Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 91-98
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164094

Hans汉斯

二维anti-Zinbiel超代数的分类

郭佳鑫

辽宁师范大学数学学院，辽宁 大连

收稿日期：2026年3月9日；录用日期：2026年4月10日；发布日期：2026年4月22日

摘　要

本文研究anti-Zinbiel超代数的构造和二维anti-Zinbiel超代数的分类。首先给出anti-Zinbiel超代数的定义，并建立了与交换结合超代数之间的关系。进一步地，利用二维交换结合代数的分类，我们得到二维anti-Zinbiel超代数在同构意义下的完全分类。最后，引入交换结合超代数关于表示的强anti-*O*-算子与强anti-Rota-Baxter算子的定义，利用它们构造anti-Zinbiel超代数结构，并给出了低维例子。

关键词

anti-Zinbiel超代数，交换结合超代数，强anti-*O*-算子，强anti-Rota-Baxter算子

Classification of Two-Dimensional anti-Zinbiel Hyperalgebras

Jiaxin Guo

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: March 9, 2026; accepted: April 10, 2026; published: April 22, 2026

Abstract

This paper focuses on the construction of anti-Zinbiel superalgebras and the classification of two-dimensional anti-Zinbiel superalgebras. First, we give the definition of anti-Zinbiel superalgebras and establish their relationship with commutative associative superalgebras. Furthermore, by utilizing the classification of two-dimensional commutative associative superalgebras, we obtain the complete classification of two-dimensional anti-Zinbiel superalgebras up to isomorphism. Finally, we introduce the definitions of strong anti-operators and strong anti-Rota-Baxter operators on the representations of commutative associative superalgebras, construct the structures of anti-Zinbiel superalgebras by virtue of these operators, and present corresponding low-dimensional examples.

文章引用: 郭佳鑫. 二维 anti-Zinbiel 超代数的分类[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 91-98.
DOI: 10.12677/pm.2026.164094

Keywords

anti-Zinbiel Superalgebra, Commutative Associative Superalgebra, Strong anti-*O*-Operator, Strong anti-Rota-Baxter Operator

1. 引言

Zinbiel 代数的概念由 Loday 于 1995 年在[1]引入，为非结合代数的研究开辟了新的对偶视角。此后，Towers 于 2002 年在[2]中取得了重要进展，证明了任意域上有限维 Zinbiel 代数均为幂零代数，成功将复数域上的结论推广至一般域。Camacho，Fernández Ouaridi，Kaygorodov，Navarro 于 2023 年在[3]中将 Zinbiel 代数的幂零性结论推广到 Zinbiel 超代数情形，证明任意域上的有限维 Zinbiel 超代数皆为幂零。在[4]中 Liu 和 Bai 引入了 anti-Zinbiel 代数。在此基础上，本文考虑超代数，引入 anti-Zinbiel 超代数的定义，并且讨论 anti-Zinbiel 超代数的构造和二维 anti-Zinbiel 超代数的分类。

2. 预备知识

本文讨论的向量空间是复数域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。若 $A = A_0 + A_1$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次超向量空间，则称 A_0 为偶部，A_1 为奇部。对于任意齐次元 $x \in A$，记其次数为 $|x| \in \mathbb{Z}_2$。

定义 2.1 [4] 设 A 是向量空间，若 A 上的双线性运算 $*$ 满足

$$x*(y*z) = -(x*y+y*x)*z = x*(z*y),\ \forall x,y,z \in A, \tag{2.1}$$

则称 $(A,*)$ 为 anti-Zinbiel 代数。

定义 2.2 [5] 设 $A = A_0 + A_1$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次超向量空间。若 A 上的双线性运算 $\cdot$ 满足

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z),\ x\cdot y = (-1)^{|x||y|}\, y\cdot x,\ \forall x,y,z \in A,$$

