

互素阶有限循环群直积自同构计数函数的分布

崔浩天

青岛大学数学与统计学院, 山东 青岛

收稿日期: 2026年3月10日; 录用日期: 2026年4月22日; 发布日期: 2026年4月30日

摘要

设 $\phi(m, n)$ 为两个有限循环群的直积 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ 的自同构的个数, 本文考虑了当 m 、 n 互素时 $\phi(m, n)$ 的分布, 即 $(m, n) = 1$ 时满足 $\phi(m, n) \leq x$ 的 (m, n) 有多少对, 利用双曲求和法、卷积法等解析数论方法得到了 $\phi(m, n)$ 分布的渐进表达式。

关键词

解析数论, 自同构群, 群的阶数, 双曲求和法, 卷积法, 数论函数分布

The Distribution of the Automorphism Counting Function of the Direct Product of Finite Cyclic Groups of Coprime Order

Haotian Cui

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: March 10, 2026; accepted: April 22, 2026; published: April 30, 2026

Abstract

Let $\phi(m, n)$ be the number of automorphisms of the direct product of two finite cyclic groups $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. This paper considers the distribution of $\phi(m, n)$ when m and n are coprime, that is, how many pairs (m, n) satisfy $\phi(m, n) \leq x$ with $(m, n) = 1$. Using analytic number theory methods such as the hyperbolic summation method and convolution method, we obtain an asymptotic expression for the distribution of $\phi(m, n)$.

Keywords

Analytic Number Theory, Automorphism Group, Order of a Group, Hyperbolic Summation Method, Convolution Method, Distribution of Arithmetic Functions

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

研究群的自同构个数是群论研究的经典课题，最简单的是有限循环群，有限循环群一定同构于某个整数加法群的商群 \mathbb{Z}_n ，而其自同构个数即为 $\phi(n)$ 。随着 p -群等理论的发展，人们在群自同构个数的研究方面已取得了诸多成果，并进一步推动了组合群论等领域的研究。

2015 年，Amit Sehgal、Satita Sehgal 与 P.K. Sharma 首先给出了[1]:

有限交换 p -群 $\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}}$ 的自同构个数为

$$\phi(p^{\alpha_1})\phi(p^{\alpha_2})(1+p)^{\frac{\min\{\alpha_1, \alpha_2\}}{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}}} p^{2\min\{\alpha_1, \alpha_2\} - \frac{\min\{\alpha_1, \alpha_2\}}{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}}}$$

并进一步计算得到一般 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ 自同构个数:

$$\phi(m, n) = \phi(m)\phi(n) \prod_{i=1}^r \left\{ (1+p_i)^{\frac{\min\{\alpha_i, \beta_i\}}{\max\{\alpha_i, \beta_i\}}} p_i^{2\min\{\alpha_i, \beta_i\} - \frac{\min\{\alpha_i, \beta_i\}}{\max\{\alpha_i, \beta_i\}}} \right\}$$

其中 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_r^{\beta_r}$ 。

上述研究是从群论角度出发对群的自同构个数的定量描述，本文希望考虑自同构计数函数的整体性质，引入解析数论的视角与方法，对 m 、 n 互素时的 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ 的自同构群的阶数分布进行研究，此时 $\phi(m, n) = \phi(m)\phi(n)$ 。

关于 Euler 函数 $\phi(n)$ 的值分布，1972 年，Paul. T. Bateman 利用复变积分法等多种方法给出了其经典的结果[2]:

存在正常数 c ，对 $x \geq 1$ ，有

$$\sum_{\phi(n) \leq x} 1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right)$$

其中余项的精确形式为 $O\left(x \exp\{-c_{12}\sqrt{\log x \log_2 x}\}\right)$ ， c_{12} 为 $< \frac{1}{2}\sqrt{2}$ 的任意常数。

2017 年，冯彬计算了 Euler 函数在算术级数中的分布[3]，并得到:

设 c 为给定常数，则存在正常数 c_1, c_2 ，使得当 $q \leq \exp\{c\sqrt{\log x}\}$ 时

$$\sum_{\substack{\phi(n) \leq x \\ n \equiv (q)}} 1 = \frac{G(1)}{q} x + O\left(x \exp\{-c_1\sqrt{\log x} + c_2\sqrt[6]{\log x}\}\right)$$

其中 $G(1) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$ 。

由上可知，一般情形的 $\phi(m, n)$ 公式十分的复杂，涉及到对 m 、 n 的素数分解且要依次比较每个公共素因子的指数大小，将此公式置于求和号之下，考虑一般情形的 $\phi(m, n)$ 分布更将十分繁杂，故本文基于上述研究计算了最特殊的一类情形，即 m 、 n 互素时 $\phi(m, n)$ 的分布，并得到

定理 1.1. c_1 为某个正常数，对满足 $0 < c < \min\left\{\frac{1}{5}, c_1\right\}$ 的任一常数 c

$$\sum_{\substack{(m,n) \\ (m,n)=1 \\ \phi(m)\phi(n)\leq x}} 1 = \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)}(x \log x - x) + O\left(\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{\log x}\right)}\right)$$

