

# 具有垂直耗散的不可压3D Boussinesq方程组的粘性消失极限问题

陈 婧

成都理工大学数学科学学院, 四川 成都

收稿日期: 2026年3月10日; 录用日期: 2026年4月11日; 发布日期: 2026年4月23日

## 摘 要

三维Boussinesq方程组在地球物理科学中占据核心地位。本文研究了半平面  $\mathbb{R}_+^3$  中具有垂直粘性耗散和Navier边界条件的三维不可压Boussinesq方程组的粘性消失极限问题。通过构造高阶近似解, 结合共形Sobolev空间中的线性稳定性分析和非线性项估计, 证明了当粘性系数  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 系统的解在  $L^2$  和  $L^\infty$  范数下收敛到理想三维Boussinesq系统的解, 收敛速度为  $O(\varepsilon)$ 。

## 关键词

3D Boussinesq方程组, Navier边界条件, 粘性消失极限

# The Vanishing Viscosity Limit Problem for the Incompressible 3D Boussinesq Equations with Vertical Dissipation

Jing Chen

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: March 10, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

## Abstract

The three-dimensional Boussinesq equations occupy a central position in geophysical science. In this paper, we investigate the vanishing viscosity limit problem for the three-dimensional incompressible Boussinesq equations with vertical viscous dissipation and Navier boundary conditions in the half-space  $\mathbb{R}_+^3$ . By constructing high-order approximate solutions and combining linear

stability analysis in conformal Sobolev spaces with nonlinear estimates, we prove that as the viscosity coefficient  $\varepsilon \rightarrow 0$  the solutions of the system converge to the solutions of the ideal three-dimensional Boussinesq system in both the  $L^2$  and  $L^\infty$  norms, with a convergence rate of  $O(\varepsilon)$ .

## Keywords

3D Boussinesq Equations, Navier Boundary Conditions, Vanishing Viscosity Limit

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

考虑时间  $t \geq 0$ ，空间坐标  $(x, y, z) = (h, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  上仅具有垂直粘性的不可压缩三维 Boussinesq 方程组：

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathbf{u}^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon - \varepsilon^2 \partial_z^2 \mathbf{u}^\varepsilon = \theta^\varepsilon \mathbf{e}_3, \\ \partial_t \theta^\varepsilon + \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla \theta^\varepsilon = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^\varepsilon = 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0} = \mathbf{u}_0^\varepsilon(h, z), \theta^\varepsilon|_{t=0} = \theta_0^\varepsilon(h, z), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon) = (u_h^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ ,  $p^\varepsilon, \theta^\varepsilon$  分别表示速度、压力和温度， $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  表示垂直方向上的单位向量， $\varepsilon^2$  表示运动粘度。

本文中，系统(1.1)的 Navier 型(滑移)边界条件由下式给出：

$$u_3^\varepsilon = 0, \quad \partial_z u_h^\varepsilon = 2\alpha u_h^\varepsilon \quad \text{on } z = 0, \quad (1.2)$$

其中系数  $\alpha \in \mathbb{R}$  描述流体和固体边界之间的相对滑移。

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ ，部分粘性系统(1.1)则退化为如下理想系统：

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \mathbf{u}^0 + \nabla p^0 = \theta^0 \mathbf{e}_3, \\ \partial_t \theta^0 + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \theta^0 = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^0 = 0, \\ \mathbf{u}^0|_{t=0} = \mathbf{u}_0^0(h, z), \theta^0|_{t=0} = \theta_0^0(h, z), \end{cases} \quad (1.3)$$

此时边界条件为：

$$u_3^0 = 0 \quad \text{on } z = 0. \quad (1.4)$$

我们注意到初始数据  $(\mathbf{u}_0^0, \theta_0^0)$  满足相容条件

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0^0 = 0, \quad \mathbf{u}_0^0 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} = (0, 0, -1).$$

Boussinesq 系统描述了浮力驱动流体的运动，其核心在于将 Navier-Stokes 方程与描述温度或密度演化的对流扩散方程相耦合，构成描述热对流现象的典型数学模型[1]。该方程组在物理上具有广泛的应用背景，能够刻画地球物理流动中的若干复杂过程，如海洋环流、大气运动及分层流动等([2]-[6])。

本文关注的 Boussinesq 系统与 Navier-Stokes 方程之间存在紧密联系。Navier-Stokes 方程的无粘极限问题是一个经典课题。在无界区域情形下, 已有丰富的研究结果([7]-[10]); 然而当区域具有物理边界时, 问题变得更为复杂。例如, Xiao 在文献[11]中研究了三维 Navier-Stokes 方程的无粘极限, Beirão da Veiga 则在文献[12] [13]中将其推广至  $W^{k,p}$  空间。针对带有 Navier 摩擦边界条件的不可压 Navier-Stokes 方程, Wang 与 Xin 等人在[14]中系统研究了其消失粘性极限行为。对于 Boussinesq 方程, Berselli 与 Spirito [15] 证明了在无热传导情形下, 具有 Slip 边界条件的粘性 Boussinesq 方程组的解收敛于无粘理想 Boussinesq 方程组的解。Zhang [16]则考虑速度场满足 Slip 边界条件、温度场满足 Neumann 边界条件的三维热传导 Boussinesq 方程组, 建立了强解的一致有界性, 并在此基础上证明了扩散消失极限, 获得了速度场与温度的收敛速率。

已有研究多针对全粘性或带热扩散的 Boussinesq 方程组, 主要采用能量方法结合紧性论证或构造辅助函数等建立粘性消失极限(参见[14]-[18])。本文则聚焦仅含垂直粘性的部分耗散系统, 在 Navier 滑移边界条件下, 通过边界层展开构造高阶近似解, 并结合共形 Sobolev 空间中的线性稳定性分析与非线性项的高阶估计, 获得收敛速率, 从而丰富了各向异性模型与边界层结构刻画的相关研究。

