

扰动的扩展Zakharov-Kuznetsov方程行波解存在性

尚义杰, 李叶舟

北京邮电大学数学科学学院, 北京

收稿日期: 2026年3月7日; 录用日期: 2026年4月9日; 发布日期: 2026年4月20日

摘要

扩展Zakharov-Kuznetsov (eZK)方程是描述磁化双温离子尘埃等离子体中三维非线性尘埃离子声孤波的重要数学模型, 已被广泛应用于等离子体物理相关研究领域。本文聚焦受扰eZK方程的行波解特性, 采用几何奇异摄动理论、Melnikov方法及不变流形理论, 对该受扰方程进行系统分析。研究结果表明, 带有外部Kuramoto-Sivashinsky扰动的eZK方程存在稳定行波解, 且该方程系统可呈现极限环动力学行为。

关键词

几何奇异摄动理论, 不变流形理论, 分岔理论, Melnikov方法, 孤波解

Existence of Traveling Wave Solutions for the Perturbed Extended Zakharov-Kuznetsov Equation

Yijie Shang, Yezhou Li

School of Mathematical Sciences, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing

Received: March 7, 2026; accepted: April 9, 2026; published: April 20, 2026

Abstract

The extended Zakharov-Kuznetsov (eZK) equation is widely used to describe nonlinear three-dimensional dust-ion-acoustic solitary waves in a magnetized two-ion-temperature dusty plasma. This paper investigates the traveling wave solutions of the perturbed eZK equation. To analyze this perturbed equation, the geometric singular perturbation theory, Melnikov methods, and invariant manifold theory are employed to prove that the eZK equation with external Kuramoto-Sivashinsky

perturbation has stable traveling wave solutions and also exhibits limit cycles.

Keywords

Geometric Singular Perturbation Theory, Invariant Manifold Theory, Bifurcation Theory, Melnikov Methods, Solitary Wave Solutions

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非线性偏微分方程(NLPDEs)是一类应用广泛且形式复杂的数学模型,在物理学、工程学、生物学等诸多领域均具有重要应用价值[1]-[3]。非线性波模型作为非线性偏微分方程的经典研究对象,长期以来吸引了众多学者与数学家构建各类高效求解方法,常用方法包括: Backlund 变换法[4]、Hirota 双线性法、试探方程法[5] [6]、拓展范氏子方程法[7]、雅可比椭圆函数法[8]、拓展直接代数法[9]-[12]以及几何奇异摄动理论与交换引理法[13]-[15]。

近年来,尘埃声孤波已成为等离子体中研究最深入的波之一。它们的特性可以用非线性微分方程来描述,如科特韦格-德弗里斯(KdV)方程、扎哈罗夫-库兹涅佐夫(ZK)方程等[16]-[18]。通过应用约化微扰技术[19],可以推导出(3+1)维扩展扎哈罗夫-库兹涅佐夫(eZK)方程:

$$\Phi_t + A\Phi\Phi_x + B\Phi_{xxx} + C(\Phi_{xyy} + \Phi_{xzz}) = 0, \quad (1)$$

其中 $\Phi(x, y, z, t)$ 是静电势, A , B 和 C 是非零常数。扩展扎哈罗夫-库兹涅佐夫(eZK)方程可用于解释稠密量子磁约束等离子体中低频(3+1)维波的传播,以及磁化双离子温度尘埃等离子体中的非线性尘埃-离子声波[19] [20]。

在过去几年里,众多学者对非线性(3+1)维 eZK 进行了研究。Elbrolosy 等人[21]对 eZK 方程进行分析,通过引入截断 M 分数阶导数构建了含布朗运动的随机模型,推导得到等价的守恒哈密顿模型,并获得了多种新解,包括双曲函数解、三角函数解及雅可比椭圆函数解; Kumar 和 Kumar [22]采用李群变换法结合李对称方法求解 eZK 方程获得优于以往显式解; Zhang [23]采用两种新方法—即(G'/G)展开法与双曲正割-双曲正切展开法对 eZK 方程的解析解展开研究。

研究人员还对 eZK 方程的其他形式进行了研究。Zhen 等人[24]采用广田方法对 eZK 方程展开研究,推导得出其双线性形式和 N 孤子解,并通过引入周期性外力项进一步研究了受扰 eZK 方程:

$$\Phi_t + A\Phi\Phi_x + B\Phi_{xxx} + C(\Phi_{xyy} + \Phi_{xzz}) = h_x, \quad (2)$$

并得到了受扰 eZK 方程会呈现混沌运动; Elwakil 等人[25]则针对“波振幅增大时,孤子宽度与速度会偏离 eZK 方程预测结果”这一问题,在经典 eZK 方程中引入五阶色散项作为高阶微扰项,构建了受扰 eZK 方程并得到其高阶孤子解。受上述文献的启发,我们引入了一个额外的 Kuramoto-Sivashinsky 扰动[16],以研究受扰动的 Ezk (eZK-KS)的性质。其形式如下:

$$\Phi_t + A\Phi\Phi_x + B\Phi_{xxx} + C(\Phi_{xyy} + \Phi_{xzz}) + \varepsilon(\Phi_{xx} + \Phi_{xxxx}) = 0, \quad (3)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是一个足够小的扰动参数; A 、 B 、 C 与式(1)中的相同; Φ_{xx} 表示反向扩散; Φ_{xxxx} 表示耗散项。方程(3)可用于研究相较于方程(1)更大振幅尘埃声波的相关性质。