2. 基本引理

引理 2.1 (冯彬) 设 c 为给定常数，则存在正常数 c_1, c_2 ，使得当 $q \leq \exp\{c\sqrt{\log x}\}$ 时

$$\sum_{\substack{\phi(n)\leq x \\ n=l(q)}} 1 = \frac{G(1)}{q} x + O\left(x \exp\{-c_1\sqrt{\log x} + c_2\sqrt[6]{\log x}\}\right)$$

其中 $G(1) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$ 。

证明：参见[3]

引理 2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$

证明：参见[4]的 45 页

引理 2.3 $\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$

证明：参见[5]的 42 页

引理 2.4 存在正常数 c' ，当 $m \geq 2$ 时，有 $\phi(m) \geq c' \frac{m}{\log m}$

证明：参见[6]中给出了更强的结论

引理 2.5 对 $x \geq 2$ ，有 $\sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} \log^2 x + A + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$ ，其中 A 为某常数

证明：参见[7]的 62 页习题

3. 定理 1.1 的证明

当 $(m, n) = 1$ 时，易见 $\phi(m, n) = \phi(m)\phi(n)$ ，结合引理 3.1 的叙述及条件，为了在后续计算中利用引理 2.1，并尽可能计算的更加精确，使用双曲求和法[7] (pp. 50-53)进行计算。

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1 &= \sum_{\substack{\phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1 = \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1 + \sum_{\substack{\phi(n)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1 - \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1 \\ &= 2 \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1 - \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x} \\ (m,n)=1}} 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

下面分别计算第一部分 $\sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1$ 与第二部分 $\sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x} \\ (m,n)=1}} 1$ 。

3.1. 第一部分计算

利用 Dirichlet 卷积法，有

$$\sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1 = \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x}} \sum_{d|(m,n)} \mu(d) = \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x}} \sum_{\substack{d|m \\ n=0(d)}} \mu(d) \tag{3.2}$$

下面对 d 的范围进行大致估计。因为 $\phi(m)\phi(n)\leq x$ 且有 $\phi(m)\geq\sqrt{\frac{m}{2}}$ 、 $\phi(n)\geq\sqrt{\frac{n}{2}}$ ，故 $\sqrt{\frac{mn}{4}}\leq x$ ， $mn\leq 4x^2=(2x)^2$ 。又因为 $d|(m,n)$ ，故 $d|m$ ， $d|n$ ，故 $d^2|mn$ ，若 $d>2x$ ，则 $d^2>4x^2$ ，这与 $d^2|mn\leq 4x^2$ 矛盾，所以 $d<2x$ 。由此，(3.2)式可写为

$$\sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} \sum_{d|m} \mu(d) = \sum_{d\leq x} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x \\ m=0(d) \\ n=0(d)}} 1 = \sum_{d\leq x} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ m=0(d)}} \sum_{\substack{\phi(n)\leq\frac{x}{\phi(m)} \\ n=0(d)}} 1 \tag{3.3}$$

注意到引理 2.1 是对 q (这里为 d) 较小时成立的，所以要利用引理 2.1 进行计算，就必须对 d 在前述范围下进一步划分，将上式分为两部分， d 较小部分能完全利用引理 2.1， d 较大部分无法满足引理

2.1 的条件，故用其他方法计算。结合引理 2.1，注意到 $\phi(m)\leq\sqrt{x}$ ，所以 $\frac{x}{\phi(m)}\geq\sqrt{x}$ ，所以

$\exp\left(c\sqrt{\log\frac{x}{\phi(m)}}\right)\geq\exp\left(c\sqrt{\log\sqrt{x}}\right)=\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)$ ，所以只要令 $d\leq\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)$ ，则对最内层求

和的每个 $\frac{x}{\phi(m)}$ ，均有 $d\leq\exp\left(c\sqrt{\log\frac{x}{\phi(m)}}\right)$ ，故以 $\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)$ 为分界， d 小的部分最内层求和完全

适用于引理 2.1，而不必担心由于 $\frac{x}{\phi(m)}$ 的变化对引理 2.1 适用性的影响。故(3.3)式为

$$\begin{aligned} &\sum_{d\leq x} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ m=0(d)}} \sum_{\substack{\phi(n)\leq\frac{x}{\phi(m)} \\ n=0(d)}} 1 \\ &= \sum_{d\leq\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ m=0(d)}} \sum_{\substack{\phi(n)\leq\frac{x}{\phi(m)} \\ n=0(d)}} 1 + \sum_{d>\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ m=0(d)}} \sum_{\substack{\phi(n)\leq\frac{x}{\phi(m)} \\ n=0(d)}} 1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.1.1. d 小的部分

先对 $d\leq\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)$ 的部分计算，利用引理 2.1，有

$$\begin{aligned} &\sum_{d\leq\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ m=0(d)}} \sum_{\substack{\phi(n)\leq\frac{x}{\phi(m)} \\ n=0(d)}} 1 \\ &= \sum_{d\leq\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ m=0(d)}} 1 \left(\frac{G(1)}{d} \frac{x}{\phi(m)} + O\left(\frac{x}{\phi(m)} \exp\left(-c_1\sqrt{\log\frac{x}{\phi(m)}} + c_2\sqrt{\log\frac{x}{\phi(m)}} \right) \right) \right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

