Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 76-90
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164093

基于单边假设检验的MEWMA控制图

陈云云

成都理工大学数学科学学院，四川 成都

收稿日期：2026年3月5日；录用日期：2026年4月10日；发布日期：2026年4月20日

摘 要

在过程参数的漂移方向已知的情况下，使用单侧控制图来检测过程参数的漂移比普通的控制图效果更好。现有的单边监控的方法主要分为两大类。第一类是简单地使用双侧控制图的单一控制限，仅监控感兴趣的一侧。第二类是采用数据截断的方法，将不相关一侧的观测值设为零，仅保留需要监控的一侧。本文提出了一种新的控制图，该控制图基于单边假设检验的似然比统计量，同时应用两个单边检验的统计量来监控多元正态分布均值向量的变化。单侧统计量的构建与应用，使得该控制图能够结合单侧控制图较为灵敏的优点，在过程参数漂移方向未知的情况下，也能基本达到漂移方向已知时的单侧控制图的监控效果。新的控制图结合了滑动窗口，能够聚焦于局部数据，从而更快速地捕捉过程中的微小变化。采用蒙特卡洛模拟方法计算了所提控制图的平均运行长度(ARL)。模拟结果表明，所提控制图比现有方法能更快地检测到偏移。

关键词

单边假设检验，似然比，渐近分布，**MEWMA**

MEWMA Control Chart Based on One-Sided Hypothesis Testing

Yunyun Chen

College of Mathematics, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: March 5, 2026; accepted: April 10, 2026; published: April 20, 2026

Abstract

When the direction of a process parameter shift is known in advance, using one-sided control charts to detect the shift is more effective than using traditional control charts. Existing methods for one-sided monitoring can be broadly classified into two categories. The first simply employs a single control limit from a two-sided chart to monitor the side of interest. The second adopts data truncation

文章引用: 陈云云. 基于单边假设检验的 MEWMA 控制图[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 76-90.
DOI: 10.12677/pm.2026.164093

methods, where observations from the irrelevant side are set to zero, retaining only the side that requires monitoring. This paper proposes a novel control chart based on the likelihood ratio statistic for one-sided hypothesis testing, simultaneously applying two one-sided test statistics to monitor shifts in the mean vector of a multivariate normal distribution. The construction and application of these one-sided statistics enable the proposed chart to combine the sensitivity advantages of one-sided charts. Consequently, even when the direction of the process parameter shift is unknown, its monitoring performance is comparable to that of one-sided charts when the shift direction is known. The new chart incorporates a sliding window, allowing it to focus on local data and thereby capture small shifts in the process more quickly. The Average Run Length (ARL) of the proposed control chart was evaluated using Monte Carlo simulations. The simulation results demonstrate that the proposed chart detects shifts faster than existing methods.

Keywords

One-Sided Hypothesis Testing, Likelihood Ratio, Asymptotic Distribution, MEWMA

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

统计过程控制(SPC)是一种应用统计方法对生产过程进行监控和管理的质量管理技术。作为现代质量体系的关键组成部分，它广泛应用于制造业和服务业。其核心目标是将过程变异限制在仅由随机原因引起的范围内；任何异常波动都会立即触发警报并启动纠正措施。控制图是 SPC 的核心工具，以图表方式展示随时间变化的过程数据，为生产绩效提供直观的画面。通过控制图，可以实时监控生产过程，及早发现质量问题，并在造成重大损失之前采取纠正措施，从而实现质量改进和成本节约。

现有的控制图多为双边同时监测的控制图，这类控制图适用于质量特性发生变化的方向未知的时候，此时需要同时监控过程参数向上和向下的变化，例如，产品的尺寸、重量、强度等指标通常需要在一定的范围内，超出指定范围可能会影响产品的性能和寿命。近年来，双边控制图的研究已有了非常成熟的理论和应用。Lowry [1]提出了多元 EWMA 控制图，用于检测多元正态分布均值向量的偏移。Khatun 等[2]提出了自适应多维双抽样和变抽样区间的 Hotelling's T^2 控制图。Haq 等[3]提出了一种自适应 EWMA 控制图，利用 EWMA 统计量构建均值偏移的无偏估计量，增强了控制图的监控性能。Sanchez-Marquez 和 Vivas [4]将回归模型的权重引入多元统计过程控制，并使用多元回归模型的系数来量化各质量特征对最终质量的影响，从而优化监控策略并提高故障检测的敏感性。Wu [5]设计了一种基于滑动窗口的高维非参数 EWMA 控制图，用于卵巢癌监测和早期预警。关于双边多元控制图的更多相关研究，我们可以参考 Xie 等[6]、Cabana 和 Lillo [7]、Zhao 等[8]、Capezza 等[9]以及 Hu [10]的工作。但如果我们能够提前知道过程参数会向哪个方向漂移，这时使用单边控制图比双边控制图监控更加有效。

在某些特殊情况下，我们能够提前知道过程参数变化方向，例如，在疾病爆发监测中，监控疾病发病率是否超过某个阈值，此时只需要关注质量特性单侧的变化情况，在这类问题中，使用单边的控制图进行过程监控会比双边控制图提前发出报警信号。单边单变量 EWMA 控制图由 Shu 等[11]开发。其思想是在 EWMA 估计的迭代计算中，只累积正(负)观测值，并将负(正)观测值设置为零，以快速捕捉到过程均值的向上/向下偏移。他们发现，在检测单变量正态分布过程均值的增加或减少时，单边 EWMA 图比双边 EWMA 图更敏感。Joner 等[12]提出了一种单侧 MEWMA 控制图，用于快速检测特定疾病或其他医

疗状况发病率的增加，当不感兴趣的一侧的 EWMA 统计量低于或高于目标值时将其重置为目标值。继 Joner 等[12]的工作之后，Haq [13]提出了一种单侧 MEWMA 控制图，用于有效监控多元正态分布的均值向量。通过将正/负观测值截断为零，并将转换后的数据应用于 EWMA 控制图，显著增强了控制图检测多元分布过程均值向量单侧偏移的能力。关于单侧多元控制图的最新研究可以参考 Chew [14]、Mehmood 等[15]、Zhang 等[16]。

