动态系统的稳定性判定与控制，其理论价值已在实践中得到验证。

伴随算子理论的发展进一步凸显了线性关系的核心地位。20 世纪中期，Von Neumann 在文献[1]研究非稠定微分算子的共轭问题时首次提出线性关系概念，但研究仍停留于概念阶段。随后，R. Arens 在文献[2]给出了严格定义，并系统论述了伴随关系的基本性质，为后续理论发展奠定基础。R. Cross 与 D. Wilcox 在文献[3]和文献[4]深入分析线性关系的代数特性，提出正规线性关系概念，并完善伴随理论。2009 年，A. Sandovici 与 D. Snoo 在文献[5]通过严密推导验证两个线性关系乘积指标的核心结论，进一步丰富理论体系。2012 年，Y. M. Shi 在文献[6]将经典 Glazman-Krein-Naimark 理论推广至 Hermite 线性关系，有效拓宽了线性关系的研究领域与应用范围。

过去几十年里，学者们关注 2 × 2 上三角算子矩阵的各种谱，1994 年，H. K. Du 和 J. Pan 在文献[7]中上三角算子矩阵 M_c 进行了研究，得到如下性质

$$\sigma(M_D) \subset \sigma(A) \cup \sigma(B)\text{，对任意的 } D \in \mathcal{B}(K,H) \text{ 都成立，}$$

阿拉坦仓等人在文[8]中利用 A, B 的一类点谱和一类剩余谱给出了 Hilbert 空间中算子矩阵 M_D 谱的刻画并得到

$$\sigma(A)\cup\sigma(B)=\sigma(M_D)\cup(\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_{r,1}(B),$$

文献[9]指出对任意的 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$ 有

$$\sigma(A)\cup\sigma(B)=\sigma(M_D)\cup M,$$

H. M. Rashid 在文献[10]中研究了 Banach 空间中算子矩阵 M_D 的 Weyl 谱，证明了

$$\sigma_\omega(A)\cup\sigma_\omega(B)=\sigma_\omega(M_D)\cup\left(S\left(A^*\right)\cap S(B)\right),$$

缺项算子矩阵是一类具有未知算子块的算子矩阵，其谱补问题研究的是缺失算子块对该类算子矩阵谱的影响。一般而言，缺项算子矩阵的谱补问题主要包含两个方面的内容：其一是缺项算子矩阵的谱扰动，其二是缺项算子矩阵的可能谱。总体来看，国外关于上三角算子矩阵谱理论的研究起步较早，研究内容主要集中在谱扰动和谱性质等基础问题。算子稠定性被认为是伴随算子理论的基础条件，非稠定算子可能导致伴随算子多值化，从而增加运算不确定性，影响理论推导与数值计算。单值线性算子与多值线性算子共同构成线性关系，理论上可视为单值算子的多值推广，为算子理论体系的完善及跨学科应用提供坚实基础。

在上三角关系矩阵研究方面，文献[11]系统研究了二阶上三角关系矩阵的 Fredholm 性；文献[12]探讨了其谱、点谱、连续谱及剩余谱的扰动问题，并分析矩阵点谱与内部元素点谱的对应关系。文献[13]进一步补充了二阶上三角关系矩阵 Fredholm 性的理论；文献[14]结合谱扰动分析，探讨点谱与内部元素点谱的关联；文献[15]研究了二阶上三角关系矩阵两类点谱及两类剩余谱的基本性质。在此基础上，本文采用分析方法，对三阶上三角关系矩阵的谱结构进行研究，阐明了其谱、点谱及两类点谱与对角算子对应谱并集之间的关系。

综上所述，现有关于上三角关系矩阵的研究已经涉及谱、本质谱、点谱、剩余谱、值域、闭值域谱、Fredholm 性质和 Weyl 性质等多个方面，并逐步形成了由上三角算子矩阵向上三角关系矩阵推广的研究脉络。已有研究不仅丰富了线性关系框架下的矩阵理论，也为进一步研究更一般上三角关系矩阵的谱性质及其刻画奠定了基础。然而，从整体上看，关于更一般上三角关系矩阵的系统研究仍有待进一步深化，尤其是在谱刻画、扰动稳定性及不同性质之间的内在联系方面，仍具有较大的研究空间。