先计算主项部分

$$\begin{aligned} & \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d)}} 1 \cdot \frac{G(1)}{d} \frac{x}{\phi(m)} \\ &= G(1)x \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d)}} 1 \cdot \frac{1}{\phi(m)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

计算内层和

$$\sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d)}} 1 \cdot \frac{1}{\phi(m)} = \sum_{k \leq \sqrt{x}} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 = \sum_{k=1} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 + \sum_{1 < k \leq \sqrt{x}} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 \tag{3.7}$$

当 $k=1$ 时, $\phi(m)=1$, 解得 $m=1,2$, $d|m$, 故 $d=1$ 或 2 , 即对 $d \geq 3$, 有

$$\sum_{k=1} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 = 0$$

而易见

$$\sum_{d=1} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k=1} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 = 2, \quad \sum_{d=2} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k=1} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 = \frac{-1}{2}$$

故

$$\sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k=1} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 = \sum_{d \leq 2} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k=1} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

当 $1 < k \leq \sqrt{x}$ 时, 利用 Abel 求和, 并应用引理 2.1, 有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 < k \leq \sqrt{x} \\ \phi(m)=k \\ m=0(d)}} \frac{1}{k} \sum 1 &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} d \left(\sum_{\substack{k \leq t \\ \phi(m)=k \\ m=0(d)}} \sum 1 \right) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} d \left(\sum_{\substack{\phi(m) \leq t \\ m=0(d)}} 1 \right) \\ &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} d \left(\frac{G(1)}{d} t + O \left(t \exp \left(-c_1 \sqrt{\log t} + c_2 \sqrt[6]{\log t} \right) \right) \right) \\ &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} d \frac{G(1)}{d} t + \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} d \left(O \left(t \exp \left(-c_1 \sqrt{\log x} + c_2 \sqrt[6]{\log t} \right) \right) \right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中

$$\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} d \frac{G(1)}{d} t = \frac{G(1)}{2d} \log x \tag{3.9}$$

由引理 2.2, 有

$$\begin{aligned}
 G(1)x & \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)\sqrt{x}}{d} \int_1^{\frac{x}{d}} \frac{1}{t} dt \frac{G(1)}{d} \\
 & = \frac{G^2(1)}{2} x \log x \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d^2} \\
 & = \frac{G^2(1)}{2} x \log x \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} - \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \\
 & = \frac{G^2(1)}{2} x \log x \left(\frac{1}{\zeta(2)} - \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

对余项进行估计

$$\left| - \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leq \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{1}{d^2} \leq \int_{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \tag{3.11}$$

即

$$- \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d^2} = O\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \tag{3.12}$$

结合(3.10)与(3.12), 故

$$\begin{aligned}
 & \frac{G^2(1)}{2} x \log x \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d^2} \\
 & = \frac{\zeta^2(2)\zeta^2(3)}{2\zeta^2(6)} x \log x \left(\frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \right) \\
 & = \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{2\zeta^2(6)} x \log x + O\left(\frac{x \log x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

下面估计(3.8)式中余项部分

$$\begin{aligned} & \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} dO\left(t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{t} O\left(t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \Big|_1^{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} O\left(t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) d\frac{1}{t} \end{aligned} \tag{3.14}$$

下面依次估计上面两式，对第一个式子

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t} O\left(t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \Big|_1^{\sqrt{x}} \right| = \left| O\left(\exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \Big|_1^{\sqrt{x}} \right| \\ &= \left| O\left(\exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \Big|_{t=\sqrt{x}} - O\left(\exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \Big|_{t=1} \right| \\ &\leq \left| O\left(\exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \Big|_{t=\sqrt{x}} \right| + \left| O\left(\exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \Big|_{t=1} \right| \\ &\leq M \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right) \Big|_{t=\sqrt{x}} + M \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right) \Big|_{t=1} \\ &= M \exp\left(-c_1\sqrt{\frac{1}{2}\log x} + c_2\sqrt[6]{\frac{1}{2}\log x}\right) + M \\ &= O(1) \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 M 为引理 2.1 余项的隐含常数。

对第二个式子

$$\begin{aligned} \left| \int_1^{\sqrt{x}} O\left(t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) d\frac{1}{t} \right| &= \left| \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^2} O\left(t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) dt \right| \\ &\leq \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^2} M t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right) dt \\ &= M \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right) dt \end{aligned} \tag{3.16}$$

为了估计上式，需要对积分内的函数 $\exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)$ 进行放缩，取函数 $\frac{1}{\log 2t}$ ，易见

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)}{\frac{1}{\log 2t}} = 0$$

故存在常数 $M' > 0$ ，使得对 $t \geq 1$ ，均有

$$\exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right) \leq M' \frac{1}{\log 2t}$$

故

$$\begin{aligned} M \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right) dt &\leq M \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} M' \frac{1}{\log 2t} dt = MM' \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{2t \log 2t} d2t \\ &= MM' \left(\log \log 2\sqrt{x} - \log \log 2\right) \\ &= O\left(\log_2 2\sqrt{x}\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