本文采用几何奇异摄动理论(GSP) [26]证明了受扰动的 eZK 方程行波解的存在性。几何奇异摄动理论已被众多研究者广泛用于研究行波解的存在性[27] [28]。例如, 徐和杜[29] [30]结合几何奇异摄动理论、弗雷德霍姆理论和线性链技术, 研究了一类广义科特韦格 - 德弗里斯(KdV)方程行波解和孤波解的存在性。在文献[31]中, 尚和杜应用几何奇异摄动理论和不变流形理论, 证明了非线性色散 - 耗散方程孤波解的存在性。几何奇异摄动理论为我们理解受扰动的 eZK 方程解的存在性提供了有力工具。

本文的结构如下: 第 2 节证明 eZK 行波解的存在性。第 3 节将运用几何奇异摄动理论、Melnikov 方法和不变流形理论, 讨论方程(3)行波解的存在性。第 4 节通过数值模拟给出第 2 节和第 3 节的理论结果图像显示。最后, 给出本文的主要结论。

2. eZK 方程的行波解

本节研究 eZK 方程的行波解。首先, 通过行波变换, 构造行波解形式:

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(\xi) = \varphi(kx + ky + mz - ct), \quad (4)$$

将行波变换式子(4)代入 eZK 方程(1), 可得

$$-c\varphi' + Al\varphi\varphi' + l[Bl^2 + C(k^2 + m^2)]\varphi''' = 0, \quad (5)$$

其中 $' = d/d\xi$, l 、 k 和 m 是非零方向常数, c 为波速。对式(5)积分, 并取积分常数为 0, 可得

$$-c\varphi + \frac{Al\varphi^2}{2} + l[Bl^2 + C(k^2 + m^2)]\varphi'' = 0. \quad (6)$$

令 $\varphi = cU$, $\zeta = \sqrt{c}\xi$, 则(6)简化为:

$$-U + \frac{aU^2}{2} + bU'' = 0, \quad (7)$$

这里 $' = d/d\zeta$, $a = Al$, $b = l[Bl^2 + C(k^2 + m^2)]$ 这为常数。方程(7)的一阶常微分方程组为:

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = \frac{U}{b} - \frac{a}{2b}U^2, \end{cases} \quad (8)$$

方程(8)为 Hamilton 系统, 其 Hamilton 函数为:

$$H(U, V) = \frac{V^2}{2} - \frac{U^2}{2b} + \frac{aU^3}{6b}. \quad (9)$$

通过简单计算可以得到系统(8)有两个平衡点 $E_0(0, 0)$ 和 $E_1(2/a, 0)$ 。

定理 1 对于方程组(8), 有下述结论:

(1) 若 $b > 0$, 系统(8)在 $E_0(0, 0)$ 处存在一个鞍点, 在 $E_1(2/a, 0)$ 处存在一个中心。系统(8)存在一条环绕中心平衡点的同宿轨 Γ , 该轨道自 $(0, 0)$ 点连接至自身, 且与 U 轴相交于 $(3/a, 0)$ (图 1)。

(2) 若 $b < 0$, 系统(8)在 $E_1(2/a, 0)$ 处存在一个鞍点, 在 $E_0(0, 0)$ 处存在一个中心。从而存在一条环绕中心平衡点的同宿轨 Γ , 该轨道自 $(2/a, 0)$ 点连接至自身, 且与 U 轴相交于 $(-1/a, 0)$ (图 2)。

证明 在各平衡点处, 系统(8)的线性化矩阵可表示为:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{b} - \frac{aU}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $\sigma = \det(D)$, $\tau = \text{tr}(D)$ 。则有

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{b} - \frac{au}{b} & 0 \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{b} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{b},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{b} - \frac{au}{b} & 0 \end{vmatrix}_{(\frac{2}{a},0)} = \frac{1}{b}.$$

如果 $b > 0$ 且 $\sigma_1 < 0$, 故 $E_0(0,0)$ 为鞍点; $\sigma_2 > 0$ 且 $\tau = 0$, 故 $E_1(2/a,0)$ 为中心。同理, 当 $b < 0$ 时 $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$, 因此 $E_0(0,0)$ 为中心, $E_1(2/a,0)$ 为鞍点。综上(1)和(2)成立。