分析现有成果，大多检测单侧偏移的控制图，要么依赖单一控制限来监控单侧变化，要么使用截断数据构建统计量。受 Zhu 和 Chen [17]的多参数单侧假设检验启发，我们开发了一种新的控制图，新控制图同时应用两个单边检验的统计量来监控多元正态分布均值向量的变化，称为 OSHT-MEWMA 控制图。我们通过在原假设空间内最小化目标函数来确定最优参数，这些参数被用于统计量的构建，单侧统计量的构建与应用，使得该控制图能够结合单侧控制图较为灵敏的优点，在过程参数漂移方向未知的情况下，也能基本达到漂移方向已知时的单侧控制图的监控效果。为统一样本量对统计量的影响，在统计量中加入了滑动窗口，当窗口大小为 D 时，关注最近 D 个样本的变化，以提高检测效率。OSHT-MEWMA 控制图将此统计量与 EWMA 控制图相结合。ARL 性能比较表明，在检测过程均值向量偏移时，所提出的单侧多元控制图优于现有的单侧 MEWMA 控制图。真实数据的实验结果表明，我们的控制图总是比现有控制图更早地触发失控信号。

2. 单边假设检验

2.1. 单边似然比检验

假设随机变量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$，服从 p 维的多元正态分布 $\boldsymbol{X}\sim MVN(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，$\boldsymbol{\mu}$ 为均值向量，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$。考虑检验问题：

$$H_0:\boldsymbol{\mu}\geq\mathbf{0}\ \text{vs}\ H_1:\boldsymbol{\mu}<\mathbf{0} \tag{2-1}$$

假设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 未知，$\bar{\boldsymbol{X}}$ 是样本均值，我们用样本协方差矩阵 $\boldsymbol{S}$ 来估计 $\boldsymbol{\Sigma}$：

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{X}_i-\bar{\boldsymbol{X}}\right)\left(\boldsymbol{X}_i-\bar{\boldsymbol{X}}\right)^{\top} \tag{2-2}$$

在正态分布情况下，$\bar{\boldsymbol{X}}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 对 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的估计是完全而充分的。

经过简单的代数变换，对数似然函数为：

$$\ell_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})=-\frac{n}{2}\log\det(\boldsymbol{\Sigma})-\frac{n}{2}\operatorname{tr}\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left[\boldsymbol{S}+\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\top}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\right]\right\} \tag{2-3}$$

为了建立似然比统计量(LRT)，我们需要找到原假设和无约束条件下对数似然函数 $\ell_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ 的最大值点，在无约束条件下的解为无约束条件下 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的极大似然估计值：

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}=\bar{\boldsymbol{X}},\quad\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\boldsymbol{S} \tag{2-4}$$

将解代入对数似然函数，得到无约束条件下似然函数的最大值：

$$\sup\ell_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})=-\frac{n}{2}\left[\log\det(\boldsymbol{S})+p\right] \tag{2-5}$$

对于原假设条件下的解，对 2-3 式固定 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 求偏导，

$$\frac{\partial\ell_n(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})}{\partial\boldsymbol{\Sigma}}=-\frac{n}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}+\frac{n}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left[\boldsymbol{S}+\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\top}\right]\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tag{2-6}$$

令上述偏导数等于 0，得到 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的极大似然估计，记为：

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mu}=\boldsymbol{S}+\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\top} \tag{2-7}$$

将上式带入 2-3 式中，得到关于 $\boldsymbol{\mu}$ 的边际对数似然函数为：

$$\begin{aligned}\ell_{n}\left(\boldsymbol{\mu},\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mu}\right)&=-\frac{n}{2}\left\{\log\det\left(\boldsymbol{S}+\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\top}\right)+p\right\}\\&=-\frac{n}{2}\left(\log\det\left(\boldsymbol{S}^{1/2}\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}^{-1/2}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1/2}\right]\boldsymbol{S}^{1/2}\right)+p\right)\\&=-\frac{n}{2}\left(\log\det\left(\boldsymbol{S}^{1/2}\left[1+\left[\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1/2}\right]\left[\boldsymbol{S}^{-1/2}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\right]\right]\boldsymbol{S}^{1/2}\right)+p\right)\\&=-\frac{n}{2}\left\{\log\det\left(\boldsymbol{S}\right)+\log\left[1+\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\right]+p\right\}\end{aligned} \tag{2-8}$$

最大化这个似然函数就是最小化目标函数：

$$\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right) \tag{2-9}$$

即在原假设条件 H_0 下，通过最优化上述目标函数，得到原假设条件下的 $\boldsymbol{\mu}$ 的极大似然估计，记为 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0$，即：

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_0=\arg\min_{\boldsymbol{\mu}\geq 0}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right) \tag{2-10}$$

通过两个似然函数得似然比统计量的表达式：

$$\begin{aligned}R_n&=2\left\{\sup\ell_n\left(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\right)-\sup_{H_0}\ell_n\left(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}\right)\right\}\\&=n\log\left\{1+\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\right)\right\}\end{aligned} \tag{2-11}$$

其中 R_n 对 T_n 单调：

$$T_n=n\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\right) \tag{2-12}$$

取 T_n 作为我们的检验统计量。

2.2. 统计量的渐近分布

公式 2-12 是一个带非负约束的 Hotelling's T^2 统计量。我们知道当样本量很大时，Hotelling's T^2 的渐近分布是卡方分布。带有约束的 Hotelling's T^2 的渐近分布其实是一个混合卡方分布[18]。下面我们将推导统计量 T_n 的渐近分布。

由中心极限定理：

$$\sqrt{n}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}_p\left(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma}\right) \tag{2-13}$$

定义：

$$\boldsymbol{Y}_n=\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\left[\sqrt{n}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)\right]\xrightarrow{d}\boldsymbol{Y}\sim\mathcal{N}_p\left(\mathbf{0},\boldsymbol{I}_p\right) \tag{2-14}$$

设真实参数为 $\boldsymbol{\mu}$，令

$$\boldsymbol{\delta}_n=\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0-\boldsymbol{\mu}\right) \tag{2-15}$$

那么：

$$\sqrt{n}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\right)=\sqrt{n}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}\right)-\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0-\boldsymbol{\mu}\right)=\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{\delta}_n \tag{2-16}$$

因此：

$$\begin{aligned}T_n&=n\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\right)\\&=\sqrt{n}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\left(\sqrt{n}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\right)\right)\\&=\left(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{\delta}_n\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Y}_n-\boldsymbol{\delta}_n\right)\end{aligned} \tag{2-17}$$