则称 $(A,\cdot)$ 为交换结合超代数。

定义 2.3 [5] 设 $(A,\cdot)$ 是交换结合超代数，V 是超向量空间。若偶的线性映射 $\rho: A \to \mathrm{End}(V)$ 满足

$$\rho(x\cdot y) = \rho(x)\rho(y),\ \forall x,y \in A, \tag{2.2}$$

则称 (ρ,V) 为 $(A,\cdot)$ 的表示。

定理 2.4 [6] 设 $(A,\cdot)$ 是复数域上的 2 维交换结合代数，$\{e_1, e_2\}$ 为 $(A,\cdot)$ 的基，则 A 同构于以下类型的交换结合代数：

(A1) $e_i \cdot e_j = 0, i, j = 1, 2$。

(A2) $e_1 \cdot e_1 = e_1$，$e_2 \cdot e_2 = e_2$。

(A3) $e_1 \cdot e_1 = e_1$，$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2$。

(A4) $e_1 \cdot e_1 = e_1$。

(A5) $e_1 \cdot e_1 = e_2$。

3. anti-Zinbiel 超代数

定义 3.1 设 $A = A_0 + A_1$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次超向量空间。若 A 上的双线性运算 $*$ 满足对于任意 $x, y, z \in A$ 有

$$x*(y*z)=-(x*y)*z-(-1)^{|x||y|}(y*x)*z\,, \tag{3.1}$$

$$x*(y*z)=(-1)^{|x|(|y|+|z|)}\,y*(z*x)\,, \tag{3.2}$$

则称 $(A,*)$ 为 anti-Zinbiel 超代数。

当 $A_1=0$ 时，等式(3.1)，(3.2)为

$$x*(y*z)=-(x*y)*z-(y*x)*z=y*(z*x),$$

交换 x,y 的得到

$$y*(x*z)=-(y*x)*z-(x*y)*z=x*(z*y),$$

所以有 $x*(y*z)=-(x*y)*z-(y*x)*z=x*(z*y)$，此时 anti-Zinbiel 超代数为 anti-Zinbiel 代数。

定理 3.1 设 A 是 $\mathbb{Z}_2$-分次超向量空间，A 上带有一个双线性运算 $*$，则 $(A,*)$ 是 anti-Zinbiel 超代数的充分必要条件是在 A 上定义 $x\cdot y=x*y+(-1)^{|x||y|}y*x$ $(\forall x,y\in A)$ 时，$(A,\cdot)$ 是交换结合超代数，且 $(-L_*,A)$ 是 $(A,\cdot)$ 的表示，其中 L_* 为 A 上关于 $*$ 的左乘运算。

证 必要性。设 $(A,*)$ 是 anti-Zinbiel 超代数。对任意齐次 $x,y\in A$，由于

$$\begin{aligned}(-1)^{|x||y|}y\cdot x&=(-1)^{|x||y|}\left(y*x+(-1)^{|y||x|}x*y\right)\\&=(-1)^{|x||y|}y*x+x*y\\&=x\cdot y,\end{aligned}$$

因此 $(A,\cdot)$ 是交换超代数。

$\forall x,y,z\in A$，由等式(3.2)，直接计算得

$$\begin{aligned}&(x\cdot y)\cdot z-x\cdot(y\cdot z)\\&=(x*y)*z+(-1)^{|x||y|}(y*x)*z+(-1)^{(|x|+|y|)|z|}\left[z*(x*y)+(-1)^{|x||y|}z*(y*x)\right]\\&-x*(y*z)-(-1)^{(|y|+|z|)|x|}(y*z)*x\\&=(x*y)*z+(-1)^{|x||y|}(y*x)*z+(-1)^{(|x|+|y|)|z|}\left[z*(x*y)+(-1)^{|x||y|}z*(y*x)\right]\\&-x*(y*z)-(-1)^{|y||z|}x*(z*y)-(-1)^{(|y|+|z|)|x|}\left[(y*z)*x+(-1)^{|y||z|}(z*y)*x\right]\\&=2(x*y)*z+2(-1)^{|x||y|}(y*x)*z-2(-1)^{|x||z|+|x||y|}(y*z)*x-2(-1)^{|x||z|+|y||z|+|x||y|}(z*y)*x\\&=2\left(-x*(y*z)+(-1)^{|x|(|y|+|z|)}y*(z*x)\right)\\&=0,\end{aligned}$$