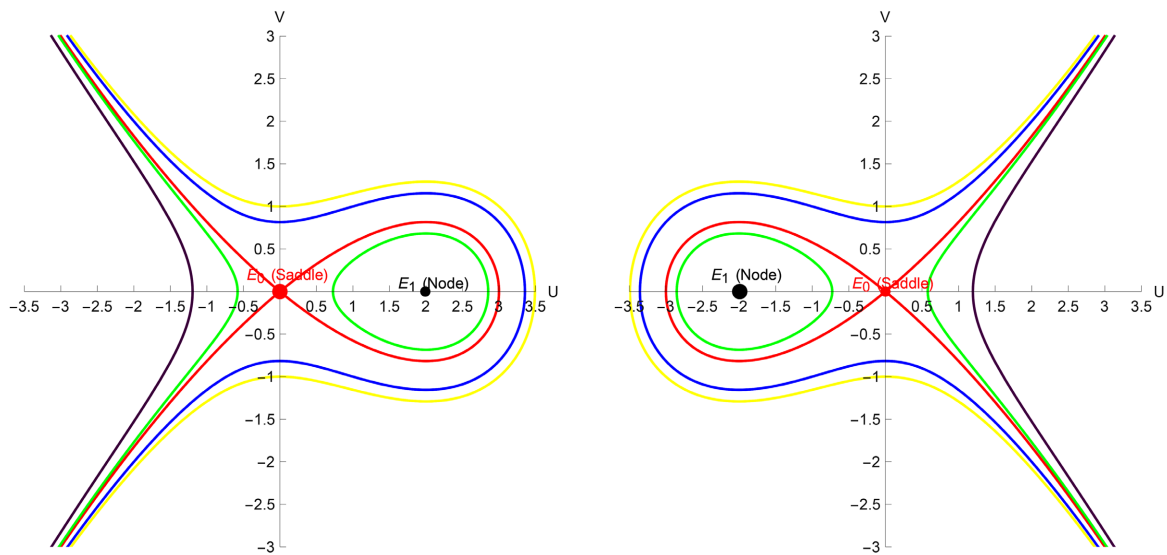


Figure 1. The left image is $a > 0, b < 0$, the right image is $a < 0, b > 0$. Both are phase diagrams of system (8)
图 1. 左图为 $a > 0, b < 0$, 右图为 $a < 0, b > 0$ 。都为系统(8)的相图

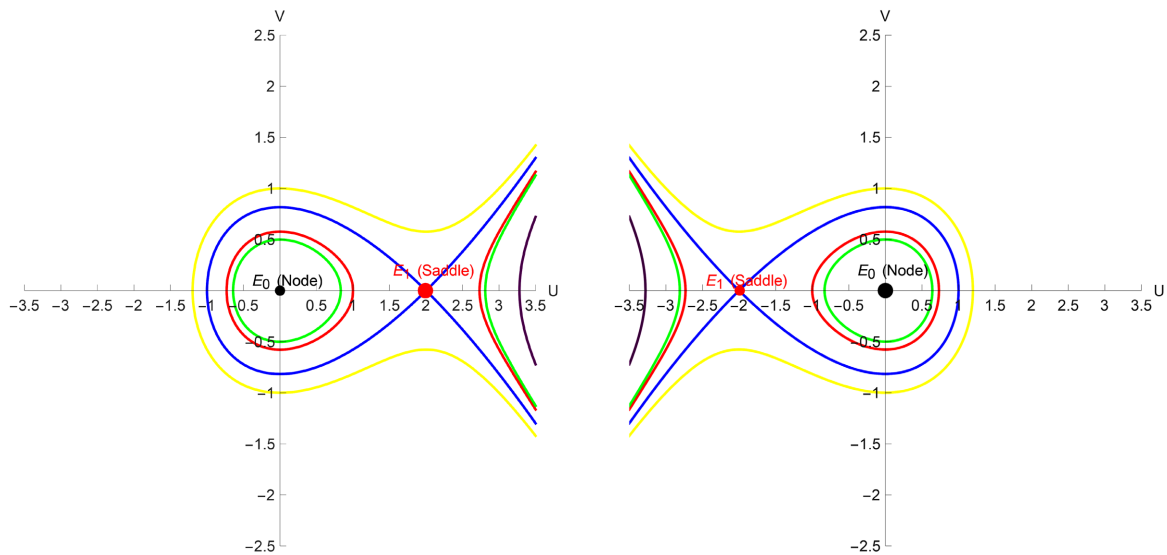


Figure 2. The left image is $a < 0, b < 0$, the right image is $a > 0, b < 0$. Both are phase diagrams of system (8)
图 2. 左图为 $a < 0, b < 0$, 右图为 $a > 0, b < 0$ 。都为系统(8)的相图

图 1 与图 2 清晰地展示了两种类型的轨迹 - 非线性周期轨和同宿轨, 这表明存在非线性周期波和孤波解。

推论 1 当 $b > 0$ 且 $a > 0$ 时, $(0,0)$ 为鞍点在 $(2/a,0)$ 处存在一个中心。系统(8)存在一条环绕中心平衡点从原点出发回到原点的同宿轨道, 它的解为:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{3}{a} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{lx + my + nz - ct - D}{2\sqrt{2}} \right).$$

证明 由于

$$H(U, V) = H(0, 0) = 0, \quad (10)$$

Γ_+ 表示同宿轨 Γ 位于 U 轴上方的分段, 其从 $(0,0)$ 连接 $(3/a,0)$ 。由式(10)推导得到的 Γ_+ 上 V 的表达式为

$$V = \sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b}} \quad (11)$$

Γ_- 表示同宿轨 Γ 位于 U 轴下方的分段, 其从 $(3/a,0)$ 延伸至 $(0,0)$ 。由式(10)推导得到的 Γ_- 上 V 的表达式为

$$V = -\sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b}} \quad (12)$$

对上述式(11)和(12)积分。由于 $dU = Vd\zeta$, 可得

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b}}} dU = \int d\zeta \quad (\zeta > 0), \quad \int -\frac{1}{\sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b}}} dU = \int d\zeta \quad (\zeta < 0),$$

由此可推得

$$U = \frac{3}{a} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\zeta - D}{2\sqrt{2}} \right)$$

即

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{3}{a} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{lx + my + nz - ct - D}{2\sqrt{2}} \right).$$

推论 2 当 $b > 0$ 且 $a > 0$ 时, 系统(8)存在一簇单参数周期轨族 Γ_α 。

证明 首先由 Hamiltonian 函数得到

$$H(U, V) = H(\alpha, 0) = -\frac{\alpha^2}{2b} + \frac{a\alpha^3}{6b}, \quad (13)$$