由(3.14)~(3.17)式与引理 2.3, 有

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{x}\right)} \frac{\mu(d)}{d} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} dO\left(t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \right| \\
 & \leq \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{x}\right)} \frac{1}{d} \left| \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} dO\left(t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \right| \\
 & = \left| \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t} dO\left(t \exp\left(-c_1\sqrt{\log t} + c_2\sqrt[6]{\log t}\right)\right) \right| \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x} + \gamma + O\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \right) \\
 & = \left(O(1) + O(\log_2 2\sqrt{x})\right) O(\sqrt{\log x}) = O(\sqrt{\log x} \log_2 2\sqrt{x})
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

以上, 由(3.6) (3.7) (3.13) (3.18)式, 我们已经计算完了(3.5)式的主项部分, 下面, 我们将计算(3.5)式的余项部分

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d)}} 1 \cdot O\left(\frac{x}{\phi(m)} \exp\left(-c_1\sqrt{\log \frac{x}{\phi(m)}} + c_2\sqrt[6]{\log \frac{x}{\phi(m)}}\right)\right) \right| \\
 & \leq \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d)}} 1 \cdot M \frac{x}{\phi(m)} \exp\left(-c_1\sqrt{\log \frac{x}{\phi(m)}} + c_2\sqrt[6]{\log \frac{x}{\phi(m)}}\right) \\
 & = \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 \cdot M \frac{x}{k} \exp\left(-c_1\sqrt{\log \frac{x}{k}} + c_2\sqrt[6]{\log \frac{x}{k}}\right)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

为了对上式进行估计, 我们需要对函数 $\exp\left(-c_1\sqrt{\log \frac{x}{k}} + c_2\sqrt[6]{\log \frac{x}{k}}\right)$ 进行放缩, 为此, 首先需要研究函数的增减性。令

$$t = \sqrt[6]{\log \frac{x}{k}}$$

则

$$-c_1\sqrt{\log \frac{x}{k}} + c_2\sqrt[6]{\log \frac{x}{k}} = -c_1t^3 + c_2t = f(t)$$

对 $f(t)$ 求导, $f'(t) = -3c_1t^2 + c_2 = 0$, $t = \pm\sqrt{\frac{c_2}{3c_1}}$, 由于 $t > 0$, 故 $f(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上有一个最大值

$f\left(\sqrt{\frac{c_2}{3c_1}}\right)$, 并先单调递增到此最大值后单调递减。由于 $1 \leq k \leq \sqrt{x}$, 故

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2} \log x} \leq t \leq \sqrt[6]{\log x}$$

当 x 充分大时, 也即存在正数 N , 当 $x > N$ 时, 有

$$\sqrt[6]{\frac{c_2}{3c_1}} \leq \sqrt[6]{\frac{1}{2} \log x} \leq t = \sqrt[6]{\log \frac{x}{k}} \leq \sqrt[6]{\log x}$$

此时 $f(t)$ 全部位于单调递减范围内, 有

$$f\left(\sqrt[6]{\log x}\right) \leq f(t) \leq f\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2} \log x}\right)$$

进一步地, 有

$$\exp(f(t)) = \exp\left(-c_1 \sqrt{\log \frac{x}{k}} + c_2 \sqrt[6]{\log \frac{x}{k}}\right) \leq \exp\left(-c_1 \sqrt{\frac{1}{2} \log x} + c_2 \sqrt[6]{\frac{1}{2} \log x}\right)$$

所以, 当 x 充分大, 即 $x > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}-c}{2} \sqrt{\log x}\right)} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 \cdot M \frac{x}{k} \exp\left(-c_1 \sqrt{\log \frac{x}{k}} + c_2 \sqrt[6]{\log \frac{x}{k}}\right) \\ & \leq x \exp\left(-c_1 \sqrt{\frac{1}{2} \log x} + c_2 \sqrt[6]{\frac{1}{2} \log x}\right) \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}-c}{2} \sqrt{\log x}\right)} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 \end{aligned} \tag{3.20}$$

注意到

$$\sum_{k \leq \sqrt{x}} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 = \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} \frac{1}{\phi(m)} = \sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d)}} \frac{1}{\phi(m)} \tag{3.21}$$

当 $m=1$ 时, 只有在 $d=1$ 时才满足求和所要求的条件并被计算, 此时

$$\sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d) \\ m=1 \\ d=1}} \frac{1}{\phi(m)} = 1 \tag{3.22}$$

而当 $m \geq 2$ 时, 由引理 2.4, 有

$$\sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d) \\ m \geq 2}} \frac{1}{\phi(m)} \leq \sum_{\substack{c' \frac{m}{\log m} \leq \sqrt{x} \\ m=0(d) \\ m \geq 2}} \frac{1}{\phi(m)} = \sum_{\substack{m \leq \frac{\sqrt{x}}{\log m} \\ m=0(d) \\ m \geq 2}} \frac{1}{\phi(m)} = \sum_{\substack{m \leq \frac{\sqrt{x}}{c' \log m} \\ m=0(d) \\ m \geq 2}} \frac{1}{\phi(m)} \tag{3.23}$$

注意到当 $m \geq 2$ 时, 有 $\frac{m}{\log m} > \sqrt{m}$, 故有 $\sqrt{m} < \frac{m}{\log m} \leq \frac{\sqrt{x}}{c'}$, 即 $m < \frac{x}{c'^2}$, 带入上式