即 $(A,\cdot)$ 是结合超代数。

$\forall x,y,z\in A$，由于 $*$ 满足等式(3.1)，因此

$$\begin{aligned}-L_*(x\cdot y)z&=-(x*y)*z-(-1)^{|x||y|}(y*x)*z\\&=x*(y*z)=L_*(x)L_*(y)z.\end{aligned}$$

因此 $-L_*$ 满足等式(2.2)，即 $(-L_*,A)$ 是结合超代数 $(A,\cdot)$ 的表示。

充分性。由 $(-L_*,A)$ 是 $(A,\cdot)$ 的表示知 $*$ 满足等式(3.1)，又由于 $(A,\cdot)$ 是结合超代数，直接展开得

$$0=(x\cdot y)\cdot z-x\cdot(y\cdot z)=2\left(-x*(y*z)+(-1)^{|x|(|y|+|z|)}y*(z*x)\right),$$

因此 $*$ 满足等式(3.2)，从而可知 $(A,*)$ 是 anti-Zinbiel 超代数。

4. 二维 anti-Zinbiel 超代数的分类

定理 4.1 设 $(A,*)$ 是非平凡二维 anti-Zinbiel 超代数，$\dim A_{\bar{0}}=2$，$\dim A_{\bar{1}}=0$，此时 $(A,*)$ 为二维 anti-Zinbiel 代数。则存在 $(A,*)$ 的一组基 $\{e_1,e_2\}$ 使。

证明 设 e_1,e_2 为 A 的基，

$$e_i * e_j = a_{ij}e_1 + b_{ij}e_2,\ i,j=1,2, \tag{4.1}$$

其中 $a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{C}$。$\forall x,y\in A$ 定义 $x\cdot y = x*y+y*x$，则 $(A,\cdot)$ 为交换结合代数。由定理 2.4，分别考虑 $(A,\cdot)$ 为(A1)~(A5)这 5 种情况。

若 $(A,\cdot)$ 为(A1)型交换结合代数，则 $e_i\cdot e_j=0$ $(1\le i,j\le 2)$。代入等式(4.1)可得

$$\begin{cases}0=e_1\cdot e_1=2e_1*e_1,\\ 0=e_2\cdot e_2=2e_2*e_2,\\ 0=e_1\cdot e_2=(a_{12}+a_{21})e_1+(b_{12}+b_{21})e_2.\end{cases}$$

因此 $a_{11}=b_{11}=a_{22}=b_{22}=0$，$a_{12}+a_{21}=b_{12}+b_{21}=0$。由于 $(A,*)$ 为 anti-Zinbiel 代数，因此 $*$ 满足等式(2.1)，代入可得

$$\begin{cases}b_{12}e_1*e_2=e_1*(e_1*e_2)=-(2e_1*e_1)*e_2=0=b_{21}e_1*e_2,\\ a_{21}{}^2e_1=e_2*(e_2*e_1)=-(2e_2*e_2)*e_1=0=e_2*(e_1*e_2)=a_{12}a_{21}.\end{cases}$$

解得 $a_{12}=a_{21}=b_{12}=b_{21}=0$。此时 $(A,*)$ 的代数运算为 $e_i*e_j=0$ $(i,j=1,2)$。

若 $(A,*)$ 为(A2)型交换结合代数，则 $e_1\cdot e_1=e_1$，$e_2\cdot e_2=e_2$，代入等式(4.1)可得

$$e_1=e_1\cdot e_1=2e_1*e_1=2a_{11}e_1+2b_{11}e_2,$$

解得 $a_{11}=\frac{1}{2}$，$b_{11}=0$。由于 $(A,*)$ 为 anti-Zinbiel 代数，因此 $*$ 满足等式(2.1)，代入可得