其中 $\alpha \in (0, 2/a)$, α 为 U 的一个取值。 Γ_α^+ 代表周期轨 Γ_α 在 U 轴上方的部分, 它围绕着中心 $(2/a,0)$, 并与 U 轴在 α 和 E 处相交。根据方程(13)推导出的 Γ_α^+ 上 V 的表达式为

$$V = \sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b} - \frac{\alpha^2}{b} + \frac{a\alpha^3}{3b}}, \quad (14)$$

Γ_α^- 代表周期轨 Γ_α 在 U 轴下方的部分, 它围绕着中心 $(2/a,0)$, 并与 U 轴在 α 和 E 处相交。根据方程(13)推导出的 Γ_α^- 上 V 的表达式为

$$V = -\sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b} - \frac{\alpha^2}{b} + \frac{a\alpha^3}{3b}}. \tag{15}$$

其中

$$E = \frac{3 - a\alpha + 3\sqrt{\frac{3 + 2a\alpha - a^2\alpha^2}{3}}}{2a}.$$

3. eZK-KS 方程行波解的存在性

本节研究 eZK-KS 方程的行波解存在性。首先, 通过引入变量变换, 构造行波解形式:

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(\xi) = \varphi(lx + ky + mz - ct), \tag{16}$$

将行波变换得到的式(16)代入 eZK-KS 方程(3), 可以得到:

$$-c\varphi' + Al\varphi\varphi' + l\left[Bl^2 + C(k^2 + m^2)\right]\varphi'' + \varepsilon\left(l^2\varphi'' + l^4\varphi^{(4)}\right) = 0, \tag{17}$$

其中' = d/dξ, l、k 和 m 是非零方向常数, c 为波速。对式(17)积分, 并取积分常数为 0, 可得

$$-c\varphi + \frac{Al\varphi^2}{2} + l\left[Bl^2 + C(k^2 + m^2)\right]\varphi' + \varepsilon\left(l^2\varphi' + l^4\varphi''\right) = 0. \tag{18}$$

令 $\varphi = cU$, $\zeta = \sqrt{c}\xi$, 则(18)简化为:

$$-c^2U + \frac{ac^2U^2}{2} + bc^2U'' + \varepsilon\left(l^2c\sqrt{c}U' + l^4c^2\sqrt{c}U''\right) = 0, \tag{19}$$

这里 a 和 b 与方程(7)一致。方程(19)可等价转化为一阶常微分方程组:

$$\begin{cases} U' = V, \\ V' = W, \\ \varepsilon\sqrt{cl^4}W' = U - \frac{aU^2}{2} - bW - \frac{\varepsilon l^2V}{\sqrt{c}}, \end{cases} \tag{20}$$

系统(20)为慢系统, 其中' = d/dζ。引入尺度变换 $\zeta = \varepsilon\eta$, 得到等价快系统

$$\begin{cases} \dot{U} = \varepsilon V, \\ \dot{V} = \varepsilon W, \\ \dot{W} = \frac{1}{\sqrt{cl^4}}\left(U - \frac{aU^2}{2} - bW - \frac{\varepsilon l^2V}{\sqrt{c}}\right), \end{cases} \tag{21}$$

其中' = d/dη。当 ε > 0 时, 快系统(21)与慢系统(20)是等价的。

系统(19)的临界流形为:

$$M_0 = \left\{ (U, V, W) \in R^3 \mid W = \frac{1}{b} - \frac{aU^2}{2b} \right\}, \tag{22}$$

当 ε = 0 时对系统(21)在 M₀ 上的线性化矩阵为行:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{cl^4}}(1 - aU) & 0 & -\frac{b}{\sqrt{cl^4}} \end{pmatrix},$$

通过计算得到矩阵 G 的特征值为: 0 、 0 和 $-b/\sqrt{cl^4}$ 。

因为临界流形 M_0 的维数与系统(20)的线性化矩阵特征值中零特征值个数相同, 所以临界流形 M_0 是法向双曲的(参见[29]中的定义 1)。根据 Fenichel 不变流形定理([32]), 存在一个局部不变的慢流形 M_ε 在 M_0 附近, 且微分同胚于 M_0 , 定义慢流形 M_ε 的形式为:

$$M_\varepsilon = \left\{ (U, V, W) \in R^3 \mid W = \frac{U}{b} - \frac{aU^2}{2b} + g(U, V, \varepsilon) \right\}, \quad (23)$$

其中 g 平滑地依赖于 ε , 且 $g(U, V, 0) = 0$ 。因此, 函数 $g(U, V, \varepsilon)$ 展开为:

$$g(U, V, \varepsilon) = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots,$$

将 M_ε 代入慢系统(19), 可以得到:

$$g_1 = -\frac{\sqrt{cl^4}V}{b} \left(\frac{1}{b} - \frac{aU}{b} \right) - \frac{l^2V}{\sqrt{cb}},$$

因此在 M_ε 的限制下慢系统(19)变为

$$\begin{cases} U' = V, \\ V' = \frac{U}{b} - \frac{aU^2}{2b} + \varepsilon \left(-\frac{\sqrt{cl^4}V}{b^2} (1-aU) - \frac{l^2V}{\sqrt{cb}} \right) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (24)$$