我们知道，$\boldsymbol{S}^{-1}$ 依概率收敛到 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$，即：$\boldsymbol{S}^{-1}\xrightarrow{P}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$，

$$\begin{aligned}&T_n\xrightarrow{d}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\delta}\right)^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\delta}\right)\\&=\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\delta}\right)^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\delta}\right)\\&=\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\delta}\right)^{\top}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\delta}\right)\end{aligned} \tag{2-18}$$

其中 $\boldsymbol{\delta}$ 是 $\boldsymbol{\delta}_n$ 的极限分布。

原约束 $\boldsymbol{\mu}\ge 0$ 等价于 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\ge 0$，即：$\boldsymbol{\mu}+\frac{\boldsymbol{\delta}_n}{\sqrt{n}}\ge 0$，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{\boldsymbol{\delta}_n}{\sqrt{n}}\to 0$，所以约束在极限下取决于真实的 $\boldsymbol{\mu}$。

(1) 当真实的 $\boldsymbol{\mu}$ 在 H_0 内部 $\boldsymbol{\mu}>0$ 时，这时对大 n，$\hat{\boldsymbol{\mu}}_0$ 不受约束影响，因此 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\approx\bar{\boldsymbol{X}}$，所以 $\boldsymbol{\delta}_n$ 无限制，极限问题变为无约束最小化，解为 $\boldsymbol{\delta}=0$，因此 $T_n\xrightarrow{d}0$。

(2) 真实 $\boldsymbol{\mu}$ 在边界，这是最坏的情况，这时为了得到原假设 H_0 下的分布，考虑最小有利参数，即 $\boldsymbol{\mu}=0$。此时，$\boldsymbol{\delta}_n=\sqrt{n}\hat{\boldsymbol{\mu}}_0$，约束 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0\ge 0$ 变为 $\boldsymbol{\delta}_n\ge 0$。

于是极限优化问题转化为：

$$\min_{\boldsymbol{\delta}\ge\boldsymbol{0}}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\delta}\right)^{\top}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\delta}\right) \tag{2-19}$$

令 $\tilde{\boldsymbol{\delta}}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\delta}$，则约束 $\boldsymbol{\delta}\ge 0$ 转化为：

$$\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\tilde{\boldsymbol{\delta}}\ge\boldsymbol{0} \tag{2-20}$$

这是一个线性不等式约束的锥。目标函数可以简化为 $\left\|\boldsymbol{Y}-\tilde{\boldsymbol{\delta}}\right\|^2$，这表示从 $\boldsymbol{Y}$ 到 $\tilde{\boldsymbol{\delta}}$ 的马氏距离。令 $\mathcal{C}=\left\{\tilde{\boldsymbol{\delta}}\in\mathbb{R}^p:\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\tilde{\boldsymbol{\delta}}\ge 0\right\}$，极限分布为：

$$T_n\xrightarrow{d}\min_{\tilde{\boldsymbol{\delta}}\in C}\left\|\boldsymbol{Y}-\tilde{\boldsymbol{\delta}}\right\|^2 \tag{2-21}$$

因此，极限分布是多元标准正态向量投影到一个凸锥上的平方距离的分布。

所以 T_n 的分布为：

$$T_n\xrightarrow{d}\begin{cases}0, & \boldsymbol{\mu}>\boldsymbol{0},\\ \min_{\boldsymbol{\delta}\in C}\left\|\boldsymbol{Y}-\tilde{\boldsymbol{\delta}}\right\|^2, & \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0},\end{cases} \tag{2-22}$$

其中 $\boldsymbol{Y}\sim N_p\left(0,\boldsymbol{I}\right)$，$\mathcal{C}=\left\{\tilde{\boldsymbol{\delta}}\in\mathbb{R}^p:\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\tilde{\boldsymbol{\delta}}\ge 0\right\}$。

由 Silvapull 和 Sen [18]的引理 3.13，$\min_{\tilde{\delta}\in\mathcal{C}}\left\|\boldsymbol{Y}-\tilde{\boldsymbol{\delta}}\right\|^2$ 的渐近分布为下式的混合卡方分布：

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{\delta}}\in C}\left\|\boldsymbol{Y}-\tilde{\boldsymbol{\delta}}\right\|^2\sim\sum_{i=0}^{p}\omega_i\chi_i^2 \tag{2-23}$$

其中，$\sum_{i=0}^{p}\omega_i=1$，且 $\omega_i\ge 0$，$\boldsymbol{Y}\sim N_p\left(0,\boldsymbol{I}\right)$，$\mathcal{C}=\left\{\tilde{\boldsymbol{\delta}}\in\mathbb{R}^p:\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\tilde{\boldsymbol{\delta}}\ge 0\right\}$。

特殊情况下，当所有变量相互独立，即 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}$ 时，优化问题变成：

$$\min_{\boldsymbol{\delta}\ge\boldsymbol{0}}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\delta}\right)^{\top}\left(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{\delta}\right),\quad \boldsymbol{Y}\sim\mathcal{N}_p\left(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}\right) \tag{2-24}$$

这个问题的解是 $\boldsymbol{Y}$ 到非负象限 $\mathbb{R}_{+}^{p}$ 的正交投影。其解析解为：

$$\delta_j=\max\left(0,Z_j\right),\quad j=1,\cdots,p \tag{2-25}$$

于是残差为

$$Z_j-\delta_j=\min\left(0,Z_j\right)=Z_j^{-},\quad j=1,\cdots,p. \tag{2-26}$$

因此：

$$T_n\xrightarrow{d}\sum_{j=1}^{p}\min\left(0,Z_j\right)^2=\sum_{j=1}^{p}\left(Z_j^{-}\right)^2 \tag{2-27}$$

因为 $Z_j\sim i.i.d.N\left(0,1\right)$，所以：

$$\left(Z_j^{-}\right)^2=\begin{cases}0, & Z_j\ge 0,\\ Z_j^2, & Z_j<0.\end{cases} \tag{2-28}$$

由于 $P\left(Z_j\ge 0\right)=P\left(Z_j<0\right)=1/2$，记每个 $\left(Z_j^{-}\right)^2$ 的分布为：

$$D_j\sim\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{2}\chi_1^2 \tag{2-29}$$