$$a_{11}^2e_1=e_1*(e_1*e_1)=-(2e_1*e_1)*e_1=-2a_{11}^2e_1=e_1*(e_1*e_1),$$

解得 $a_{11}=0$，矛盾，所以不存在 anti-Zinbiel 代数使对应交换结合代数为(A2)型的交换结合代数。

若 $(A,*)$ 为(A3)型交换结合代数，则 $e_1\cdot e_1=e_1$，$e_1\cdot e_2=e_2\cdot e_1=e_2$，代入等式(4.1)可得

$$e_1=e_1\cdot e_1=2e_1*e_1=2a_{11}e_1+2b_{11}e_2,$$

解得 $a_{11}=\frac{1}{2}$，$b_{11}=0$。由于 $(A,*)$ 为 anti-Zinbiel 代数，因此 $*$ 满足等式(2.1)，代入可得

$$a_{11}^2e_1=e_1*(e_1*e_1)=-(2e_1*e_1)*e_1=-2a_{11}^2e_1=e_1*(e_1*e_1),$$

解得 $a_{11}=0$，矛盾，所以不存在 anti-Zinbiel 代数使对应交换结合代数为(A3)型的交换结合代数。

若 $(A,*)$ 为(A4)型交换结合代数，则 $e_1\cdot e_1=e_1$。代入等式(4.1)可得

$$e_1=e_1\cdot e_1=2e_1*e_1=2a_{11}e_1+2b_{11}e_2,$$

解得 $a_{11}=\frac{1}{2}$，$b_{11}=0$。由于 $(A,*)$ 为 anti-Zinbiel 代数，因此 $*$ 满足等式(2.1)，代入可得

$$a_{11}^2e_1=e_1*(e_1*e_1)=-(2e_1*e_1)*e_1=-2a_{11}^2e_1=e_1*(e_1*e_1),$$

解得 $a_{11}=0$，矛盾，所以不存在 anti-Zinbiel 代数使对应交换结合代数为 $(A4)$ 型的交换结合代数。

若$\left(A,\cdot\right)$为(A5)型交换结合代数，则$e_1\cdot e_1=e_2$，代入等式(4.1)可得

$$\begin{cases}e_2=e_1\cdot e_1=2e_1*e_1=2a_{11}e_1+2b_{11}e_2,\\0=e_2\cdot e_2=2e_2*e_2,\\0=e_1\cdot e_2=\left(a_{12}+a_{21}\right)e_1+\left(b_{12}+b_{21}\right)e_2.\end{cases}$$

因此$a_{11}=a_{22}=b_{22}=0$，$b_{11}=\dfrac{1}{2}$，$a_{12}+a_{21}=b_{12}+b_{21}=0$。由于$\left(A,*\right)$为 anti-Zinbiel 代数，因此$*$满足等式(2.1)，代入可得

$$\begin{cases}a_{21}^2e_1+a_{21}b_{21}e_2=e_2*\left(e_2*e_1\right)=-\left(2e_2*e_2\right)*e_1=0=e_2*\left(e_1*e_2\right),\\0=e_2*\left(e_1*e_1\right)=-\left(2e_2*e_1\right)*e_1=-2b_{21}^2e_2=e_2*\left(e_1*e_1\right).\end{cases}$$

解得$a_{12}=a_{21}=b_{12}=b_{21}=0$。由于$e_1*e_1=\dfrac{1}{2}e_2$，$e_1*e_2=0$，$e_2*e_1=0$，$e_2*e_2=0$，所以当$x,y,z$在等式(2.1)取基中元素其它的组合时有，

$$\begin{cases}0=e_2*\left(e_2*e_2\right)=-(2e_2*e_2)*e_2=e_2*\left(e_2*e_2\right)=0,\\0=e_2*\left(e_1*e_2\right)=-\left(2e_2*e_1\right)*e_2=e_2*\left(e_2*e_1\right)=0,\\0=e_1*\left(e_2*e_2\right)=-\left(2e_1*e_2\right)*e_2=e_1*\left(e_2*e_2\right)=0,\\0=e_1*\left(e_2*e_1\right)=-\left(2e_1*e_2\right)*e_1=e_1*\left(e_1*e_2\right)=0,\\0=e_1*\left(e_1*e_1\right)=-\left(2e_1*e_1\right)*e_1=e_1*\left(e_1*e_1\right)=0,\\0=e_1*\left(e_1*e_2\right)=-\left(2e_1*e_1\right)*e_2=e_1*\left(e_2*e_1\right)=0.\end{cases}$$