下面介绍本文中所涉及的基本概念及主要符号。

定义 1.1 设 H_1,H_2,H_3 为无穷维复可分 Hilbert 空间。关系 $T:H_1\to H_2$ 指一种对应法则，它将定义域 $\mathrm{dom}(T)\subseteq H_1$ (且 $\mathrm{dom}(T)\neq\varnothing$)中的元素映射到 H_2 的某个非空子集。若对任意 $x_1,x_2\in\mathrm{dom}(T)$ 以及任意不全为零的标量 α,β，都有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha T(x_1)+\beta T(x_2),$$

则称 T 为线性关系。记 $\mathcal{LR}(H_i,H_j)$ 为从 H_i 到 H_j 的所有线性关系组成的集合，其中 $\mathcal{LR}(H_i,H_i)$ 简记为 $\mathcal{LR}(H_i)$。进一步地，记 $\mathcal{BR}(H_i,H_j)$ 为所有从 H_i 到 H_j 的有界线性关系之集，$\mathcal{BCR}(H_i,H_j)$ 为所有从 H_i 到 H_j 的有界闭线性关系之集，其中，$i,j\in\{1,2,3\}$。

定义 1.2 设 $T\in\mathcal{BCR}(H_1,H_2)$。定义 $\ker T=\{x\in\mathrm{dom}(T):Tx=T(0)\}$ 称为关系 T 的零空间；同时记 $\mathrm{ran}T=T(\mathrm{dom}(T))$ 称为关系 T 的值域。

定义 1.3 设 $T\in\mathcal{BCR}(H_1,H_2)$，记 $\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:T-\lambda\text{ 是单的, 值域闭且稠}\}$，称集合 $\rho(T)$ 为算子 T 的预解集，其中每个元素 λ 称为 T 的正则值。由闭图像定理可以得到：当且仅当算子 $T-\lambda$ 在整个空间 X 上存在有界逆算子时，$\lambda\in\rho(T)$。进一步定义

$$\sigma(T)=\mathbb{C}\setminus\rho(T)$$

并称其为算子 T 的谱。

定义 1.4 若 $T \in \mathcal{LR}(H_1, H_2)$ 并存在算子 A 满足条件 $T = A + T - T$ 且 $\operatorname{dom}A = \operatorname{dom}T$，则称 A 为算子 T 的一个选择。此时对任意 $x \in \operatorname{dom}T$，都有 $(T-T)x = T(0)$，因此可以把 $T-T$ 理解为一个常值线性关系。

此外，当 A 是 T 的一个选择时，对任意 $x \in \operatorname{dom}T$ 有

$$Tx = Ax + T(0).$$

由上述关系可知，算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 可以分解为三个互不相交的组成部分，

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T),$$

其中集合

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{不是单射}\},$$

$$\sigma_r(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{是单射}, \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} \neq H_1\right\},$$

$$\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{是单射}, \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} = H_1 \neq \operatorname{ran}(T-\lambda)\right\}.$$

分别为 T 的点谱，剩余谱和连续谱。

定义 1.5 设 $T \in \mathcal{BCR}(H_1, H_2)$，基于 $\operatorname{ran}T$ 的闭性，将关系的点谱细分为 $1,2$ -类点谱，即

$$\sigma_{p,1}(T) = \left\{\lambda \in \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} = X\right\}, \sigma_{p,2}(T) = \left\{\lambda \in \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} \neq X\right\}$$

并有

$$\rho_{co}(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} = H_1\right\},$$

$$\sigma_{co}(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} \neq H_1\right\},$$

$$\sigma_{\delta}(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{ran}(T-\lambda) \neq H_1\right\},$$

$$\rho_{in}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{是单射}\}.$$

2. 辅助引理

引理 2.1 [3] 设 T 是 Hilbert 空间上的线性关系，则

(i) T 闭的当且仅当 T^{-1} 是闭的；

(ii) 若 T 闭的当且仅当 $T(0)$ 是闭的。

引理 2.2 [3] 设 $T \in \mathcal{BCR}(H_1)$，若 $T(0)$ 是闭的，则 $\ker T$ 是闭的。

引理 2.3 [16] 设 $T \in \mathcal{BCR}(H_1)$，$\operatorname{ran}T$ 是不闭，则存在无穷维闭子空间 $M \subseteq \overline{\operatorname{ran}T}$ 使得 $M \cap \operatorname{ran}T = \{0\}$ 且 $M + \operatorname{ran}T = \overline{\operatorname{ran}T}$。