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \leq \frac{\sqrt{x}}{c' \log m} \\ m=0(d) \\ m \geq 2}} \frac{1}{\phi(m)} & \leq \sum_{\substack{m \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2} \\ m=0(d) \\ m \geq 2}} \frac{1}{\phi(m)} \leq \sum_{\substack{m \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2} \\ m=0(d) \\ m \geq 2}} \frac{\log m}{c'm} = \sum_{\substack{dl \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2} \\ dl=m \geq 2}} \frac{\log(dl)}{c'dl} \\ & = \frac{1}{c'd} \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'd} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{\log(dl)}{l} \leq \frac{1}{c'd} \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{\log(dl)}{l} \end{aligned} \tag{3.24}$$

这里需要指出的是, 当 $m = dl = 1$ 时, 后面求和中的 $\log(dl) = 0$, 故在上式最后两个式子中, 可以去

掉 $dl \geq 2$ 的限制。

带入 $d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)$, 并利用引理 2.3、2.5, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{c'd} \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{\log(dl)}{l} &\leq \frac{1}{c'd} \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{\log\left(\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)\right)l}{l} \\ &= \frac{1}{c'd} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x} \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{1}{l} + \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{\log l}{l} \right) \\ &= \frac{1}{c'd} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x} O\left(\log\left(\frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{2} \log^2\left(\frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}\right)\right) \right) \\ &= \frac{1}{c'd} \left(O(\sqrt{\log x} \log x) + O(\log^2 x) \right) = \frac{1}{c'd} O(\log^2 x) \end{aligned} \tag{3.25}$$

由(3.20)~(3.25)式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 &= 1 + O(\log^2 x) \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{1}{c'd} \\ &= O(\log^2 x) \frac{1}{c'} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x} + \gamma + O\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \right) \\ &= O(\log^2 x \sqrt{\log x}) \end{aligned} \tag{3.26}$$

所以, 由(3.5) (3.19) (3.20) (3.26)式, 有

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d)}} 1 \cdot O\left(\frac{x}{\phi(m)} \exp\left(-c_1 \sqrt{\log \frac{x}{\phi(m)}} + c_2 \sqrt{\log \frac{x}{\phi(m)}}\right)\right) \right| \\ &\leq x \exp\left(-c_1 \sqrt{\frac{1}{2} \log x} + c_2 \sqrt{\frac{1}{2} \log x}\right) \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \frac{1}{k} \sum_{m=0(d)} 1 \\ &= O\left(x \exp\left(-c_1 \sqrt{\frac{1}{2} \log x} + c_2 \sqrt{\frac{1}{2} \log x}\right) \log^{\frac{5}{2}} x\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

3.1.2. d 大的部分

下面, 我们再对 $d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)$ 部分进行计算。易见

$$\sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d)}} \sum_{\substack{\phi(n) \leq \frac{x}{\phi(m)} \\ n=0(d)}} 1 = \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 \cdot \sum_{\substack{\phi(n) \leq \frac{x}{k} \\ n=0(d)}} 1 \tag{3.28}$$

下面对上式进行估计,

$$\left| \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(1d)}} \cdot \sum_{\substack{\phi(n) \leq \frac{x}{k} \\ n=0(d)}} 1 \right| \leq \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(1d)}} \cdot \sum_{\substack{\phi(n) \leq \frac{x}{k} \\ n=0(d)}} 1$$

由于此时 d 较大, 由 $n \equiv 0(d)$, 可知 $n \neq 1$, 故 $n \geq 2$, 故由引理 2.4, 此时满足 $\phi(n) \geq c' \frac{n}{\log n}$, 所以有

$$\sum_{\substack{\phi(n) \leq \frac{x}{k} \\ n=0(d)}} 1 \leq \sum_{\substack{c' \frac{n}{\log n} \leq \frac{x}{k} \\ n=0(d)}} 1 = \sum_{\substack{n \leq \frac{x \log n}{c'k} \\ n=0(d)}} 1$$

同时, 在 $n \geq 2$ 时, 由 $\sqrt{n} < \frac{n}{\log n} < \frac{x}{c'k}$, 有 $n \leq \frac{x^2}{c'^2 k^2}$, 故

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq \frac{x \log n}{c'k} \\ n=0(d)}} 1 &\leq \sum_{\substack{n \leq \frac{x \log \frac{x}{c'k}}{c'k} \\ n=0(d)}} 1 = \sum_{\substack{dl \leq \frac{x \log \frac{x}{c'k}}{c'k} \\ l \leq \frac{x \log \frac{x}{c'kd}}{c'k}}} 1 = \sum_{\substack{l \leq \frac{x \log \frac{x}{c'kd}}{c'k}}} 1 \\ &\leq \frac{2x}{c'kd} \log \frac{x}{c'd} \leq \frac{2x}{dc'k} \log \frac{x}{c'} \end{aligned} \tag{3.29}$$

故

$$\sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 \cdot \sum_{\substack{\phi(n) \leq \frac{x}{k} \\ n=0(d)}} 1 \leq \frac{2x}{c'd} \log \frac{x}{c'} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 \cdot \frac{1}{k} \tag{3.30}$$