则 T_n 的极限分布是 p 个独立混合变量的和：

$$T_n\xrightarrow{d}\sum_{j=1}^{p}D_j \tag{2-30}$$

该分布的累积分布函数可以写成：

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{p}D_j\le x\right)=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^{-p}\,\mathbb{P}\left(\chi_k^2\le x\right),\quad x\ge 0 \tag{2-31}$$

其中 $\chi_0^2\equiv 0$。当 $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{I}$ 时，极限分布的具体形式为：

$$T_n\xrightarrow{d}\sum_{j=1}^{p}\left(Z_j^{-}\right)^2\sim\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^p\chi_k^2 \tag{2-32}$$

3. 提出控制图

3.1. OSHT-MEWMA 控制图

在本小节我们将 2.1 中所提出的单边似然比检验与 EWMA 控制图相结合来构造监控统计量。我们首先将 2.1 中所提出的单边统计量记为

$$T_n^{-}=n\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0^{-}\right)^{\top}\boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}}-\hat{\boldsymbol{\mu}}_0^{-}\right) \tag{3-1}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0^{-}$ 是原假设 H_0 条件下的 $\boldsymbol{\mu}$ 的极大似然估计。根据 2.1 的方法过程，在假设条件

$$H_0:\boldsymbol{\mu}\le\boldsymbol{0}\quad\text{vs}\quad H_1:\boldsymbol{\mu}>\boldsymbol{0} \tag{3-2}$$

下，我们可以得到统计量：

$$T_n^+ = n\left(\bar{\boldsymbol{X}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_0^+\right)^\top \boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_0^+\right) \tag{3-3}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0^+$ 是原假设 H_a 条件下的 $\boldsymbol{\mu}$ 的极大似然估计。

在将统计量与 EWMA 控制图相结合之前，为了固定样本量 n 对 T_n 的影响，我们引入了滑动窗口 D。随着检测点向后续位置移动，一个新的样本点代替窗口内最远位置的样本点，从而构成新的检测窗口。加入滑动窗口以后，两个统计量的计算公式如下：

$$T_t^{-D} = \left(\bar{\boldsymbol{X}}_t^D - \hat{\boldsymbol{\mu}}_0^-\right)^\top \boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}}_t^D - \hat{\boldsymbol{\mu}}_0^-\right) \tag{3-4}$$

$$T_t^{+D} = \left(\bar{\boldsymbol{X}}_t^D - \hat{\boldsymbol{\mu}}_0^+\right)^\top \boldsymbol{S}^{-1}\left(\bar{\boldsymbol{X}}_t^D - \hat{\boldsymbol{\mu}}_0^+\right) \tag{3-5}$$

令 $T_t^D = \max\left(T_t^{-D}, T_t^{+D}\right)$，将 T_t^D 代入 EWMA 中得：

$$Z_t^D = (1-\lambda) Z_{t-1}^D + \lambda T_t^D,\quad (0 < \lambda < 1) \tag{3-6}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{X}}_t^D = \frac{1}{D}\sum_{i=t-D+1}^{t} X_i$，$\lambda$ 为平滑参数，取值范围在(0, 1)内，λ 决定了新数据和历史数据在计算 EWMA 统计量时的权重。λ 越大，新数据的权重越大，历史数据的权重越小，这使得 EWMA 统计量对新数据的变化更敏感。

3.2. 控制图统计量的均值与方差

由上一节得：

$$T_n \sim \sum_{i=0}^{p} \omega_i \chi_i^2 \tag{3-7}$$

其中 χ_0^2 是退化分布(常数 0)，权重 ω_i 满足 $\sum_{i=0}^{p}\omega_i = 1$，且 $\omega_i \ge 0$。并且 χ_i^2 表示自由度为 i 的卡方分布。

EWMA 控制图统计量的定义为：

$$Z_t = (1-\lambda) Z_{t-1} + \lambda T_t \tag{3-8}$$

可以等价定义为：

$$Z_t = \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j T_{t-j} + (1-\lambda)^t Z_0 \tag{3-9}$$

于是

$$E(Z_t) = \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j E(T_{t-j}) + (1-\lambda)^t E(Z_0) \tag{3-10}$$

令 $m = E(T_t) = \sum_{i=0}^{p}\omega_i E\left(\chi_i^2\right) = \sum_{i=0}^{p}\omega_i i$，设 $Z_0 = 0$，EWMA 统计量的均值和方差分别为：

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j E(T_{t-j}) \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j m \\ &= m\left(1-(1-\lambda)^t\right) \end{aligned} \tag{3-11}$$

$$\operatorname{Var}\left(Z_t\right)=\frac{\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]\lambda}{2-\lambda}\operatorname{Var}\left(T_t\right) \tag{3-12}$$

令 $v=\operatorname{Var}\left(T_t\right)=E\left(T_t^2\right)-\left[E\left(T_t\right)\right]^2$，其中

$$\begin{aligned} E\left(T_t^2\right) &= \sum_{i=0}^{p} w_i E\left(\chi_i^2\right) \\ &= \sum_{i=0}^{p} w_i\left[\operatorname{Var}\left(\chi_i^2\right)+\left[E\left(\chi_i^2\right)\right]^2\right] \\ &= \sum_{i=0}^{p} w_i\left(2i+i^2\right) \end{aligned} \tag{3-13}$$

由 $\left[E\left(T_t\right)\right]^2=m^2$，得 $v=\sum_{i=0}^{p}\omega_i\left(2i+i^2\right)-m^2$，所以：

$$\operatorname{Var}\left(Z_t\right)=\frac{\left[1-(1-\lambda)^{2t}\right]\lambda}{2-\lambda}v. \tag{3-14}$$

需要说明的是，上述均值和方差的计算(式 3-11 至 3-14)隐含了观测值 T_t 相互独立的假设。然而，考虑到 T_t 序列的实际生成背景，本文中的 T_t 是非独立的。因此，当前推导出的控制图参数(如式 3-14)为基于简化模型的理论近似。