引理 2.4 [3] 设 $T \in \mathcal{BCR}(H_1)$，则

(i) T 是左可逆关系当且仅当 T 是单的，且 $\operatorname{ran}T$ 是闭的；

(ii) T 是右可逆关系当且仅当 T 是满的。

引理 2.5 [3] 设 $T \in \mathcal{BCR}(H_1)$，若 $U \in \mathcal{B}(H)$ 和 $V \in \mathcal{B}(H)$，则

(i) $\operatorname{ran}UT$ 闭当且仅当 $\operatorname{ran}T$ 闭;

(ii) $\operatorname{ran}TV$ 闭当且仅当 $\operatorname{ran}T$ 闭。

下面的引理 2.6 和 2.7 的证明是显然的，不再赘述。

引理 2.6 设 $A\in\mathcal{BCR}(H_1)$，$B\in\mathcal{BCR}(H_2)$，$C\in\mathcal{BCR}(H_3)$ 为给定的关系，则对任意 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$，$E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$，$F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$ 均有 $\lambda\in\rho_{in}(M_{D,E,F})$ 充要条件为 $\lambda\in\rho_{in}(A)\cap\rho_{in}(B)\cap\rho_{in}(C)$。

引理 2.7 设 $A\in\mathcal{BCR}(H_1)$，$B\in\mathcal{BCR}(H_2)$，$C\in\mathcal{BCR}(H_3)$ 为给定的关系，则对任意 $D\in\mathcal{B}(H_2,H_1)$，$E\in\mathcal{B}(H_3,H_1)$，$F\in\mathcal{B}(H_3,H_2)$ 均有 $\lambda\in\rho_{co}(M_{D,E,F})$ 充要条件为 $\lambda\in\rho_{co}(A)\cap\rho_{co}(B)\cap\rho_{co}(C)$。

引理 2.8 [14] 设 $T\in\mathcal{BCR}(H_1)$，则对任意的 $x\in\mathrm{dom}T$ 有 $\left\|P_{T(0)^{\perp}}Tx\right\|=\|Tx\|$，并且 $\left\|P_{T(0)^{\perp}}T\right\|=\|T\|$。

3. 主要定理及其证明

定理 1 设 $A\in\mathcal{BCR}(H_1)$，$B\in\mathcal{BCR}(H_2)$，$C\in\mathcal{BCR}(H_3)$ 为给定的关系，对任意的 $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$，$E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$，$F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 都有

$$\begin{aligned}\sigma_p(M_{D,E,F})\subseteq{}&\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}\\&\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}.\end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned}&\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}\\&\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}\subseteq\sigma_p(M_{D,E,F}).\end{aligned}$$

证明 先证明左端包含右端，我们采用反证法。设 $\lambda\notin\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap$ $\mathrm{ran}(A-\lambda I)\subsetneq A(0)\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}$，则 $\lambda\in\rho_{in}(A)\cap\rho_{in}(B)\cap\rho_{in}(C)$，且有

$$D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\subseteq A(0),\ F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\subseteq B(0),$$

设 $(x_1,x_2,x_3)\in\ker(M_{D,E,F}-\lambda I)$。因为 $\lambda\in\rho_{in}(C)$，所以 $x_3=0$，进而有 $0\in(B-\lambda I)x_2+F(0)$，因此 $F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\subseteq B(0)$ 蕴含着 $x_2\in\ker(B-\lambda I)=\{0\}$，同理有，$0\in(A-\lambda I)x_1+D(0)+E(0)$，因此 $D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\subseteq A(0)$ 蕴含着 $x_1\in\ker(A-\lambda I)=\{0\}$，故 $M_{D,E,F}-\lambda I$ 是单的，于是得到，

$$\begin{aligned}\sigma_p(M_{D,E,F})\subseteq{}&\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}\\&\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}.\end{aligned}$$

其次要证

$$\begin{aligned}&\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}\\&\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}\subseteq\sigma_p(M_{D,E,F}).\end{aligned}$$

注意到 $\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\subseteq\sigma_p(M_{D,E,F})$。设 $\lambda\in\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}$，且 $\lambda\in\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}$，则存在 $x_1\notin A(0)$，$x_2\notin B(0)$ 使得

$$y_1\in D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I),\ y_2\in F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I).$$