接下来, 将证明同宿轨的存在性。由推论 1 可知, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 存在这样的同宿连接且根据 Fenichel 的不变流形定理 2 [32], 当 $\varepsilon > 0$ 且充分小时, M_ε 的稳定流形 $W^s(M_\varepsilon)$ 和不稳定流形 $W^u(M_\varepsilon)$ 存在, 并且分别与 $W^s(M_0)$ 和 $W^u(M_0)$ 微分同胚。而 Melnikov 方法可以证明稳定流形与不稳定流形的横截相交性。故对于 $\varepsilon > 0$, 我们将运用 Melnikov 方法完成证明[32]。

定理 2 当波速 $c = 7b/5l^2 + O(\varepsilon)$ 时, 对于足够小的 $\varepsilon > 0$, 方程(3)的稳定的孤波解仍然存在, 且同时存在极限环。

证明: Melnikov 方法([32])可用于表示 $W^s(M_\varepsilon)$ 和 $W^u(M_\varepsilon)$ 之间的距离。Melnikov 函数为:

$$M(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\sqrt{cl^4}V^2(1-aU)}{b^2} - \frac{l^2V^2}{\sqrt{cb}} d\zeta.$$

由(11), (12)和 $dU/d\zeta = V$ 可得:

$$\begin{aligned} M(c) &= \int_{\Gamma_+} -\frac{\sqrt{cl^4} \sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b}} (1-aU)}{b^2} - \frac{l^2 \sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b}}}{\sqrt{cb}} dU \\ &\quad + \int_{\Gamma_-} \frac{\sqrt{cl^4} \sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b}} (1-aU)}{b^2} + \frac{l^2 \sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b}}}{\sqrt{cb}} dU \\ &= -2 \int_0^3 \frac{l^2 \sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b}}}{b} \left(\frac{l^2(1-aU)c+b}{\sqrt{cb}} \right) dU \\ &= \frac{120cl^4 - 168l^2b}{35a^2\sqrt{cb^5}}, \end{aligned}$$

对上式关于 c 求导

$$\frac{dM(c)}{dc} = \frac{420cl^4\sqrt{b^5} + 588l^2b\sqrt{b^5}}{245a^2b^5\sqrt{c^3}},$$

通过计算可以知道, $M(c) = 0$ 当且仅当 $c_0 = 7b/5l^2$ 。且 $dM(c_0)/dc \neq 0$ 则有唯一零点 $c_0 = 7b/5l^2$ 。这表明我们建立了稳定流形与不稳定流形的横截相交: 对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在 $c_\varepsilon = c_0 + O(\varepsilon)$, 使得取 $c = c_\varepsilon$ 的系统(24)在同宿轨 Γ 的 ε 邻域内的原点(鞍点)处存在一条同宿轨道(见文献[32]的定理 4)。因此, 方程(3)的孤波解是持续存在的。此外, 对于系统(24)中的向量场 $F = f + \varepsilon g$, 我们有

$$DF(0, \varepsilon, c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{b} + O(\varepsilon^2) & S \end{pmatrix},$$

这里

$$S = \varepsilon \left(-\frac{\sqrt{cl^4}}{b^2} - \frac{l^2}{b\sqrt{c}} \right) + O(\varepsilon^2) < 0.$$

因此, 在 $\sigma_0 = S < 0$ 时, 分界线环 $\Gamma_\varepsilon \cup \{0\}$ 是稳定的[32]。

接下来, 我们借助推论 2 中含单参数的周期轨道族来证明极限环的存在性。沿周期轨道 Γ_α (T_α 为周期)的 Melnikov 函数([32])因此可表示为

$$M(\alpha, c) = \int_0^{T_\alpha} -\frac{\sqrt{cl^4}V^2(1-aU)}{b^2} - \frac{l^2V^2}{\sqrt{cb}} d\zeta,$$

将(14)和(15)代入 $M(\alpha, c)$ 可以得到

$$\begin{aligned} M(\alpha, c) &= \int_0^{T_\alpha} -\frac{\sqrt{cl^4}V^2(U, \alpha)(1-aU)}{b^2} - \frac{l^2V^2(U, \alpha)}{\sqrt{cb}} d\zeta \\ &= \int_0^{T_\alpha} -\frac{\sqrt{cl^4}V^2(U, \alpha)(1-aU)}{b^2} - \int_0^{T_\alpha} \frac{l^2V^2(U, \alpha)}{\sqrt{cb}} d\zeta \\ &= -\sqrt{c}P(\alpha) - \frac{1}{\sqrt{c}}Q(\alpha), \end{aligned}$$

其中

$$P(\alpha) = \frac{l^4}{b} \int_0^{T_\alpha} V^2(U, \alpha) \left(\frac{1}{b} - \frac{aU}{b} \right) d\zeta, \quad Q(\alpha) = \int_0^{T_\alpha} \frac{l^2V^2(U, \alpha)}{b} d\zeta.$$

显然 $Q(\alpha) > 0$ 。因为 Γ_α 是系统(7)中的周期轨, 则积分轨迹沿着周期轨道 Γ_α , 由于

$$dV' = V' d\zeta = \left(\frac{1}{b} - \frac{aU}{b} \right) V d\zeta, \tag{25}$$

则

$$P = \frac{l^4}{b} \int_0^{T_\alpha} V dV' = \frac{l^4}{b} VV'|_0^{T_\alpha} - \frac{l^4}{b} \int_0^{T_\alpha} (V')^2 d\zeta = -\frac{l^4}{b} \int_0^{T_\alpha} (V')^2 d\zeta < 0.$$