4. 模拟

4.1. 各参数组合下的控制限

根据 3.1 提出的控制图，运用蒙特卡洛模拟计算控制图的控制限。首先给定受控条件下的 ARL_0，常用的 ARL_0 有 200，370，500，这里我们给定 ARL_0 为 200 来计算控制图的控制限。在给定 ARL_0 条件下，控制限 h 受平滑参数 λ、滑动窗口大小 D、和维度 P 的影响。我们选择这三个参数的多种情况，观察不同参数情况对控制限的影响。对平滑参数 λ，考虑了 $\lambda = 0.05$，0.1，0.25，对滑动窗口大小 D，考虑了 D = 6，8，10，15，对维度 P，考虑 P = 2，5，10，结果如表 1 所示。

Table 1. Control limits under different parameter combinations
表 1. 不同参数组合下的控制限

	P	2			5			10		
D	λ	0.05	0.1	0.25	0.05	0.1	0.25	0.05	0.1	0.25
6	h	2.78	3.63	5.35	5.24	6.39	8.59	8.76	10.24	12.96
6	ARL_0	200.75	199.49	200.73	199.07	200.58	200.11	199.77	201.63	200.28
6	$SDRL_0$	175.73	188.39	200.28	161.95	186.82	198.68	155.7	181.85	195.5
8	h	2.87	3.77	5.48	5.35	6.58	8.78	8.95	10.51	13.25
8	ARL_0	200.21	199.09	200.37	199.13	199.29	199.47	200.04	200.62	199.37
8	$SDRL_0$	178.53	187.55	197.9	164.92	181.79	195.59	163.41	181.75	194.61
10	h	2.93	3.87	5.52	5.48	6.74	8.9	9.08	10.72	13.39
10	ARL_0	199.1	198.87	201.02	200.88	200.46	200.23	199.09	200.79	199.29

续表

10	$SDRL_0$	174.64	189.08	194.95	173.21	189.94	197.03	158.07	188.03	197.49
15	h	3.05	4	5.5	5.64	6.91	8.93	9.28	10.95	13.5
15	ARL_0	200.43	200.05	201.1	199.99	199.23	199.2	199.53	199.25	202.9
15	$SDRL_0$	183.38	196.47	196.85	175.16	187.22	196.51	164.41	185.5	199.46

从表中可以看出，当其他参数固定时，控制限 h 随 λ 的增大而增大，例如，当 $P=2$，$D=6$ 时，λ 在 0.05，0.1，0.25 对应的控制限 h 分别是 2.78、3.63、5.35。$SDRL_0$ 与控制限有相同的变化情况。当 λ 和 P 固定时，控制限 h 会随滑动窗口的增大而增大，例如，当 $\lambda=0.1$、$P=2$ 时，D 在 6，8，10，15 时对应的控制限 h 大小分别为 6.39、6.58、6.74、6.91，但控制限相差不大。当固定 λ 和 D 不变时，控制限 h 随 P 的增大而增大，例如，当 $D=10$、$\lambda=0.25$ 时，$P=2$，5，10 对应的控制限 h 大小分别为 5.52、8.9、13.9，并且此时控制限相差较大，此时，$SDRL_0$ 随 P 的增大而减小。所以总体来说控制限 h 受滑动窗口影响不大，受平滑参数 λ 和维度 P 影响较大。

4.2. 滑动窗口大小的影响

在本小节中，我们模拟了不同滑动窗口大小对不同应用场景的影响。模拟结果见表 2。从表 2 中可以看出：

(1) 在小漂移的场景下($\delta \le 0.5$)，ARL_1 随 D 增大而持续下降，降幅较为明显。这表明在小漂移场景下，较大的 D 有助于提升检测效率。中等漂移场景($0.75 \le \delta \le 1$)，ARL_1 随 D 增大的情况仍呈下降趋势，但降幅逐渐收窄，$D = 15$ 时已接近理想检测水平。大漂移场景($\delta \ge 2$)，当 $\delta \ge 2$ 时，各 D 取值下的 ARL_1 均已降至 1 或接近 1，D 对检测效率的影响基本消失。

(2) ARL_1 仅反映从窗口形成到检测到信号所需的样本数，但实际监控中，控制图需要积累 D 个样本才能形成第一个检测窗口。因此，真实检测时间(Detection Time, $DT = ARL_1 + D$)更能全面反映 D 对检测延迟的综合影响。DT 随 D 增大而显著增加，虽然 ARL_1 随 D 增大有所下降，但 D 的增加直接导致 DT 上升。以 $\delta=0.5$ 为例，$D=6$ 时 $DT=17.15$，$D=15$ 时 $DT=21.40$，增加了 4.25 个样本。D 对 DT 的影响在 δ 较小时更为显著：$\delta=0.5$ 时，$D=6$ 与 $D=15$ 的 DT 相差 4.25；$\delta=1$ 时，两者相差 7.28；$\delta=2$ 时，相差 9.00。这表明较大的 D 在小漂移场景下对真实检测时间的负面影响更为突出。基于上述分析，以最小化真实检测时间为目标，为不同应用场景提供以下量化建议，关注极小漂移($\delta \le 0.5$)时，建议选择 $D=6$ 或 8，此时 ARL_1 的改善不足以弥补 D 增加带来的 DT 上升，关注中等漂移($0.75 \le \delta \le 1$)时，建议选择 $D=8$ 或 10，在检测效率和首次延迟之间取得平衡，关注大漂移($\delta \ge 2$)时，可选择 $D=6\sim10$ 任意值，ARL_1 已接近理想水平，主要考虑 DT 最小化。滑动窗口 D 的选择需在检测效率(ARL_1)和真实检测时间(DT)之间进行权衡。虽然较大的 D 能略微提升 ARL_1，但会显著增加 DT，尤其在微小漂移场景下影响更为突出。在多数场景下，$D=8$ 能实现检测能力与响应速度的较好平衡。

Table 2. Effect of sliding window size
表 2. 滑动窗口大小的影响

			δ							
D	P	λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.75	1	2	3
6	2	0.05	83.06	44.21	26.73	17.9	12.92	6.69	4.02	1.21	1