由(3.21) (3.23) (3.24)式, 完全一致的计算, 并结合 $d \leq 2x$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 \cdot \frac{1}{k} &\leq \frac{1}{c'd} \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{\log(dl)}{l} \leq \frac{1}{c'd} \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{\log(2xl)}{l} \\ &= \frac{1}{c'd} \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \left(\frac{\log(2x)}{l} + \frac{\log l}{l} \right) \\ &= \frac{1}{c'd} \left(\log(2x) \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{1}{l} + \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2}} \frac{\log l}{l} \right) \\ &= \frac{1}{c'd} \left(\log(2x) O\left(\log \left(\frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2} \right) \right) + O\left(\frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{c'd} \left(O(\log^2 x) + O(\log^2 x) \right) = \frac{1}{c'd} O(\log^2 x) \end{aligned} \tag{3.31}$$

由(3.30) (3.31)式, 并结合(3.11)式, 有

$$\begin{aligned}
 \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{\phi(m)=k \\ m=0(d)}} 1 \cdot \sum_{\substack{\phi(n) \leq \frac{x}{k} \\ n=0(d)}} 1 &\leq \frac{2x}{c'^2} \log \frac{x}{c'} O(\log^2 x) \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{1}{d^2} \\
 &\leq \frac{2x}{c'} \log \frac{x}{c'} O(\log^2 x) \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \\
 &= O\left(\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

故 $d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)$ 的部分估计为

$$\sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ m=0(d)}} \sum_{\substack{\phi(n) \leq \frac{x}{\phi(m)} \\ n=0(d)}} 1 = O\left(\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \tag{3.33}$$

由(3.4) (3.13) (3.18) (3.27) (3.33)式，我们得到了第一部分的计算结果如下：

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n) \leq x \\ (m,n)=1}} 1 &= \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{2\zeta^2(6)} x \log x + O\left(\frac{x \log x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) + O\left(\sqrt{\log x} \log_2(2\sqrt{x})\right) \\
 &+ O\left(x \exp\left(-c_1\sqrt{\frac{1}{2}\log x} + c_2\sqrt[6]{\frac{1}{2}\log x}\right) \log^{\frac{5}{2}} x\right) + O\left(\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right)
 \end{aligned}$$

为了后续比较以确定余项，不妨将上述四个余项依次记为 O_1, O_2, O_3, O_4 。

为了最终确定余项形式，还需要明确 c 与 c_1 的大小关系，不妨做如下假定：

在引理 2.1 中，首先取 $\tilde{c} = \frac{1}{5}$ (这里先暂时用 \tilde{c} 来代替引理 3.1 叙述中的 c)，则存在正常数 c_1, c_2 ，

使得当 $q \leq \exp(\tilde{c}\sqrt{\log x}) = \exp\left(\frac{1}{5}\sqrt{\log x}\right)$ 时，有

$$\sum_{\substack{\phi(n) \leq x \\ n=(q)}} 1 = \frac{G(1)}{q} x + O\left(x \exp\left\{-c_1\sqrt{\log x} + c_2\sqrt[6]{\log x}\right\}\right)$$

取 c 为满足 $0 < c < \min\{\tilde{c}, c_1\}$ 的常数(任取)，则当 q 满足 $q \leq \exp(c\sqrt{\log x})$ 时，由于 $\exp(c\sqrt{\log x}) < \exp(\tilde{c}\sqrt{\log x})$ ，由上，对此时的 q 以及上述的正常数 c_1, c_2 ，自然也成立

$$\sum_{\substack{\phi(n) \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{q}}} 1 = \frac{G(1)}{q} x + O\left(x \exp\{-c_1 \sqrt{\log x} + c_2 \sqrt[6]{\log x}\}\right)$$

由此，我们找到了对 $q \leq \exp(c\sqrt{\log x})$ 使上式成立的正常数 c ，且满足 $c < c_1$ 。

下面进行余项比较，易见

$$\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{\log x}\right)} \gg \frac{x \log x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{\log x}\right)} \gg \sqrt{\log x} \log_2 x \gg \sqrt{\log x} \log_2(2\sqrt{x})$$

且有

$$x \exp\left(-c_1 \sqrt{\frac{1}{2} \log x} + c_2 \sqrt[6]{\frac{1}{2} \log x}\right) \log^{\frac{5}{2}} x \gg \sqrt{\log x} \log_2 x \gg \sqrt{\log x} \log_2(2\sqrt{x})$$

由于 $c < c_1$ ，有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{O_4}{O_3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{\log x}\right)}}{x \exp\left(-c_1 \sqrt{\frac{1}{2} \log x} + c_2 \sqrt[6]{\frac{1}{2} c \log x}\right) \log^{\frac{5}{2}} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^{\frac{1}{2}} x \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} (c_1 - c) \sqrt{\log x}\right)}{\exp\left(c_2 \sqrt[6]{\frac{1}{2} \log x}\right)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{O_1}{O_3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x \log x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{\log x}\right)}}{x \exp\left(-c_1 \sqrt{\frac{1}{2} \log x} + c_2 \sqrt[6]{\frac{1}{2} \log x}\right) \log^{\frac{5}{2}} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} (c_1 - c) \sqrt{\log x}\right)}{\log^{\frac{3}{2}} x \exp\left(c_2 \sqrt[6]{\frac{1}{2} \log x}\right)} = \infty$$