因此, $M(\alpha, c) = 0$ 时当且仅当 $c_1 = -Q(\alpha)/P(\alpha_1)$ 。接下来, 开始计算

$$\begin{aligned} \frac{dM(\alpha, c)}{d\alpha} &= -\sqrt{c} \frac{dP}{d\alpha} - \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{dQ}{d\alpha} \\ &= -\sqrt{c} \frac{l^4}{b^2} \int_{\alpha}^E \frac{\alpha \left(\frac{a}{2} \alpha - 1 \right)}{\sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b} - \frac{\alpha^2}{2b} - \frac{a\alpha^3}{6b}}} \left(\frac{1}{b} - \frac{aU}{b} \right) dU \\ &\quad - \frac{l^2}{b^2 \sqrt{c}} \int_{\alpha}^E \frac{\alpha \left(\frac{a}{2} \alpha - 1 \right)}{\sqrt{\frac{U^2}{b} - \frac{aU^3}{3b} - \frac{\alpha^2}{2b} - \frac{a\alpha^3}{6b}}} dU \end{aligned}$$

由式(25)和 $dU/d\zeta = V$ 可得

$$\begin{aligned} -\sqrt{c} \frac{dP}{d\alpha} &= -\sqrt{c} \alpha \left(\frac{a}{2} \alpha - 1 \right) \frac{l^2}{b^4} \int_0^{\alpha} \frac{1}{b} - \frac{aU}{b} d\zeta \\ &= -\sqrt{c} \alpha \left(\frac{a}{2} \alpha - 1 \right) \frac{l^2}{b^4} \int_{\alpha}^E \frac{(V')^2}{V^2} dV' > 0, \end{aligned}$$

显然, $dQ(\alpha)/d\alpha < 0$, 因此可以得出 $dM(\alpha_1, c_1)/d\alpha > 0$ 。由此可知, 对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$, 系统(24)在 Γ_{α} 的 ε 邻域内存在唯一的双曲极限环 $\Gamma_{\alpha_{\varepsilon}}$ 。通过分析系统 8, 我们可以知道 Γ_{α} 是负向的, 即 $\omega_0 = -1$ 。因此, $\varepsilon \omega_0 M_{\alpha}(\alpha_1, c_1) > 0$, 则该极限环 $\Gamma_{\alpha_{\varepsilon}}$ 是稳定的(参见[32]第 4.10 节中的定理 1)。

4. 数值模拟

在本小节中, 通过数值模拟来展示了上述得到的结果。令 $a = 2, l = 1, b = 3$ 且 $(U(0), V(0)) = (1.500001, 0)$ 。由推论 1 可知, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 方程(1)存在一条从鞍点 $(0, 0)$ 到 $(0, 0)$ 的同宿轨 Γ 。根据定理 2, 我们对 $\varepsilon = 0.01, c \neq 5l^2/7b + O(\varepsilon) = 21/5$ 的情形下方程(3)的同宿轨存在性进行了模拟(图 4); 从图 3 可以看出, 当 $c \neq 5l^2/7b + O(\varepsilon)$ 时, 同宿轨会破裂。

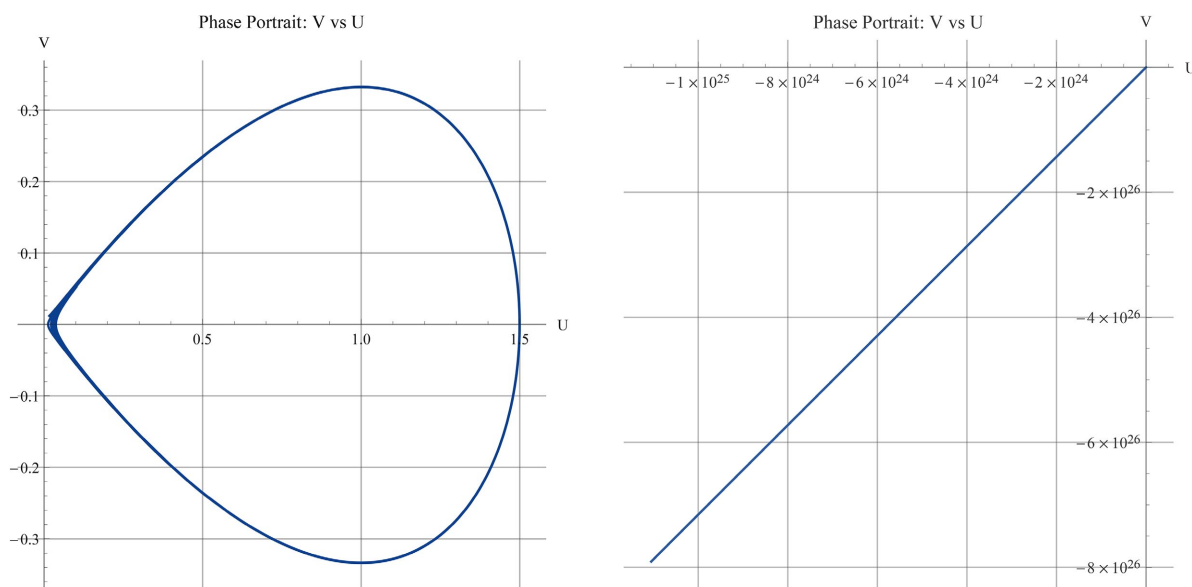


Figure 3. Right image $c = 20/5$ left image $c = 22/5$. The homoclinic orbit of system (24) is broken