续表

6	2	0.1	87.74	43.55	25.14	16.37	11.15	5.5	3.21	1.04	1
6	2	0.25	92.73	48	26.82	16.37	10.75	4.55	2.41	1	1
8	2	0.05	81.69	41.73	24.77	16.24	11.46	5.63	3.34	1.04	1
8	2	0.1	82.35	40.88	22.98	14.33	9.84	4.52	2.59	1	1
8	2	0.25	86.52	43.29	23.46	14.25	9	3.61	1.81	1	1
10	2	0.05	77.86	39.75	22.71	14.62	10.08	4.82	2.81	1	1
10	2	0.1	80.31	39.45	21.81	13.23	8.69	3.8	2.15	1	1
10	2	0.25	86.27	41.26	21.62	12.49	7.62	2.78	1.46	1	1
15	2	0.05	74.93	35.63	19.52	11.83	7.79	3.46	2.03	1	1
15	2	0.1	74.86	34.16	17.77	10.22	6.4	2.59	1.49	1	1
15	2	0.25	77.89	34.66	17.07	9.27	5.12	1.71	1.08	1	1
6	5	0.05	62.09	30.77	18.62	12.46	9.02	4.81	3.02	1.01	1
6	5	0.1	61.27	26.92	15.31	9.7	6.71	3.41	2.18	1	1
6	5	0.25	70.04	29.22	14.44	8.45	5.35	2.35	1.39	1	1
8	5	0.05	60.01	28.31	16.48	10.94	7.75	4	2.48	1	1
8	5	0.1	60.18	25.42	13.65	8.55	5.76	2.87	1.82	1	1
8	5	0.25	61.96	25.35	12.01	6.77	4.15	1.8	1.11	1	1
10	5	0.05	58.08	26.41	15.34	9.78	6.81	3.43	2.17	1	1
10	5	0.1	56.38	23.61	12.3	7.54	4.99	2.44	1.51	1	1
10	5	0.25	60.18	22.87	10.71	5.78	3.45	1.48	1.03	1	1
15	5	0.05	54.05	22.58	12.28	7.54	5.06	1.64	1	1	1
15	5	0.1	51.66	20.23	9.79	5.59	3.63	1.83	1.07	1	1
15	5	0.25	53.79	18.42	7.81	3.81	2.21	1.08	1	1	1
6	10	0.05	49.83	24.05	14.81	10.21	7.39	4.07	2.61	1	1
6	10	0.1	45.39	18.91	10.74	7.05	5.03	2.73	1.85	1	1
6	10	0.25	47.88	17.12	8.28	4.85	3.2	1.63	1.05	1	1
8	10	0.05	47.34	22.06	13.07	8.81	6.33	3.37	2.17	1	1
8	10	0.1	42.89	17.45	9.51	6.09	4.29	2.27	1.47	1	1
8	10	0.25	44.35	15.24	7.05	4.02	2.62	1.29	1	1	1
10	10	0.05	45.56	20.23	11.73	7.68	5.49	2.87	1.97	1	1
10	10	0.1	41.79	16.1	8.52	5.29	3.71	2.03	1.16	1	1

续表

10	10	0.25	40.95	13.56	5.9	3.32	2.19	1.1	1	1	1
15	10	0.05	41.22	16.8	9.39	5.89	4.14	2.17	1.34	1	1
15	10	0.1	37.38	13.25	6.49	3.95	2.73	1.46	1	1	1
15	10	0.25	35.39	10.4	4.13	2.28	1.53	1	1	1	1

4.3. 多种控制图的性能比较

在这一节我们将所提出的 OSHT-MEWMA 控制图与现有控制图(Abdul Haq (2020)提出的控制图、Joner 等人(2008)提出的 MEWMA 及 Lowry 等提出的 MEWMA 控制图，以下简称 AH-MEWMA、J-MEWMA 和 MEWMA)进行比较。从上一小节的结论可以看出，滑动窗口越大，控制图监控效果越好，但我们控制图的设计是从第 D + 1 个样本开始监测，当滑动窗口值较大时，会浪费监测样本，在这里我们综合监测效果来考虑，选取滑动窗口大小 D = 8 来与其他控制图比较监测性能。给定 $ARL_0 = 200$，平滑参数$\lambda = 0.05$，0.1，0.25，维度 P = 2，5，10，比较四种控制图在漂移大小分别为 0.5，1，1.5，2，3，4，5 时的 ARL_1，模拟结果如表 3 所示。根据表 3，可以得出以下结论：

1) 随着 δ 的增大，OSHT-MEWMA 控制图的 ARL_1 减小，并且 δ 越大，ARL_1 就越小，在 $\delta = 4$ 的时候，各参数下的 ARL_1 都降到了 1，三个对比控制图也有相同的结论。

2) 在漂移较小的时候($\delta = 0.5$)，对于较大的λ($\lambda = 0.25$)，OSHT-EWMA 控制图监测效果更好。例如在 $\lambda = 0.25$，P = 2，5，10 时对应的 ARL_1 分别为 32.21、47.51、67.34，在相同条件下，AH-MEWMA 控制图的 ARL_1 分别为 45.69、65.77、83.5。J-MEWMA 控制图的 ARL_1 分别为 46.16、70.52、92.66。MEWMA 控制图的 ARL_1 分别为 39.23、57.46，76.74。

3) 当漂移较大的时候 OSHT-MEWMA 图监控性能优于三种对比方法。例如，在 P = 5，$\lambda = 0.1$ 时，对于 $\delta = 1$、1.5、2、3、4、5 时，OSHT-MEWMA 图对应的 ARL_1 分别为 11.58、4.9、2.76、1.32、1、1，全面优于三种对比控制图。

4) 当λ较小的时候($\lambda = 0.05, 0.1$)，对于小漂移($\delta = 0.5$)，OSHT-MEWMA 控制图监控效果不如两种对比方法，此时 AH-MEWMA 控制图监控效果最好。

综合来看，中等及以上漂移($\delta \geq 1.5$)OSHT-MEWMA 具有显著优势，检测速度快，稳定性好，尤其适合需要快速响应的生产过程监控。λ取值较大($\lambda = 0.25$)的小漂移场景：OSHT-MEWMA 性能优异，可替代传统方法。高维过程监控中，OSHT-MEWMA 在中大漂移范围内表现稳健，适合高维质量特性监控。λ取值较小($\lambda = 0.05, 0.1$)的小漂移场景，OSHT-MEWMA 的检测灵敏度略低于 AH-MEWMA 和传统 MEWMA。