成立，故在这种情形下 anti-Zinbiel 代数的基中非零运算只有$e_1*e_1=\dfrac{1}{2}e_2$。取$\left(A,*\right)$的另一组基$e_1'=e_1$，$e_2'=\dfrac{1}{2}e_2$，则$\left(A,*\right)$的代数运算为

$$e_1'*e_1'=e_2',\quad e_1'*e_2'=0,\quad e_2'*e_1'=0,\quad e_2'*e_2'=0.$$

定理 4.2 设$\left(A,*\right)$是非平凡二维 anti-Zinbiel 超代数，$\dim A_{\bar 0}=1,\dim A_{\bar 1}=1$，则存在$e_1$为$A_{\bar 0}$的基，$e_2$为$A_{\bar 1}$的基使得$e_2*e_2=e_1$。

证明 设e_1为$A_{\bar 0}$的基，e_2为$A_{\bar 1}$的基，

$$e_1*e_1=ae_1,\quad e_1*e_2=be_2,\quad e_2*e_1=ce_2,\quad e_2*e_2=de_1,\quad a,b,c,d\in\mathbb{C}.$$

由$\left(A,*\right)$为 anti-Zinbiel 超代数知$*$满足等式(3.1)，(3.2)。分别取

$$x=y=z=e_1,\quad x=y=e_1,z=e_2,\quad x=z=e_1,y=e_2$$

三种情况，等式(3.1)和(3.2)对应方程

$$\begin{cases}0=e_1*\left(e_1*e_1\right)+\left(e_1*e_1\right)*e_1+\left(e_1*e_1\right)*e_1=3a^2e_1,\\0=e_1*\left(e_1*e_2\right)+2\left(e_1*e_1\right)*e_2=\left(b^2+2ab\right)e_2,\\0=e_1*\left(e_2*e_1\right)+\left(e_1*e_2\right)*e_1+\left(e_2*e_1\right)*e_1=c^2e_2.\end{cases}$$

因此$a=b=c=0$。此时，当x,y,z取基中元素其它的组合时，等式(3.1)恒成立，当x,y,z其中一个为e_1时，等式(3.2)恒成立，当$x=y=z=e_2$时，等式(3.2)为

$$e_2*\left(e_2*e_2\right)=e_2*\left(e_2*e_2\right),$$

DOI: 10.12677/pm.2026.164094

因此 d 为任意复数。当 $d\neq 0$ 时，取 $(A,*)$ 的另一组基 $e_1'=de_1$，$e_2'=e_2$，则 $(A,*)$ 的代数运算为

$$e_1'*e_1'=0,\quad e_1'*e_2'=0,\quad e_2'*e_1'=0,\quad e_2'*e_2'=e_1'.$$

5. anti-Zinbiel 超代数的构造

定义 5.1 设 $(A,\cdot)$ 是交换结合超代数，(ρ,V) 为 $(A,\cdot)$ 的表示。若偶的线性映射 $T:V\to A$ 满足

$$T(u)\cdot T(v)=-T\big(\rho(T(u))v\big)-(-1)^{|u||v|}T\big(\rho(T(v))u\big),\forall u,v\in V, \tag{5.1}$$

则称 T 是 $(A,\cdot)$ 关于 (ρ,V) 的 anti-O-算子。

如果 anti-O-算子 T 还满足

$$\rho\big(T(u)\cdot T(v)\big)w=(-1)^{|u|(|v|+|w|)}\rho\big(T(v)\cdot T(w)\big)u,\quad \forall u,v,w\in V, \tag{5.2}$$

则称 T 为强 anti-O-算子。

定义 5.2 设 $(A,\cdot)$ 是交换结合超代数，如果 A 上偶的线性变换 R 满足

$$R(x)\cdot R(y)=-R\big(R(x)\cdot y\big)-(-1)^{|x||y|}R\big(R(y)\cdot x\big),\forall x,y\in A, \tag{5.3}$$

则称 R 是 $(A,\cdot)$ 的 anti-Rota-Baxter 算子。

若 anti-Rota-Baxter 算子 R 还满足

$$\big(R(x)\cdot R(y)\big)\cdot z=(-1)^{|x|(|y|+|z|)}\big(R(y)\cdot R(z)\big)\cdot x,\quad \forall x,y,z\in A, \tag{5.4}$$

则称 R 为强 anti-Rota-Baxter 算子。

命题 5.3 设 $T:V\to A$ 是交换结合超代数 $(A,\cdot)$ 关于表示 (ρ,V) 的强 anti-O-算子，在 V 上定义双线性运算

$$u*v=\rho\big(T(u)\big)v,u,v\in V,$$

则 $(V,*)$ 为 anti-Zinbiel 超代数。

证 由 $*$ 运算的定义以及 (ρ,V) 为 $(A,\cdot)$ 的表示可知，$\forall u,v,w\in V$，

$$\begin{aligned}&u*(v*w)+(u*v)*w+(-1)^{|u||v|}(v*u)*w\\&=\rho\big(T(u)\big)\rho\big(T(v)\big)w+\rho\big(T(u*v)\big)w+(-1)^{|u||v|}\rho\big(T(v*u)\big)w\\&=\rho\big(T(u)\cdot T(v)\big)w+\rho\Big(T\big(\rho(T(u))v\big)\Big)w+(-1)^{|u||v|}\rho\Big(T\big(\rho(T(v))u\big)\Big)w.\end{aligned}$$

由于 T 是 anti-O-算子，由等式(5.1)知

$$\rho\big(T(u)\cdot T(v)\big)w=-\rho\Big(T\big(\rho(T(u))v\big)\Big)w-(-1)^{|u||v|}\rho\Big(T\big(\rho(T(v))u\big)\Big)w,$$

即在 V 上等式(3.1)成立。又由于 T 是强 anti-O-算子，所以

$$\begin{aligned}&u*(v*w)-(-1)^{|u|(|v|+|w|)}v*(w*u)\\&=\rho\big(T(u)\cdot T(v)\big)w-(-1)^{|u|(|v|+|w|)}\rho\big(T(v)\cdot T(w)\big)u\\&=0,\end{aligned}$$

即在 V 上等式(3.2)成立。因此 $(V,*)$ 为 anti-Zinbiel 超代数。

推论 5.4 设 $(A,\cdot)$ 是交换结合超代数，R 是 A 上的强 anti-Rota-Baxter 算子，在 A 上定义双线性运算

$$x*y=R(x)\cdot y,\ x,y\in A, \tag{5.5}$$

则$(A,*)$为 anti-Zinbiel 超代数。

证 取$(A,\cdot)$的左乘运算$L_{\cdot}$，则$(L_{\cdot},A)$为交换结合超代数$(A,\cdot)$的表示，从而R是关于$(L_{\cdot},A)$的强 anti-O-算子，由命题 5.3 知$(A,*)$为 anti-Zinbiel 超代数。

例 5.5 取一类三维交换结合超代数$(A,\cdot)$，设$\{e\}$为A_0的基，$\{f_1,f_2\}$为A_1的基，基中非零乘法运算有$e\cdot e=e,e\cdot f_1=f_1,e\cdot f_2=f_2$。设$R$为$(A,\cdot)$的偶的 anti-Rota-Baxter 算子，

$$R(e)=r_{11}e,\quad R(f_1)=r_{22}f_1+r_{32}f_2,\quad R(f_2)=r_{23}f_1+r_{33}f_2,\quad r_{ij}\in\mathbb{C}.$$

由R是 anti-Rota-Baxter-算子可知，R满足等式(5.3)，因此

$$\begin{cases}3r_{11}^2=0,\\ r_{22}^2+r_{32}r_{23}=0,\\ r_{32}(r_{22}+r_{33})=0,\\ r_{23}(r_{22}+r_{33})=0,\\ r_{23}r_{32}+r_{33}^2=0.\end{cases}$$