图 3. 右图 $c = 20/5$, 左图 $c = 22/5$ 。系统(24)的同宿轨破裂

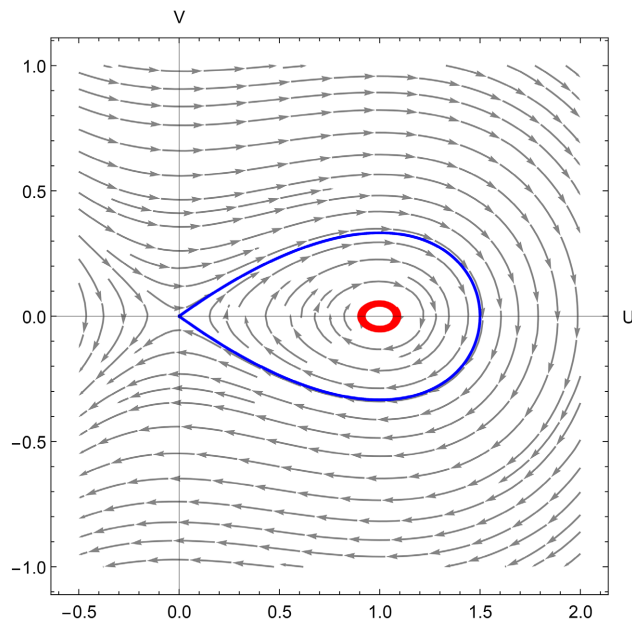


Figure 4. $\varepsilon = 0.01$, $a = 2$, $l = 1$, $b = 3$ homoclinic orbit (Blue line) and limit cycle (Red line) of system (24)
图 4 $\varepsilon = 0.01$, $a = 2$, $l = 1$, $b = 3$ 系统(24)的同宿轨(蓝色线)与极限环(红色线)

由推论 2 可知, 当 $\varepsilon = 0$ 且对 $\alpha \in (0, 2/a)$ 时, 方程(1)存在一簇以 $(2/a, 0)$ 为中心的单参数周期轨道, 记为 Γ_α 。根据定理 2, 通过数值模拟展示了方程(3)极限环的存在性(红线, 图 4)。

5. 结论

本文旨在研究受扰动的 eZK 动力学方程。首先, 推导了 eZK 的孤波解。随后, 基于所得到的同宿轨道, 结合几何奇异摄动理论和 Melnikov 方法等工具, 证明了方程(3)稳定行波解的存在性和极限环的存在性, 并通过数值模拟验证了相关结论。本文首次通过引入 KS 扰动来研究 eZK 方程, 这为研究大振幅尘埃声孤波的特性提供了理论支持。

参考文献

- [1] Gintautas, V. and Hübler, A.W. (2008) Resonant Forcing of Nonlinear Systems of Differential Equations. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **18**, Article ID: 033118. <https://doi.org/10.1063/1.2964200>
- [2] Li, J., Liu, Y. and Wu, Q. (2023) Orbital Stability of Smooth Solitary Waves for the Degasperis-Procesi Equation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **151**, 151-160. <https://doi.org/10.1090/proc/16087>
- [3] Lin, G., Liu, W., Yi, Y. and Zhang, M. (2013) Poisson-Nernst-Planck Systems for Ion Flow with a Local Hard-Sphere Potential for Ion Size Effects. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **12**, 1613-1648. <https://doi.org/10.1137/120904056>
- [4] Li, J., Xu, T., Meng, X., Zhang, Y., Zhang, H. and Tian, B. (2007) Lax Pair, Bäcklund Transformation and N-Soliton-Like Solution for a Variable-Coefficient Gardner Equation from Nonlinear Lattice, Plasma Physics and Ocean Dynamics with Symbolic Computation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **336**, 1443-1455. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.064>
- [5] Hirota, R. (1971) Exact Solution of the Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons. *Physical Review Letters*, **27**, 1192-1194. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.27.1192>
- [6] Ahmed, I., Seadawy, A.R. and Lu, D. (2019) Kinky Breathers, W-Shaped and Multi-Peak Solitons Interaction in (2 + 1)-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equation with Kerr Law of Nonlinearity. *The European Physical Journal Plus*, **134**, Article No. 120. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12482-8>
- [7] Ma, Z., Hua, G. and Zheng, C. (2006) Multisoliton Excitations for the Kadomtsev-Petviashvili Equation. *Zeitschrift für*