Table 3. Comparison of ARL_1 for multiple control charts
表 3. 多种控制图的 ARL_1 比较

				δ							
P	λ	chart	h	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5
2	0.05	OSHT	2.87	200.21	34.55	9.44	4.22	2.48	1.17	1	1
		AH-MEWMA	9.22	200.99	29.05	10.91	6.33	4.41	2.81	2.14	1.86
		J-MEWMA	8.53	199.06	29.98	12.31	7.8	5.72	3.83	2.96	2.37
		MEWMA	7.35	200.41	26.77	11.23	7.14	5.27	3.54	2.75	2.20

续表

2	0.1	OSHT	3.77	199.09	31.32	7.33	3.11	1.79	1.01	1	1
		AH-MEWMA	11.66	199.74	31.38	10.11	5.56	3.81	2.4	1.87	1.47
		J-MEWMA	9.58	199.07	32.24	11.11	6.58	4.7	3.1	2.34	2.01
		MEWMA	8.64	200.31	27.88	10.18	6.09	4.41	2.93	2.23	1.97
2	0.25	OSHT	5.48	200.37	32.21	5.99	2.07	1.17	1	1	1
		AH-MEWMA	15.7	199.6	45.69	11.48	5.29	3.39	2	1.46	1.13
		J-MEWMA	10.46	199.14	46.16	11.91	5.83	3.84	2.38	1.84	1.44
		MEWMA	9.91	200.24	39.23	10.61	5.42	3.64	2.30	1.76	1.37
5	0.05	OSHT	5.35	199.13	52.69	15.36	7.12	4.11	2.06	1.14	1
		AH-MEWMA	15.61	199.91	37.29	13.56	7.91	5.46	3.45	2.59	2.09
		J-MEWMA	14	201.04	39.68	15.61	9.77	7.16	4.74	3.61	2.99
		MEWMA	12.94	200.42	34.56	14.31	9.12	6.69	4.49	3.42	2.87
5	0.1	OSHT	6.58	199.29	46.9	11.58	4.9	2.76	1.32	1	1
		AH-MEWMA	18.6	199.79	42.24	12.81	6.81	4.6	2.86	2.16	1.86
		J-MEWMA	15.12	199.49	45.39	14.34	8.14	5.8	3.76	2.86	2.28
		MEWMA	14.54	199.07	37.24	12.88	7.59	5.46	3.57	2.74	2.19
5	0.25	OSHT	8.78	199.47	47.51	9.4	3.16	1.66	1	1	1
		AH-MEWMA	23.33	200.79	65.77	15.52	6.56	4.01	2.33	1.72	1.31
		J-MEWMA	15.84	201.49	70.52	16.91	7.55	4.74	2.83	2.12	1.81
		MEWMA	16.02	199.62	57.46	14.71	6.98	4.50	2.72	2.08	1.76
10	0.05	OSHT	8.95	200.04	72.06	23.22	10.74	6.27	3.02	1.99	1.18
		AH-MEWMA	24.05	200.56	45.6	16.37	9.39	6.53	4.13	3.08	2.47
		J-MEWMA	21.46	200.63	48.85	19.01	11.86	8.64	5.72	4.32	3.53
		MEWMA	20.70	200.05	42.43	17.33	11.01	8.13	5.44	4.15	3.36
10	0.1	OSHT	10.51	200.62	65.4	16.77	7.13	4.02	2.03	1.1	1
		AH-MEWMA	27.51	200.75	53.06	15.38	8.06	5.4	3.32	2.46	2.04
		J-MEWMA	22.57	199.44	59.01	17.63	9.87	6.91	4.45	3.34	2.77
10	0.25	OSHT	13.25	199.37	67.34	13.78	4.54	2.33	1.07	1	1
		AH-MEWMA	32.89	200.22	83.5	19.91	7.93	4.67	2.63	1.96	1.56
		J-MEWMA	22.93	199.23	92.66	23.51	9.51	5.78	3.33	2.41	2.02
		MEWMA	24.39	199.06	76.74	20.03	8.76	5.44	3.22	2.36	1.99

4.4. 多种控制图的 RMI 比较

为了评估控制图的整体性能，在这里引入了相对平均指数(Relative Mean Index, RMI)。Han 和 Tsung [19]给出了控制图的 RMI 质数的定义：

$$\mathrm{RMI}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\mathrm{ARL}_{\delta_j}-\min\mathrm{ARL}_{\delta_j}}{\min\mathrm{ARL}_{\delta_j}},$$

其中 N 是所有漂移幅度的个数，本文取 $N=7$。对于某一固定的漂移 δ_j， ARL_{δ_j} 相当于特定控制图的 ARL_1。对于相同的漂移 δ_j，不同控制图具有不同的 ARL_{δ_j} 值， $\min\mathrm{ARL}_{\delta_j}$ 是所有控制图中最小的 $\min\mathrm{ARL}_{\delta_j}$。基于 RMI 指数，RMI 值越小，控制图的总体性能越好。这里将该方法应用到不同参数下，以评估控制图的综合性能。表 4 是不同参数情况下，四种控制图的 RMI 值，从表中可以看出，在所有参数情况下 OSHT 图的 RMI 值都是最小的，所以，综合来看，OSHT 图监控性能优于三种对比方法。

Table 4. Comparison of RMI for multiple control charts
表 4. 多种控制图的 RMI 比较

P	λ	chart	RMI
2	0.05	OSHT	0.0415
2	0.05	AH-MEWMA	0.2950
2	0.05	J-MEWMA	0.4091
2	0.05	MEWMA	0.3054
2	0.1	OSHT	0.0486
2	0.1	AH-MEWMA	0.2709
2	0.1	J-MEWMA	0.3516
2	0.1	MEWMA	0.2649
2	0.25	OSHT	0.0000
2	0.25	AH-MEWMA	0.4469
2	0.25	J-MEWMA	0.4697
2	0.25	MEWMA	0.3192
5	0.05	OSHT	0.0000
5	0.05	AH-MEWMA	0.2873
5	0.05	J-MEWMA	0.4125
5	0.05	MEWMA	0.3272
5	0.1	OSHT	0.0027
5	0.1	AH-MEWMA	0.3094
5	0.1	J-MEWMA	0.4372
5	0.1	MEWMA	0.3389