由上可知，当 $c < c_1$ 时

$$O_4 \gg O_1 \gg O_3 \gg O_2$$

故第一部分计算结果为

$$\sum_{\substack{\phi(m) \leq \sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n) \leq x \\ (m,n)=1}} 1 = \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{2\zeta^2(6)} x \log x + O\left(\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{\log x}\right)}\right) \tag{3.34}$$

3.2. 第二部分计算

类似于第一部分计算的处理，以 $\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{\log x}\right)$ 为界，分为 d 小与 d 大两部分

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x} \\ (m,n)=1}} 1 &= \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x}}} \sum_{d|(m,n)} \mu(d) = \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x}}} \sum_{\substack{d|m \\ d|n}} \mu(d) = \sum_{d\leq 2x} \mu(d) \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x} \\ d|m, d|n}} 1 \\
 &= \sum_{d\leq 2x} \mu(d) \left(\sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ d|m}} 1 \cdot \sum_{\substack{\phi(n)\leq\sqrt{x} \\ d|n}} 1 \right) = \sum_{d\leq 2x} \mu(d) \left(\sum_{\substack{\phi(n)\leq\sqrt{x} \\ n=0(d)}} 1 \right)^2 \\
 &= \left(\sum_{d\leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} + \sum_{d>\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} 1 \right) \mu(d) \left(\sum_{\substack{\phi(n)\leq\sqrt{x} \\ d|n}} 1 \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

3.2.1. d 小的部分

首先计算 d 小的部分

$$\begin{aligned}
 &\sum_{d\leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \left(\sum_{\substack{\phi(n)\leq\sqrt{x} \\ n=0(d)}} 1 \right)^2 \\
 &= \sum_{d\leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \left(\frac{G(1)}{d} \sqrt{x} + O\left(\sqrt{x} \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\log x} \right) \right) \right)^2 \\
 &= \sum_{d\leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \left(\frac{G^2(1)}{d^2} x + \frac{2G(1)}{d} \sqrt{x} O\left(\sqrt{x} \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\log x} \right) \right) \right) \\
 &\quad + O^2\left(\sqrt{x} \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\log x} \right) \right) \\
 &= \sum_{d\leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \frac{G^2(1)}{d^2} x \\
 &\quad + \sum_{d\leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) O\left(\frac{x}{d} \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\log x} \right) \right) \\
 &\quad + \sum_{d\leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) O\left(x \exp\left(-c_1 \sqrt{2} \sqrt{\log x} + c_2 \sqrt{2} \sqrt[4]{\log x} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

对于第一部分，由(3.13)式可知

$$\begin{aligned}
 \sum_{d\leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \frac{G^2(1)}{d^2} x &= G^2(1)x \sum_{d\leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d^2} \\
 &= G^2(1)x \left(\frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)}x + O\left(\frac{x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \tag{3.37}$$

对于第二部分， M 为引理 2.1 余项的隐含常数同上文，结合引理 2.3，有

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) O\left(\frac{x}{d} \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\log x}\right)\right) \right| \\ & \leq \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} M \frac{x}{d} \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\log x}\right) \\ & \leq Mx \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\log x}\right) \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{1}{d} \\ & = Mx \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\log x}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{\log x} + \gamma + O\left(\frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \right) \\ & = O\left(x \sqrt{\log x} \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt[4]{\log x}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

对于第三部分，由于 $c < c_1$ ，直接计算可得

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) O\left(x \exp\left(-c_1 \sqrt{2} \sqrt{\log x} + c_2 \sqrt{2} \sqrt[4]{\log x}\right)\right) \right| \\ & \leq \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} Mx \exp\left(-c_1 \sqrt{2} \sqrt{\log x} + c_2 \sqrt{2} \sqrt[4]{\log x}\right) \\ & \leq Mx \exp\left(-c_1 \sqrt{2} \sqrt{\log x} + c_2 \sqrt{2} \sqrt[4]{\log x}\right) \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right) \\ & = Mx \exp\left(-\left(\sqrt{2}c_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\sqrt{\log x} + c_2 \sqrt{2} \sqrt[4]{\log x}\right) \end{aligned} \tag{3.39}$$

由(3.36)~(3.39)式，有

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \left(\sum_{\substack{\phi(n) \leq \sqrt{x} \\ n=0(d)}} 1 \right)^2 \\
 &= \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)} x + O\left(\frac{x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \right) + O\left(x\sqrt{\log x} \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[6]{\log x}\right) \right) \quad (3.40) \\
 &+ O\left(x \exp\left(-\left(\sqrt{2}c_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}c\right)\sqrt{\log x} + c_2\sqrt{2}\sqrt[6]{\log x}\right) \right)
 \end{aligned}$$

令上述三个余项依次为 O_5 、 O_6 、 O_7 ，易见 $O_5 \ll O_6$ ，又因为 $c < c_1$ ，故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{O_5}{O_6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log x} \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(c_1 - c)\sqrt{\log x}\right)}{\exp\frac{\sqrt{2}}{2}c_2\sqrt[6]{\log x}} = \infty$$

故 $O_7 \ll O_6$ ，进而有

$$\sum_{d \leq \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \left(\sum_{\substack{\phi(n) \leq \sqrt{x} \\ n=0(d)}} 1 \right)^2 = \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)} x + O\left(x\sqrt{\log x} \exp\left(-c_1 \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\log x} + c_2 \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[6]{\log x}\right) \right) \quad (3.41)$$