- Naturforschung A*, **61**, 32-38. <https://doi.org/10.1515/zna-2006-1-205>
- [8] Seadawy, A.R. and El-Rashidy, K. (2013) Traveling Wave Solutions for Some Coupled Nonlinear Evolution Equations. *Mathematical and Computer Modelling*, **57**, 1371-1379. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2012.11.026>
- [9] Iqbal, M., Seadawy, A.R. and Lu, D. (2018) Construction of Solitary Wave Solutions to the Nonlinear Modified Korteweg-De Vries Dynamical Equation in Unmagnetized Plasma via Mathematical Methods. *Modern Physics Letters A*, **33**, Article ID: 1850183. <https://doi.org/10.1142/s0217732318501833>
- [10] Iqbal, M., Seadawy, A.R. and Lu, D. (2019) Applications of Nonlinear Longitudinal Wave Equation in a Magneto-Electro-Elastic Circular Rod and New Solitary Wave Solutions. *Modern Physics Letters B*, **33**, Article ID: 1950210. <https://doi.org/10.1142/s0217984919502105>
- [11] Seadawy, A.R., Lu, D. and Iqbal, M. (2019) Application of Mathematical Methods on the System of Dynamical Equations for the Ion Sound and Langmuir Waves. *Pramana*, **93**, Article No. 10. <https://doi.org/10.1007/s12043-019-1771-x>
- [12] Seadawy, A.R., Iqbal, M. and Lu, D. (2020) Propagation of Kink and Anti-Kink Wave Solitons for the Nonlinear Damped Modified Korteweg-de Vries Equation Arising in Ion-Acoustic Wave in an Unmagnetized Collisional Dusty Plasma. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **544**, Article ID: 123560. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123560>
- [13] Wang, K., Du, Z. and Liu, J. (2023) Traveling Pulses of Coupled Fitzhugh-Nagumo Equations with Doubly-Diffusive Effect. *Journal of Differential Equations*, **374**, 316-338. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.07.027>
- [14] Xu, Y., Du, Z. and Wei, L. (2015) Geometric Singular Perturbation Method to the Existence and Asymptotic Behavior of Traveling Waves for a Generalized Burgers-kdv Equation. *Nonlinear Dynamics*, **83**, 65-73. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2309-5>
- [15] Ghosh, U.N., Saha, A., Pal, N. and Chatterjee, P. (2015) Dynamic Structures of Nonlinear Ion Acoustic Waves in a Nonextensive Electron-Positron-Ion Plasma. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, **9**, 321-329. <https://doi.org/10.1007/s40094-015-0192-6>
- [16] Zheng, H. and Xia, Y.-H. (2022) Does Solitary Wave Solution Persist for the Long Wave Equation with Small Perturbations?
- [17] Lin, M.M. and Duan, W.S. (2007) Dust Acoustic Solitary Waves in a Dusty Plasmas with Nonthermal Ions. *Chaos, Solitons & Fractals*, **33**, 1189-1196. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.01.065>
- [18] Washimi, H. and Taniuti, T. (1966) Propagation of Ion-Acoustic Solitary Waves of Small Amplitude. *Physical Review Letters*, **17**, 996-998. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.17.996>
- [19] Liu, Z., Duan, W. and He, G. (2008) Effects of Dust Size Distribution on Dust Acoustic Waves in Magnetized Two-Ion-Temperature Dusty Plasmas. *Physics of Plasmas*, **15**, Article ID: 083702. <https://doi.org/10.1063/1.2970937>
- [20] Seadawy, A.R. (2015) Nonlinear Wave Solutions of the Three-Dimensional Zakharov-Kuznetsov-Burgers Equation in Dusty Plasma. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **439**, 124-131. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.07.025>
- [21] Elbrolosy, M. (2024) Qualitative Analysis and New Exact Solutions for the Extended Space-Fractional Stochastic (3 + 1)-Dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation. *Physica Scripta*, **99**, Article ID: 075225. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad4f66>
- [22] Kumar, S. and Kumar, D. (2019) Solitary Wave Solutions of (3 + 1)-Dimensional Extended Zakharov-Kuznetsov Equation by Lie Symmetry Approach. *Computers & Mathematics with Applications*, **77**, 2096-2113. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.12.009>
- [23] Zhang, C. (2022) Analytical and Numerical Solutions for the (3 + 1)-Dimensional Extended Quantum Zakharov-Kuznetsov Equation. *Applied and Computational Mathematics*, **11**, 74-80.
- [24] Zhen, H., Tian, B., Wang, Y., Sun, W. and Liu, L. (2014) Soliton Solutions and Chaotic Motion of the Extended Zakharov-Kuznetsov Equations in a Magnetized Two-Ion-Temperature Dusty Plasma. *Physics of Plasmas*, **21**, 3418-R. <https://doi.org/10.1063/1.4885380>
- [25] Elwakil, S.A., El-Shewy, E.K. and Abdelwahed, H.G. (2011) Solution of the Perturbed Zakharov-Kuznetsov (ZK) Equation Describing Electron-Acoustic Solitary Waves in a Magnetized Plasma. *Chinese Journal of Physics*, **49**, 732-744.
- [26] Jones, C., Arnold, L., Mischaikow, K. and Raugel, G. (2006) Geometric Singular Perturbation Theory. In: Johnson, R., Ed., *Dynamical Systems*, North-Holland, 44-118.
- [27] Qi, Y., Tian, Y. and Jiang, Y. (2024) Existence of Traveling Wave Solutions for the Perturbed Modified Gardner Equation. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, **23**, Article No. 106. <https://doi.org/10.1007/s12346-024-00960-x>
- [28] Jiang, Y., Tian, Y. and Qi, Y. (2024) Solitary Wave Solutions of a Hyperelastic Dispersive Equation. *Mathematics*, **12**, Article No. 564. <https://doi.org/10.3390/math12040564>

- [29] Xu, Y. and Du, Z. (2014) Existence of Traveling Wave Fronts for a Generalized KdV-mKdV Equation. *Mathematical Modelling and Analysis*, **19**, 509-523. <https://doi.org/10.3846/13926292.2014.956827>
- [30] Zhuang, K., Du, Z. and Lin, X. (2015) Solitary Waves Solutions of Singularly Perturbed Higher-Order KdV Equation via Geometric Singular Perturbation Method. *Nonlinear Dynamics*, **80**, 629-635. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-1894-7>
- [31] Shang, X. and Du, Z. (2015) Traveling Waves in a Generalized Nonlinear Dispersive-Dissipative Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **39**, 3035-3042. <https://doi.org/10.1002/mma.3750>
- [32] Perko, L. (2001) *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer.