Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 204-212
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164105

斯库顿定理巧解几何问题

陈彩依，董玉成*

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2026年3月9日；录用日期：2026年4月11日；发布日期：2026年4月23日

摘 要

角平分线是平面几何的基本元素之一，其相关线段长度的求解在高考和强基计划考试中不乏其身影，此类题目计算量大且过程繁琐。而斯库顿定理(也被称为角平分线长定理)，其核心表达式直接建立了角平分线和三角形三边的量化关系，可为这类问题的计算提供高效简化的解题路径。

关键词

斯库顿定理，角平分线，三角形

Scudon's Theorem Cleverly Solves Geometric Problems

Caiyi Chen, Yucheng Dong*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: March 9, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

Abstract

The angle bisector is one of the fundamental elements of plane geometry, and the calculation of the lengths of related line segments frequently appears in the Gaokao and the Strong Foundation Plan exams. These types of problems involve large amounts of calculation and complex processes. The Stewart's theorem (also known as the Angle Bisector Length Theorem), directly establishes a quantitative relationship between the angle bisector and the three sides of the triangle, which can provide an efficient and simplified solution path for such problems.

Keywords

Stewart's Theorem, Angle Bisector, Triangle

*通讯作者。

文章引用: 陈彩依, 董玉成. 斯库顿定理巧解几何问题[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 204-212.
DOI: 10.12677/pm.2026.164105

1. 引言

在高中数学中，解三角形是非常重要的知识内容，其中三角形角平分线的求解频繁出现在高考及强基计划中。我们常用角平分线定理、余弦定理来解决相关问题。然而，在求解角平分线的长度问题时，常规方法往往计算量大且过程繁琐，极易出错。本文引入斯库顿定理，也就是角平分线长定理，通过揭示三角形内角平分线和各边长之间的关系，实现角平分线求解过程的简洁。

2. 斯库顿定理及其证明

“三角形内角平分线长的平方与其对边所成两条线段积的和，等于夹这角两边的积”[1]。如图 1，$AD^2+BD\cdot DC=AB\cdot AC$，这就是著名的斯库顿定理。为了方便记忆，斯库顿定理同样可表述为 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$，即“中方 = 上积 − 下积”，其中“中方”指的是角平分线长度的平方，“上积”指的是角平分线所在角的两边之积，“下积”指的是角平分线分对边所得两线段之积。下面给出该定理的两种证明方法。

已知：在 ΔABC 中，AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，交对边 BC 于 D，

求证：$AD^2+BD\cdot DC=AB\cdot AC$

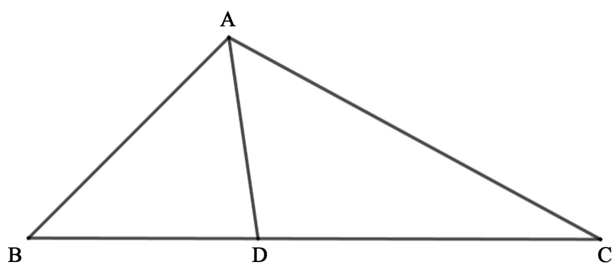

Figure 1. Diagram illustrating the proof of Scuton’s theorem
图 1. 斯库顿定理证明示意图

证法 1：(用余弦定理)

因为 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，

所以 $\cos\angle BAD=\cos\angle DAC$。

在 ΔABD 中，$\cos\angle BAD=\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}$。

在 ΔADC 中，$\cos\angle DAC=\dfrac{AD^2+AC^2-DC^2}{2AD\cdot AC}$。

则 $\dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\dfrac{AD^2+AC^2-DC^2}{2AD\cdot AC}$，

则 $AC\left(AB^2+AD^2-BD^2\right)=AB\left(AD^2+AC^2-DC^2\right)$，

则 $AC\cdot AB^2+AC\cdot AD^2-AC\cdot BD^2=AB\cdot AD^2+AB\cdot AC^2-AB\cdot DC^2$，

则 $AC\cdot AD^2-AB\cdot AD^2=AB\cdot AC^2-AB\cdot DC^2-AC\cdot AB^2+AC\cdot BD^2$，

则 $AD^2\left(AC-AB\right)=AB\cdot AC\left(AC-AB\right)-AB\cdot DC^2+AC\cdot BD^2$。

由角平分线定理，得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，即 $AB\cdot DC=AC\cdot BD$。

则 $AD^2\left(AC-AB\right)=AB\cdot AC\left(AC-AB\right)-AB\cdot BD\cdot DC+AC\cdot DC\cdot BD$，

则 $AD^2\left(AC-AB\right)=AB\cdot AC\left(AC-AB\right)-BD\cdot DC\left(AC-AB\right)$。

所以 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$。

即 $AD^2+BD\cdot DC=AB\cdot AC$。

证法 2：(用斯特瓦尔特定理)

斯特瓦尔特定理是三角形中线段长度计算的通用定理，其核心表达式为：ΔABC 的边在 BC 上有一点 D，则成立以下关系式 $AD^2\cdot BC=AC^2\cdot BD+AB^2\cdot CD-BC\cdot BD\cdot DC$ [2]

因为 D 是 ΔABC 边上的一点，

由斯特瓦尔特定理，得

$$AD^2\cdot BC=AC^2\cdot BD+AB^2\cdot CD-BC\cdot BD\cdot DC. \quad ①$$

由角平分线定理，得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，即

$$AB\cdot DC=AC\cdot BD. \quad ②$$

将②代入①，得

$$AD^2\cdot BC=AC\left(AB\cdot DC\right)+AB\left(AC\cdot BD\right)-BC\cdot BD\cdot DC,$$

即 $AD^2\cdot BC=AC\cdot AB\left(DC+BD\right)-BC\cdot BD\cdot DC$，

亦即 $AD^2\cdot BC=AC\cdot AB\cdot BC-BD\cdot DC\cdot BC$。

所以 $AD^2+BD\cdot DC=AB\cdot AC$。

由此可见，斯库顿定理是斯特瓦尔特定理在角平分线这一条件下的简化形式。

在运用斯库顿定理解题时，需注意识别题目中的关键条件，这是快速切入解题思路的前提。此处需注意以下两点：其一是题目中存在三角形一角的角平分线，且该线交对边于一点，这是运用定理的前提；其二是题目中的隐藏条件，若题目中未直接提及角平分线，但通过“角相等”“对称关系”可推导出角平分线这一内容。此时，优先采用斯库顿定理能够显著简化解题思路、减少计算时间。

3. 斯库顿定理应用

接下来，我们运用常规方法和斯库顿定理对两道题目进行求解，旨在拓展学生的解题思路，并亲身体验该定理在解决三角形角平分线长度计算中的高效性与简洁性。

例 1 (2023 全国甲卷高考真题)在 ΔABC 中，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，$\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D，则 $AD=$_____(图 2)。

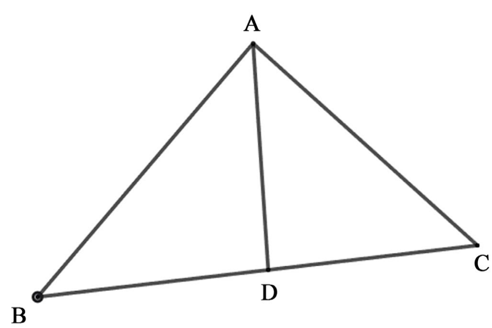

Figure 2. Example 1 figure
图 2. 例 1 图

解法 1：常规方法

在 ΔABC 中， $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

$$\left(\sqrt{6}\right)^2 = 2^2 + AC^2 - 2\times 2AC\cdot\cos 60^\circ$$

$$6 = 4 + AC^2 - 4AC\times\frac{1}{2}$$

解得 $AC = 1+\sqrt{3}$ (负值舍去)

设 $CD = x$，则 $BD = \sqrt{6} - x$。

由角平分线定理，得 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{CD}$

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}-x}{x}$$

解得 $x = \sqrt{2}$。

所以 $BD = \sqrt{6} - \sqrt{2}$。

在 ΔABC 中， $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB\cdot BC} = \dfrac{2^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2\times 2\times\sqrt{6}} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$。

在 ΔABD 中，

$$\begin{aligned}
AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB\cdot BD\cdot\cos B \\
&= 2^2 + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 - 2\times 2\times\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\times\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \\
&= 4 + \left(6 - 2\sqrt{12} + 2\right) - 2\times\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\times\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \\
&= 4 + 8 - 4\sqrt{3} - 2\times\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{6}} \\
&= 12 - 4\sqrt{3} - 2\times\frac{3\sqrt{6} - \sqrt{18} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
&= 12 - 4\sqrt{3} - 2\times\frac{4\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\
&= 12 - 4\sqrt{3} - 2\times\frac{4\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\
&= 12 - 4\sqrt{3} - 2\times\left(4 - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) \\
&= 12 - 4\sqrt{3} - 8 + 2\times\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 4.
\end{aligned}$$

所以 $AD = 2$。

解法 2：用斯库顿定理

在 ΔABC 中， $\cos\angle BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot AC} = \dfrac{2^2 + AC^2 - 6}{2\times 2AC}$，

即 $\cos 60^\circ = \dfrac{2^2 + AC^2 - 6}{2\times 2AC} = \dfrac{1}{2}$。

$$2\left(AC^2-2\right)=4AC$$

$$2AC^2-4AC-4=0$$

$$AC^2-2AC-2=0$$

$$AC=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

因为 $AC>0$

所以 $AC=1+\sqrt{3}$ 。

由角平分线定理，得 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

则 $\frac{CD}{BC}=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

则 $CD=\frac{1}{\sqrt{3}}BC=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{6}=\sqrt{2}$ 。

由斯库顿定理，得 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD=2\times\left(1+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\times\sqrt{2}=4$ 。

所以 $AD=2$ 。

解法对比：对比上述例题的不同解法，不难看出斯库顿定理提供了直接的代入解法，仅需基础根式计算，减少了繁杂的计算，过程更简洁。具体而言，解法 1 依靠余弦定理和角平分线定理分步求解，过程中依赖余弦定理的反复应用，且根式计算步骤繁杂，易因计算失误出错；而解法 2 无需多次应用余弦定理，仅通过简单的线段乘积和减法运算，便可得出结果。该解法应用斯库顿定理避免了常规方法中繁琐的三角运算，可以直接解决三角形角平分线相关长度的计算问题，大大减少了计算步骤，解题效率与准确率显著提升。

例 2 (2025 年北京大学强基计划笔试 20) ΔABC 中，D 在 BC 上，AD 平分 $\angle BAC$，$AB=AD=2$，$BD=1$，求 CD (图 3)。

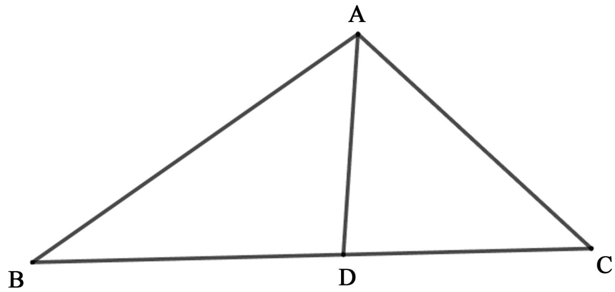

Figure 3. Example 2 figure
图 3. 例 2 图

解法 1：常规方法

在 ΔABD 中，$\cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\times2\times2}=\frac{7}{8}$

在 ΔACD 中，$\cos\angle DAC=\frac{AD^2+AC^2-CD^2}{2AD\cdot AC}=\frac{2^2+AC^2-CD^2}{2\times2AC}=\frac{4+AC^2-CD^2}{4AC}$

由角平分线定理，得 $\cos\angle BAD=\cos\angle DAC$

则

$$\frac{4+AC^2-CD^2}{4AC}=\frac{7}{8} \quad ①$$

设 $CD=x$。

由角平分线定理，得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，即 $\frac{2}{AC}=\frac{1}{x}$

所以

$$AC=2x \quad ②$$

将②代入①，得 $\frac{4+(2x)^2-x^2}{8x}=\frac{7}{8}$

则 $\frac{4+3x^2}{8x}=\frac{7}{8}$

解得 $x_1=1$， $x_2=\frac{4}{3}$。

此时需验证根的合理性

当 $x_1=1$ 时， $CD=1$， $AC=2x=2$， $BC=BD+CD=1+1=2$

即 ΔABC 为等边三角形。

等边三角形中 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{2^2-1^1}=\sqrt{3}\neq 2$，与已知矛盾，故 $x_1=1$ 舍去。

所以 $x=\frac{4}{3}$，即 $CD=\frac{4}{3}$。

解法 2：用斯库顿定理

设 $CD=x$。

由角平分线定理，得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$，即 $\frac{2}{AC}=\frac{1}{x}$。

所以 $AC=2x$。

由斯库顿定理，得 $AD^2+BD\cdot DC=AB\cdot AC$

即 $2^2+1\cdot x=2\cdot 2x$

解得 $x=\frac{4}{3}$，即 $CD=\frac{4}{3}$。

解法对比：对比上述例题的不同解法，解法 1 先通过余弦定理表示角的余弦值，再利用角平分线定理建立等式求解，此过程求解后还需利用三角形的几何性质验证根的合理性，涉及多个计算环节，步骤多且易出错；而解法 2 就恰恰相反，直接利用角平分线定理和斯库顿定理，一步构建出关于求解线段的方程，直接求解即可，未涉及等式变形与根的验证环节，计算量大幅减少，由此可见斯库顿定理的优势。

4. 讨论

斯库顿定理揭示了三角形内角平分线和各边长之间的数量关系，利于我们快速计算三角形内角平分线的长度。为了我们全面地理解这一定理，接下来我们从以下几个角度进行讨论。

4.1. 外角平分线长度公式及其推导(图 4)

在 ΔABC 中， AD 为 $\angle BAC$ 的外角平分线，交 BC 延长线于 D，

则有 $AD^2=BD\cdot CD-AC\cdot AB$。

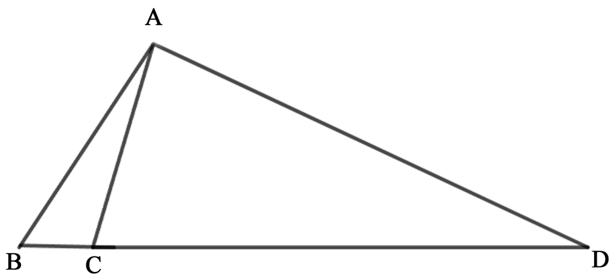

Figure 4. 外角平分线长度公式推导示意图
图 4. Derivation diagram of the length formula of the outer angle iseminor

推导过程：因为 AD 为 $\angle BAC$ 的外角平分线，
所以

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}\text{，则 } BD=\frac{AB}{AC}CD \qquad ①$$

因为 D 在 BC 延长线上，此时

$$BD=BC+CD \qquad ②$$

将①代入②，得 $\frac{AB}{AC}CD=BC+CD$

则 $BC=\frac{AB-AC}{AC}CD$

所以 $CD=\frac{BC\cdot AC}{AB-AC}$， $BD=\frac{BC\cdot AB}{AB-AC}$ 。

在 ΔACD 中，

$$\begin{aligned}AC^2&=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle D\\&=AD^2+\left(\frac{BC\cdot AC}{AB-AC}\right)^2-2AD\cdot\frac{BC\cdot AC}{AB-AC}\cdot\cos\angle D\end{aligned} \qquad ③$$

在 ΔABD 中，

$$\begin{aligned}AB^2&=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle D\\&=AD^2+\left(\frac{BC\cdot AB}{AB-AC}\right)^2-2AD\cdot\frac{BC\cdot AB}{AB-AC}\cdot\cos\angle D\end{aligned} \qquad ④$$

③ $\times AB-$ ④ $\times AC$，得 $AC^2\cdot AB-AB^2\cdot AC=AD^2\cdot AB-AD^2\cdot AC+\frac{BC^2\cdot AC^2\cdot AB}{(AB-AC)^2}-\frac{BC^2\cdot AB^2\cdot AC}{(AB-AC)^2}$

即 $AC\cdot AB(AC-AB)=AD^2(AB-AC)+\frac{BC^2\cdot AC\cdot AB}{(AB-AC)^2}(AC-AB)$

$$AD^2=\frac{BC^2\cdot AC\cdot AB}{(AB-AC)^2}-AC\cdot AB$$

即
$$\begin{aligned}&=\frac{BC\cdot AB}{AB-AC}\cdot\frac{BC\cdot AC}{AB-AC}-AC\cdot AB\\&=BD\cdot CD-AC\cdot AB\end{aligned}$$