分情况讨论。当$r_{23}=0$时解得$r_{22}=r_{33}=0$，所以R在e,f_1,f_2下的对应矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&r_{32}&0\end{pmatrix},$$

$\forall x,y\in A$，由于$R(e)=0$，$R(A_1)\in A_1$，所以有$R(x)\cdot R(y)=0$，从而等式(5.4)两边同时为 0。因此R为强 anti-Rota-Baxter 算子。由推论 5.4，在A上定义运算$*$，则$(A,*)$为 anti-Zinbiel 超代数，其中$(A,*)$的运算为

$$e*e=R(e)\cdot e=0,\quad e*f_1=R(e)\cdot f_1=0,$$

$$e*f_2=R(e)\cdot f_2=0,\quad f_1*e=R(f_1)*e=r_{32}f_2,$$

$$f_2*e=R(f_2)*e=0,\quad f_i*f_j=R(f_i)*f_j=0,i,j=1,2.$$

当$r_{32}\neq0$时，取$(A,*)$的另一组基$e'=e$，$f_1'=f_1$，$f_2'=r_{32}f_2$则$(A,*)$的非零代数运算为$f_1'*e=f_2'$。

当$r_{23}\neq0$时解得$r_{32}=-\dfrac{r_{22}^2}{r_{23}},r_{33}=-r_{22}$，$R$在$e,f_1,f_2$下的对应矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&r_{22}&r_{23}\\0&-\dfrac{r_{22}^2}{r_{23}}&-r_{22}\end{pmatrix},$$

$\forall x,y\in A$，由于$R(e)=0$，$R(A_1)\in A_1$，所以有$R(x)\cdot R(y)=0$，从而等式(5.4)两边同时为 0。因此R为强 anti-Rota-Baxter 算子。由推论 5.4，所以在A上定义运算$*$，则$(A,*)$为 anti-Zinbiel 超代数，其中$(A,*)$的运算为

$$e*e=R(e)\cdot e=0,\quad e*f_1=R(e)\cdot f_1=0,$$

$$e*f_2=R(e)\cdot f_2=0,\quad f_1*e=R(f_1)*e=r_{22}f_1-\frac{r_{22}^2}{r_{23}}f_2,$$

$$f_2 * e = R(f_2) * e = r_{23} f_1 - r_{22} f_2 , \quad f_i * f_j = R(f_i) * f_j = 0, i, j = 1, 2 .$$

取 $(A,*)$ 的另一组基 $e' = \frac{1}{r_{23}} e$，$f_1' = f_1 - \frac{r_{22}}{r_{23}} f_2$，$f_2' = f_2$ 则 $(A,*)$ 的非零代数运算为 $f_2' * e' = f_1'$。

参考文献

[1] Loday, J. (1995) Cup-product for Leibnitz Cohomology and Dual Leibniz Algebras. *Mathematica Scandinavica*, **77**, 189-196. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12560

[2] Towers, D.A. (2002) Zinbiel Algebras Are Nilpotent. *Journal of Algebra*, **251**, 647-654.

[3] Camacho, L.M., Fernández Ouaridi, A., Kaygorodov, I. and Navarro, R.M. (2023) Zinbiel Superalgebras. *New York Journal of Mathematics*, **29**, 1341-1362.

[4] Liu, G. and Bai, C. (2023) New Splittings of Operations of Poisson Algebras and Transposed Poisson Algebras and Related Algebraic Structures. In: *STEAM-H*: *Science*, *Technology*, *Engineering, Agriculture*, *Mathematics* & *Health*, Springer International Publishing, 49-96. https://doi.org/10.1007/978-3-031-39334-1_2

[5] Berezin, F.A. (1987) Introduction to Superanalysis. Reidel Publishing Company.

[6] Bermudez, J.M.A., Fresan, J. and Hernandez, J.S. (2007) On the Variety of Two Dimensional Real Associative Algebras. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, **2**, 1293-1305. https://doi.org/10.12988/ijcms.2007.07134