这意味着存在 $0\neq x_1\in\mathrm{dom}A$，$0\neq x_2\in\mathrm{dom}B$。使得 $y_1\in(A-\lambda I)x_1$，$y_2\in(B-\lambda I)x_2$。所以 $(x_1,x_2,0)^{\mathrm{T}}\in\ker(M_{D,E,F}-\lambda I)$，进而 $\lambda\in\sigma_p(M_{D,E,F})$。

另外，若 $D(0)\subseteq A(0)$，$E(0)\subseteq A(0)$，$F(0)\subseteq B(0)$，则

$$\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}=\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}=\varnothing,$$

因此，$\sigma_p(M_{D,E,F})\subseteq\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)$。

注 3.1 当矩阵元素均为算子时，关于上三角算子矩阵的点谱、剩余谱和连续谱，在线性关系矩阵情形，上述谱等式一般不能成立。需要在附加条件下才能得到谱并等式,，其根本原因在于线性关系允许出现非平凡多值部分，而算子只是满足 $T(0)=\{0\}$ 的单值特例。因此，本文定理中出现的 Δ_2,Δ_3 正是关系矩阵区别于算子矩阵的额外谱项。

定理 3.2 设 $A\in\mathcal{BCR}(H_1)$， $B\in\mathcal{BCR}(H_2)$， $C\in\mathcal{BCR}(H_3)$， $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$， $E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$， $F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 为给定的关系，对任意的 $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$， $E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$， $F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 都有

$$\begin{cases}\sigma\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C), & D(0)\subseteq A(0),E(0)\subseteq A(0),F(0)\subseteq B(0),\\ \mathbb{C}\setminus\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C)\subseteq\sigma\left(M_{D,E,F}\right), & D(0)\nsubseteq A(0),E(0)\nsubseteq A(0),F(0)\nsubseteq B(0).\end{cases}$$

证明 记

$$\Delta_1=\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C)$$

$$\Delta_2=\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\nsubseteq A(0)\}$$

$$\Delta_3=\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\operatorname{ran}(B-\lambda I)\nsubseteq B(0)\}$$

由定理 3.1 可得

$\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)\cup\sigma_p\left(M_{D,E,F}\right)=\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\nsubseteq A(0)\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\operatorname{ran}(B-\lambda I)\nsubseteq B(0)\}$。注意到，

$$\sigma_\delta\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma_\delta(A)\cup\sigma_\delta(B)\cup\sigma_\delta(C),$$

则有

$$\begin{aligned}&\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C)\cup\sigma\left(M_{D,E,F}\right)\\&=\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\nsubseteq A(0)\}\\&\quad\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\operatorname{ran}(B-\lambda I)\nsubseteq B(0)\}.\end{aligned}$$

若有 $D(0)\subseteq A(0),E(0)\subseteq A(0),F(0)\subseteq B(0)$，则

$$\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C)\cup\sigma\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C),$$

则 $\sigma\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C)$。

若有 $D(0)\nsubseteq A(0),E(0)\nsubseteq A(0),F(0)\nsubseteq B(0)$，则

$$\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda\notin\sigma_\delta(A)\}\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\nsubseteq A(0)\},$$

同时有

$$\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda\notin\sigma_\delta(B)\}\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\operatorname{ran}(B-\lambda I)\nsubseteq B(0)\},$$

进而可得 $\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C)\cup\sigma\left(M_{D,E,F}\right)=\mathbb{C}$，因此， $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)\cup\sigma(B)\cup\sigma(C)\subseteq\sigma\left(M_{D,E,F}\right)$。

注 3.2 定理 3.2 表明，上三角关系矩阵的谱性质不仅依赖对角元 A,B,C 的谱性质，而且还受到多值部分包含关系的影响。与经典算子矩阵情形不同。

定理 3.3 设 $A\in\mathcal{BCR}(H_1),B\in\mathcal{BCR}(H_2),C\in\mathcal{BCR}(H_3)$ 为给定的关系，则对任意 $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$， $E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$， $F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 都有

$$\sigma_{p,1}\left(M_{D,E,F}\right)\subseteq\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3$$

其中

$$\Delta_1=\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)$$

$$\Delta_2=\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}$$

$$\Delta_3=\{\lambda\in\rho_{co}(A)\cup\rho_{co}(B)\cup\rho_{co}(C):F(0)\cap\operatorname{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}$$

证明 $\lambda\notin\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\operatorname{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}\cap(\rho_{co}(A)\cup\rho_{co}(B)\cup\rho_{co}(C))$，由定理 2 可知，$\lambda\notin\sigma_p(M_{D,E,F})$，同时由引理 2.7 可知，$\lambda\notin\rho_{co}(M_{D,E,F})$，则 $\lambda\notin\sigma_{p,1}(M_{D,E,F})$。

注 3.3 定理 3.3 表明，对于上三角关系矩阵 $M_{D,E,F}$ 的 $(1)-$类点谱 $\sigma_{p,1}(M_{D,E,F})$ 的性质除受对角元 A,B,C 的点谱控制外，还会受到非对角元的多值部分 $D(0),E(0)$ 与相应值域 $\operatorname{ran}(A-\lambda),\operatorname{ran}(B-\lambda)$ 之间的影响，其中 Δ_2,Δ_3 正反映了多值部分所带来的影响.

定理 3.4 设 $A\in\mathcal{BCR}(H_1)$，$B\in\mathcal{BCR}(H_2)$，$C\in\mathcal{BCR}(H_3)$ 为给定的关系，则对任意 $D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$，$E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$，$F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 都有

$$\sigma_{p,2}(M_{D,E,F})\subseteq\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3\cup\Delta_4\cup\Delta_5.$$

其中

$$\Delta_1=\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C),$$

$$\Delta_2=\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\},$$

$$\Delta_3=\{\lambda\in\sigma_{co}(C):F(0)\cap\operatorname{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\},$$

$$\Delta_4=\left\{\lambda\in\sigma_{co}(B)\cap\rho_{co}(C):\overline{\operatorname{ran}P_{\operatorname{ran}(B-\lambda I)^\perp}F}=\operatorname{ran}(B-\lambda I)^\perp\right\},$$

$$\Delta_5=\left\{\lambda\in\sigma_{co}(A)\cap\rho_{co}(B)\cap\rho_{co}(C):\overline{\operatorname{ran}(P_{\operatorname{ran}(A-\lambda I)^\perp}D,P_{\operatorname{ran}(A-\lambda I)^\perp}E)}=\operatorname{ran}(A-\lambda I)^\perp\right\}.$$

证明 因为

$$\begin{aligned}&\lambda\notin\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}\\&\quad\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\operatorname{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}\\&\quad\cap\left(\sigma_{co}(C)\cup\left\{\lambda\in\sigma_{co}(B)\cap\rho_{co}(C):\overline{\operatorname{ran}P_{\operatorname{ran}(B-\lambda I)^\perp}F}=\operatorname{ran}(B-\lambda I)^\perp\right\}\right.\\&\quad\left.\cup\left\{\lambda\in\sigma_{co}(A)\cap\rho_{co}(B)\cap\rho_{co}(C):\overline{\operatorname{ran}\left(P_{\operatorname{ran}(A-\lambda I)^\perp}D,P_{\operatorname{ran}(A-\lambda I)^\perp}E\right)}=\operatorname{ran}(A-\lambda I)^\perp\right\}\right),\end{aligned}$$

由定理 2.1 可知，$\lambda\notin\sigma_p(M_{D,E,F})$，则当 $\lambda\notin\sigma_{co}(C)$ 时，显然有 $\lambda\notin\sigma_{co}(M_{D,E,F})$，当 $\lambda\in\sigma_{co}(B)\cap\rho_{co}(C)$ 时，$M_{D,E,F}-\lambda$ 作为从 $H_1\oplus\ker(B-\lambda)\oplus\ker(B-\lambda)^\perp\oplus H_3$ 到 $H_1\oplus H_2\oplus H_3$ 关系均可以写为

$$M_{D,E,F}-\lambda=\begin{pmatrix}(A-\lambda)_1 & D & E\\ 0 & (B-\lambda)_1 & F_1\\ 0 & 0 & F_2\\ 0 & 0 & (C-\lambda)_1\end{pmatrix},$$

因为 $\overline{\operatorname{ran}P_{\operatorname{ran}(B-\lambda I)^\perp}F}=\operatorname{ran}(B-\lambda I)^\perp$，所以 $\lambda\notin\sigma_{co}(M_{D,E,F})$。同时，当 $\lambda\in\sigma_{co}(A)\cap\rho_{co}(B)\cap\rho_{co}(C)$ 时，$M_{D,E,F}-\lambda$ 作为从 $\ker(A-\lambda)\oplus\ker(A-\lambda)^\perp\oplus\ker(B-\lambda)\oplus\ker(B-\lambda)^\perp\oplus H_3$ 到 $H_1\oplus H_2\oplus H_3$ 关系均可以写为

$$M_{D,E,F}-\lambda=\begin{pmatrix}(A-\lambda)_1 & D & E_1\\ 0 & 0 & E_2\\ 0 & (B-\lambda)_1 & F_1\\ 0 & 0 & F_2\\ 0 & 0 & (C-\lambda)_1\end{pmatrix},$$

因为 $\overline{\operatorname{ran}\left(P_{\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}}D,P_{\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}}E\right)}=\operatorname{ran}(A-\lambda I)^{\perp}$，则 $\lambda\notin\sigma_{co}\left(M_{D,E,F}\right)$。因此，$\lambda\notin\sigma_{p,2}\left(M_{D,E,F}\right)$。

注 3.4 定理 3.4 表明，上三角关系矩阵 $M_{D,E,F}$ 的 $(2)-$类点谱 $\sigma_{p,2}(M_{D,E,F})$ 不仅依赖于对角元 A,B,C 的点谱性质，而且还受到非对角元多值部分与相应值域的影响。特别地，定理中出现的 Δ_2,Δ_3 受 $D(0),E(0),F(0)$ 的影响，当矩阵元均为算子时，由于 $A(0)=\{0\},B(0)=\{0\}$. 可知 $\Delta_2=\Delta_3=\varnothing$. 当矩阵元推广为线性关系后，多值部分不再消失。

4. 例子

下面举例说明上述结论的正确性。

例 1 设 $H_1=H_2=H_3=l^2$，对任意的 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^2$，定义关系 $A\in\mathcal{BCR}\ell(l^2)$，$B\in\mathcal{BCR}\ell(l^2)$，$C\in\mathcal{BCR}\ell(l^2)$ 满足

$$Ax=(x_1,0,0,0,x_2,0,0,0,x_3,0,0,0,\cdots)+A(0),$$

$$Bx=(x_1,0,0,x_2,0,0,x_3,0,0,\cdots),$$

$$Cx=(x_1,0,x_2,0,x_3,0,\cdots).$$

其中

$$A(0)=\left\{(0,x_1,0,0,0,x_2,0,0,0,x_3,\cdots):(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^2\right\},$$

显然，$0\notin\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)$，我们断言，$D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$，$E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$，$F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 使得 $0\in\sigma_p\left(M_{D,E,F}\right)$，事实上，定义

$$Ex=E(0)=\left\{(x_1,x_2,0,0,x_3,x_4,0,0,\cdots):(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^2\right\},$$

容易验证 $0\in\sigma_p\left(M_{D,E,F}\right)$，由定理 2 知，

$$\begin{aligned}0\in\ &\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)\cup\left\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\right\}\\ &\cup\left\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\operatorname{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\right\}.\end{aligned}$$

因为

$$D(0)\cap E(0)\cap\operatorname{ran}(A-\lambda I)=\operatorname{ran}A\not\subseteq A(0),$$

所以与定理 2 的结果一致。

例 2 设 $H_1=H_2=H_3=l^2$，对任意的 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^2$，定义关系 $A\in\mathcal{BCR}\ell(l^2)$，$B\in\mathcal{BCR}\ell(l^2)$，$C\in\mathcal{BCR}\ell(l^2)$ 满足

$$Ax=(x_1,0,0,0,x_2,0,0,0,x_3,0,0,0,\cdots),$$

$$Bx=(0,x_1,0,0,x_2,0,0,x_3,0,0,\cdots)+B(0),$$

$$Cx=(0,0,0,x_1,0,0,0,x_3,0,0,0,x_5,\cdots).$$

其中

$$B(0)=\{(0,x_1,0,0,0,x_2,0,0,0,x_3,\cdots):(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^2\},$$

显然，$0\notin\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)$，我们断言，$D\in\mathcal{BR}(H_2,H_1)$，$E\in\mathcal{BR}(H_3,H_1)$，$F\in\mathcal{BR}(H_3,H_2)$ 使得 $0\in\sigma_p(M_{D,E,F})$，事实上，定义

$$Fx=F(0)=\{(0,x_1,x_2,0,0,0,x_3,x_4,0,0,0,\cdots):(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in l^2\},$$