3.2.2. d 大的部分

下面计算 d 大的部分，与 3.1 节中 d 大的部分分析一致，此时 $n \geq 2$ ， $\phi(n) \geq c' \frac{n}{\log n}$ ，由

$\sqrt{n} < \frac{n}{\log n} \leq \frac{\sqrt{x}}{c'}$ ，可以推出 $n \leq \frac{x}{c'^2}$ ，将上述分析带入计算，有

$$\sum_{\substack{\phi(n) \leq \sqrt{x} \\ n=0(d)}} 1 \leq \sum_{\substack{c' \frac{n}{\log n} \leq \sqrt{x} \\ n=0(d)}} 1 = \sum_{\substack{n \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log n \\ n=0(d)}} 1 \leq \sum_{\substack{n \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2} \\ n=0(d)}} 1 = \sum_{\substack{d \leq \frac{\sqrt{x}}{c'} \log \frac{x}{c'^2} \\ n=d}} 1 = \sum_{l \leq \frac{\sqrt{x}}{dc'} \log \frac{x}{c'^2}} 1 \leq \frac{\sqrt{x}}{dc'} \log \frac{x}{c'^2} \quad (3.42)$$

将上述结果带入 d 大的部分，计算可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \left(\sum_{\substack{\phi(n) \leq \sqrt{x} \\ n=0(d)}} 1 \right)^2 \leq \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \mu(d) \frac{x}{d^2 c'^2} \log^2 \frac{x}{c'^2} \\
 &= \frac{x}{c'^2} \log^2 \frac{x}{c'^2} \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{\mu(d)}{d^2} \leq \frac{x}{c'^2} \log^2 \frac{x}{c'^2} \sum_{d > \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \frac{1}{d^2} \quad (3.43) \\
 &\leq \frac{x}{c'^2} \log^2 \frac{x}{c'^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} = O\left(\frac{x \log^2 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)} \right)
 \end{aligned}$$

结合(3.41) (3.43)式, 有

$$\sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x} \\ (m,n)=1}} 1 = \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)}x + O\left(x\sqrt{\log x} \exp\left(-c_1\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\log x} + c_2\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\log x}\right)\right) + O\left(\frac{x \log^2 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right)$$

令上述两余项依次为 O_6 、 O_8 , 由 $c < c_1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{O_6}{O_8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c_2\sqrt{\log x}\right)}{\log^{\frac{3}{2}}x \exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(c_1 - c)\sqrt{\log x}\right)} = 0$$

故

$$\sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x} \\ (m,n)=1}} 1 = \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)}x + O\left(\frac{x \log^2 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \tag{3.44}$$

由(3.1) (3.34) (3.44), 有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1 &= 2 \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(m)\phi(n)\leq x \\ (m,n)=1}} 1 - \sum_{\substack{\phi(m)\leq\sqrt{x} \\ \phi(n)\leq\sqrt{x} \\ (m,n)=1}} 1 \\ &= \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)}x \log x + O\left(\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \\ &\quad - \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)}x - O\left(\frac{x \log^2 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \\ &= \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)}(x \log x - x) + O\left(\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{\log x}\right)}\right) \end{aligned} \tag{3.45}$$

到此, 我们最终证明了定理 1.1

4. 结论

本文计算了 m 、 n 互素时 $\phi(m,n)$ 的分布, 利用双曲求和法搭建框架将计算分为两个部分, 并充分利用数论函数的卷积法等解析数论方法, 结合冯彬引理 2.1 的结论, 得到了 m 、 n 互素时 $\phi(m,n)$ 分布的渐近表达

$$\sum_{\substack{(m,n) \\ (m,n)=1 \\ \phi(m)\phi(n)\leq x}} 1 = \frac{\zeta(2)\zeta^2(3)}{\zeta^2(6)}(x \log x - x) + O\left(\frac{x \log^3 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2} c \sqrt{\log x}\right)}\right)$$

本结论同时也是对 Bateman 关于 $\phi(n)$ 分布以及冯彬关于 $\phi(n)$ 在算术级数中分布等相关研究的推广, 为后续研究一般情形的 $\phi(m, n)$ 的分布提供了借鉴与启发, 为研究有限循环群直积自同构群的阶数等群论问题提供了新的视角。

参考文献

- [1] Sehgal, A., Sehgal, S. and Sharma, P.K. (2016) The Number of Automorphism of a Finite Abelian Group of Rank Two. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, **19**, 163-171. <https://doi.org/10.1080/09720529.2015.1103469>
- [2] 特伦鲍姆. 解析与概率数论导引[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 250, 257, 265.
- [3] 冯彬. Euler 函数值在算术级数中的分布(英文) [J]. 数学季刊(英文版), 2017, 32(2): 111-117.
- [4] Koukoulopoulos, D. (2019) *The Distribution of Prime Numbers*. American Mathematical Society.
- [5] 潘承洞. 数论基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [6] Hardy, G.H. and Wright, E.M. (1979) *An Introduction to the Theory of Numbers*. 5th Edition, Oxford University Press.
- [7] Apostol. 解析数论导引[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016.