续表

5	0.25	OSHT	0.0000
5	0.25	AH-MEWMA	0.3809
5	0.25	J-MEWMA	0.4639
5	0.25	MEWMA	0.3468
10	0.05	OSHT	0.0000
10	0.05	AH-MEWMA	0.3333
10	0.05	J-MEWMA	0.4959
10	0.05	MEWMA	0.3806
10	0.1	OSHT	0.0000
10	0.1	AH-MEWMA	0.2945
10	0.1	J-MEWMA	0.4283
10	0.1	MEWMA	0.3183
10	0.25	OSHT	0.0000
10	0.25	AH-MEWMA	0.3291
10	0.25	J-MEWMA	0.4755
10	0.25	MEWMA	0.3668

5. 结论

单边控制图因其更为灵敏的监测性能而被广泛用于监控参数漂移方向生产过程。在本文中，我们基于单边假设检验的似然比统计量，同时应用两个单边检验的统计量来监控多元正态分布均值向量的变化。该控制图能够结合单侧控制图较为灵敏的优点，在过程参数漂移方向未知的情况下，也能基本达到漂移方向已知时的单侧控制图的监控效果。同时，新的控制图结合了滑动窗口技术，能够提高监测效率。实验结果表明，所提方法的检测性能优于现有控制图。我们采用蒙特卡洛模拟方法计算了这些多元控制图的运行长度特征。模拟结果显示，在检测过程均值向量偏移时，所提 OSHT-MEWMA 控制图比现有 MEWMA 控制图具有更高的敏感性。此外，当前控制图可扩展应用于非正态多元过程，如多元 t 分布和多元指数分布。我们的后续工作将尝试把本文提出的控制图应用于非正态分布均值向量的监控。

参考文献

[1] Lowry, C.A., Woodall, W.H., Champ, C.W. and Rigdon, S.E. (1993) A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. *Quality Control and Applied Statistics*, **38**, 239-240.

[2] Khatun, M., Khoo, M.B.C., Yeong, W.C., Teoh, W.L. and Chong, Z.L. (2018) Adaptive Multivariate Double Sampling and Variable Sampling Interval Hotelling's t^2 Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, **34**, 894-911. https://doi.org/10.1002/qre.2299

[3] Haq, A., Gulzar, R. and Khoo, M.B.C. (2018) An Efficient Adaptive EWMA Control Chart for Monitoring the Process Mean. *Quality and Reliability Engineering International*, **34**, 563-571. https://doi.org/10.1002/qre.2272

[4] Sanchez-Marquez, R. and Jabaloyes Vivas, J.M. (2020) Multivariate SPC Methods for Controlling Manufacturing Processes Using Predictive Models—A Case Study in the Automotive Sector. *Computers in Industry*, **123**, Article 103307.

https://doi.org/10.1016/j.compind.2020.103307

[5] Wu, B., Zhong, W., Ren, Y., Zhou, Z. and Liu, L. (2025) Monitoring and Early Warning of Ovarian Cancer Using High-Dimensional Non-Parametric EWMA Control Chart Based on Sliding Window. *Scientific Reports*, **15**, Article No. 9046. https://doi.org/10.1038/s41598-025-86576-w

[6] Xie, F., Sun, J., Castagliola, P., Hu, X. and Tang, A. (2020) A Multivariate CUSUM Control Chart for Monitoring Gumbel's Bivariate Exponential Data. *Quality and Reliability Engineering International*, **37**, 10-33. https://doi.org/10.1002/qre.2717

[7] Cabana, E. and Lillo, R.E. (2021) Robust Multivariate Control Chart Based on Shrinkage for Individual Observations. *Journal of Quality Technology*, **54**, 415-440. https://doi.org/10.1080/00224065.2021.1930617

[8] Zhao, C., Lui, C.F., Du, S., Wang, D. and Shao, Y. (2023) An Earth Mover's Distance Based Multivariate Generalized Likelihood Ratio Control Chart for Effective Monitoring of 3D Point Cloud Surface. *Computers & Industrial Engineering*, **175**, Article 108911. https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108911

[9] Capezza, C., Centofanti, F., Lepore, A. and Palumbo, B. (2024) Robust Multivariate Functional Control Chart. *Technometrics*, **66**, 531-547. https://doi.org/10.1080/00401706.2024.2327346

[10] Hu, Q. and Liu, L. (2024) Risk Adjustment-Based Statistical Control Charts with a Functional Covariate. *Quality Technology & Quantitative Management*, **22**, 131-154. https://doi.org/10.1080/16843703.2024.2313239

[11] Shu, L., Jiang, W. and Wu, S. (2007) A One-Sided EWMA Control Chart for Monitoring Process Means. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **36**, 901-920. https://doi.org/10.1080/03610910701418465

[12] Joner, M.D., Woodall, W.H., Reynolds, M.R. and Fricker, R.D. (2008) A One-Sided MEWMA Chart for Health Surveillance. *Quality and Reliability Engineering International*, **24**, 503-518. https://doi.org/10.1002/qre.910

[13] Haq, A. (2019) One-Sided and Two One-Sided MEWMA Charts for Monitoring Process Mean. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **90**, 699-718. https://doi.org/10.1080/00949655.2019.1699926

[14] Chew, X. and Khaw, K.W. (2020) One-Sided Downward Control Chart for Monitoring the Multivariate Coefficient of Variation with VSSI Strategy. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, **52**, 112-130. https://doi.org/10.5614/j.math.fund.sci.2020.52.1.8

[15] Mehmood, R., Riaz, M., Lee, M.H., Ali, I. and Gharib, M. (2022) Exact Computational Methods for Univariate and Multivariate Control Charts under Runs Rules. *Computers & Industrial Engineering*, **163**, Article 107821. https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107821

[16] Zhang, T., He, Z. and Mukherjee, A. (2023) Monitoring Negative Sentiment Scores and Time between Customer Complaints via One-Sided Distribution-Free EWMA Schemes. *Computers & Industrial Engineering*, **180**, Article 109247. https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109247

[17] Zhu, G. and Chen, J. (2018) Multi-Parameter One-Sided Monitoring Tests. *Technometrics*, **60**, 398-407. https://doi.org/10.1080/00401706.2017.1371081

[18] Silvapulle, M.J. and Sen, P.K. (2004) Constrained Statistical Inference: Order, Inequality, and Shape Constraints. Wiley.

[19] Han, D. and Tsung, F. (2006) A Reference-Free Cuscore Chart for Dynamic Mean Change Detection and a Unified Framework for Charting Performance Comparison. *Journal of the American Statistical Association*, **101**, 368-386. https://doi.org/10.1198/016214505000000556