容易验证 $0\in\sigma_p(M_{D,E,F})$，由定理 2.1 知，

$$\begin{aligned}0\in&\sigma_p(A)\cup\sigma_p(B)\cup\sigma_p(C)\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:D(0)\cap E(0)\cap\mathrm{ran}(A-\lambda I)\not\subseteq A(0)\}\\&\cup\{\lambda\in\mathbb{C}:F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)\not\subseteq B(0)\}\cap(\rho_{co}(A)\cup\rho_{co}(B)\cup\rho_{co}(C)).\end{aligned}$$

因为

$$F(0)\cap\mathrm{ran}(B-\lambda I)=\mathrm{ran}B\not\subseteq B(0),$$

所以与定理 3 的结果一致。

5. 总结与展望

本章研究了无穷维复可分 Hilbert 空间 H_1,H_2,H_3 上三阶上三角关系矩阵的谱、点谱以及两类点谱与其对角元的对应谱的并集之间的联系，本文根据值域的稠密性将有界线性关系的点谱进一步细分为两类点谱，并利用分析方法给出了三阶上三角关系矩阵 $M_{D,E,F}$ 的谱、点谱以及两类点谱的性质。最后用例子证明结果的准确性。关于线性关系矩阵的谱扰动还有谱性质问题还有许多问题没有解决。例如：

一、研究 n 阶上三角关系矩阵谱的性质；

二、将 Hilbert 空间上的线性关系矩阵的谱、点谱和两类点谱的性质推广至 Banach 空间上的谱、点谱和两类点谱的性质。

参考文献

[1] Von Neumann, J. (1951) Functional Operators: The Geometry of Orthogonal Spaces. Princeton University Press.

[2] Arens, R. (1961) Operational Calculus of Linear Relations. *Pacific Journal of Mathematics*, **11**, 9-23. https://doi.org/10.2140/pjm.1961.11.9

[3] Cross, R. (1998) Multivalued Linear Operators. Marcel Dekker.

[4] Wilcox, D. (2002) Multivalued Semi-Fredholm Operators in Normed Linear Spaces. Ph.D. Thesis, University of Cape Town.

[5] Sandovici, A. and de Snoo, H. (2009) An Index Formula for the Product of Linear Relations. *Linear Algebra and its Applications*, **431**, 2160-2171. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.07.011

[6] Shi, Y.M. (2012) The Glazman-Krein-Naimark Theory for Hermitian Subspaces. *Journal of Operator Theory*, **68**, 241-256.

[7] Du, H.K. and Jin, P. (1994) Perturbation of Spectrums of 2 × 2 Operator Matrices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **121**, 761-766. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1994-1185266-2

[8] 阿拉坦仓, 青梅, 吴德玉. 2 × 2 无界上三角算子矩阵的谱[J]. 中国科学 A 辑, 2016, 46(2): 157-168.

[9] Han, J.K., Lee, H.Y. and Lee, W.Y. (1999) Invertible Completions of 2 × 2 Upper Triangular Operator Matrices. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **128**, 119-123. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-99-04965-5

[10] Rashid, M.H.M. (2019) Upper Triangular Operator Matrices, SVEP, and Property (w). *Acta Mathematica Vietnamica*, **44**, 993-1004. https://doi.org/10.1007/s40306-018-00307-0

[11] 曹小红. 3 × 3 阶上三角算子矩阵的 Weyl 型定理[J]. 数学学报(中文版), 2006, 49(3): 529-538.

[12] 吴秀峰, 黄俊杰, 阿拉坦仓. 三阶上三角算子矩阵的点谱剩余谱和连续谱的扰动[J]. 数学学报, 2015, 58(3): 423-430.

[13] Huang, J., Du, Y. and Huo, R. (2023) Fredholm Properties of Upper Triangular Matrices of Relations. *Advances in*

Operator Theory, **8**, Article No. 44. https://doi.org/10.1007/s43036-023-00263-z

[14] Du, Y. and Huang, J. (2020) Spectral Property of Upper Triangular Relation Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, **70**, 1526-1542. https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1765956

[15] 张艺濛, 吴秀峰. 上三角关系矩阵的两类点谱和两类剩余谱的性质[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2026, 57(1): 62-69.

[16] 杜燕燕. 线性关系矩阵的谱性质[D]: [博士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古大学数学科学学院, 2021.