4.2. 斯库顿定理与三角形面积公式的内在联系

斯库顿定理的传统证明多依托余弦定理或者斯特瓦尔特展开，侧重于角度相等与线段乘积关系的推导。但从几何的角度来看，线段长度、角度关系与面积之间存在紧密的内在关联。接下来，我们利用面积法来推导斯库顿定理(图 5)。

已知：在 ΔABC 中， AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，交对边 BC 于 D，

求证： $AD^2+BD\cdot CD=AB\cdot AC$ 。

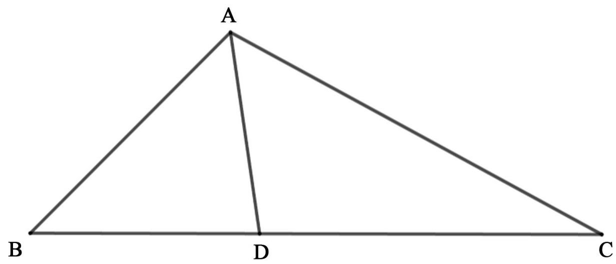

Figure 5. 斯库顿定理证明示意图

图 5. Diagram illustrating the proof of Scuton's theorem

证明：在 ΔABC 中， $S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABC}$

$$\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD+\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle CAD=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC \quad ①$$

因为 AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线

所以 $\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC$

①式可化简为： $AD\cdot\sin\frac{\angle BAC}{2}\left(AB+AC\right)=AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC$

$$AD\cdot\sin\frac{\angle BAC}{2}\left(AB+AC\right)=AB\cdot AC\cdot 2\sin\frac{\angle BAC}{2}\cos\frac{\angle BAC}{2}$$

$$AD\left(AB+AC\right)=2AB\cdot AC\cdot\cos\frac{\angle BAC}{2} \quad ②$$

在 ΔABC 中， $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

由半角公式，得

$$\cos\frac{\angle BAC}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\angle BAC}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(AB+AC\right)^2-BC^2}{AB\cdot AC}} \quad ③$$

将③代入②，得 $AD\left(AB+AC\right)=AB\cdot AC\cdot\sqrt{\frac{\left(AB+AC\right)^2-BC^2}{AB\cdot AC}}$

$$AD^2\left(AB+AC\right)^2=AB^2\cdot AC^2\cdot\frac{\left(AB+AC\right)^2-BC^2}{AB\cdot AC}$$

则

$$AD^2=AB\cdot AC-\frac{BC^2\cdot AB\cdot AC}{\left(AB+AC\right)^2} \quad ④$$

由角平分线定理，得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$，且 $BC=BD+CD$

所以 $BD=\frac{BC\cdot AB}{AB+AC}$， $CD=\frac{BC\cdot AC}{AB+AC}$

$$BD\cdot CD=\frac{BC\cdot AB}{AB+AC}\cdot\frac{BC\cdot AC}{AB+AC}=\frac{BC^2\cdot AB\cdot AC}{\left(AB+AC\right)^2}$$

代入④，得 $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$

即 $AD^2+BD\cdot CD=AB\cdot AC$。

5. 结束语

通过以上两道例题，我们可以看出斯库顿定理为平面几何中的角平分线问题提供了一种高效的解题思路和方法，将复杂的几何关系转化为简洁的代数运算，它不仅能有效提升学生的解题能力，更能训练他们的发散思维和探究精神。

现有研究表明指向核心素养的几何定理教学应注重“定理的引入－定理的验证－定理的应用迁移－定理的反思内化”的过程[3]。本文以斯库顿定理为载体，在简化解题过程的同时，培养学生逻辑推理与几何直观素养，为几何解题教学提供了参考。

参考文献

[1] 刘运谊. 斯库顿定理及其应用[J]. 数学教学通讯, 1994(6): 12+39.

[2] 陈德前. 斯特瓦尔特定理及其应用[J]. 数学教学研究, 1993(3): 23-24.

[3] 朱敏敏. 指向核心素养的几何定理教学策略研究[J]. 数理化解题研究, 2022(17): 47-49.