关于 Navier-Stokes 方程组及 Boussinesq 方程组的相关研究还可参见文献([17]-[21])及其参考文献。

需要指出的是, 本文的分析建立在理想不可压 Boussinesq 系统存在足够光滑解的前提之下。该假设保证了外层解在整个时间区间内具有良好的正则性, 从而使得边界层展开及误差估计具有严格的数学基础。在此基础上, 我们进一步研究具有垂直耗散的粘性系统在消失极限下的渐近行为。我们的主要结果如下:

**定理 1.1** 设  $(\mathbf{u}^0, \theta^0)$  是定义在  $[0, T]$  上(1.3)~(1.4)的解, 对于一些与  $\varepsilon$  无关且  $T_1 \leq T$  的  $T_1$ , 存在  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$  是定义在  $[0, T_1]$  上(1.1)~(1.2)的解, 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 有

$$\sup_{[0, T_1]} \left( \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)} + \|\theta^\varepsilon - \theta^0\|_{L^2(\mathbb{R}_+^3)} \right) \rightarrow 0, \quad (1.5)$$

$$\sup_{[0, T_1]} \left( \|\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^3)} + \|\theta^\varepsilon - \theta^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^3)} \right) \rightarrow 0, \quad (1.6)$$

且收敛速度为  $O(\varepsilon)$ 。

本文的组织结构如下。第 2 节使用边界层展开构造系统(1.1)的高阶近似解。第 3 节给出近似解的线性稳定性分析。第 4 节重点处理非线性项并推导  $L^\infty$  估计, 从而完成一致估计的闭合论证。

## 2. 边界层展开

构造如下形式的近似解

$$(\mathbf{u}_a, \theta_a, p_a) = \sum_{i=0}^K \varepsilon^i (\mathbf{u}^i, \theta^i, p^i)(t, h, z) + \sum_{i=0}^K \varepsilon^i (U^i, \Theta^i, P^i) \left( t, h, \frac{z}{\varepsilon} \right), \quad (2.1)$$

其中  $K$  是任意大的整数, 我们用  $(\mathbf{u}^i, \theta^i, p^i)(t, h, z)$  来近似外层, 用  $(U^i, \Theta^i, P^i) \left( t, h, \frac{z}{\varepsilon} \right)$  来表征内层行为。为简单起见, 我们用  $s = z/\varepsilon$  作为快速衰减变量, 假设  $s$  满足快速衰减特性

$$(U^i, \Theta^i, P^i)(t, h, s) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow +\infty. \quad (2.2)$$

为了使近似解满足 Navier 边界(1.2), 我们有

$$\begin{aligned} u_3^i(t, h, 0) + U_3^i(t, h, 0) &= 0, \quad i \geq 0, \\ \partial_s U_h^0(t, h, 0) &= 0, \\ \partial_z u_h^i(t, h, 0) + \partial_s U_h^{i+1}(t, h, 0) &= 2\alpha(u_h^i + U_h^{i+1})(t, h, 0), \quad i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

为了清楚起见，我们将  $\Gamma f$  表示为  $\Gamma f = f(t, h, 0)$ 。在内层，通过收集  $O(\varepsilon^{-1})$  项，可以得到：

$$\begin{aligned} (\Gamma u_3^0 + U_3^0) \partial_s U_h^0 &= 0, \\ (\Gamma u_3^0 + U_3^0) \partial_s U_3^0 + \partial_s P^0 &= 0, \\ \partial_s U_3^0 &= 0, \\ (\Gamma u_3^0 + U_3^0) \partial_s \Theta^0 &= 0, \end{aligned}$$

结合(2.2)和(2.3)，有  $U_3^0(t, h, s) = 0, P^0(t, h, s) = 0, \Gamma u_3^0 = 0$ 。

接着，收集  $O(1)$  项，可以得到：

$$\begin{aligned} &\partial_t (\Gamma u_h^0 + U_h^0) + (\Gamma u_h^0 + U_h^0) \nabla_h (\Gamma u_h^0 + U_h^0) \\ &\quad + (\Gamma u_3^1 + U_3^1 + s \Gamma \partial_z u_3^0) \partial_s (\Gamma u_h^0 + U_h^0) + \nabla_h (\Gamma P^0) - \partial_{ss} (\Gamma u_h^0 + U_h^0) = 0, \\ &\partial_t (\Gamma u_3^0 + U_3^0) + (\Gamma u_h^0 + U_h^0) \nabla_h (\Gamma u_3^0 + U_3^0) \\ &\quad + (\Gamma u_3^0 + U_3^0) \partial_s (\Gamma u_3^1 + U_3^1 + s \Gamma \partial_z u_3^0) + \Gamma \partial_z P^0 + \partial_s P^1 = \Gamma \theta^0 + \Theta^0, \\ &\partial_t (\Gamma \theta^0 + \Theta^0) + (\Gamma u_h^0 + U_h^0) \nabla_h (\Gamma \theta^0 + \Theta^0) + (\Gamma u_3^1 + U_3^1 + s \Gamma \partial_z u_3^0) \partial_s (\Gamma \theta^0 + \Theta^0) = 0, \\ &\nabla_h (\Gamma u_h^0 + U_h^0) + \partial_s (\Gamma u_3^1 + U_3^1 + s \Gamma \partial_z u_3^0) = 0, \end{aligned}$$

因此，我们得到一个平凡解  $U_h^0 = 0, \Theta^0 = 0$ 。

在外层，当  $i = 0$  时， $O(1)$  项满足无粘 Boussinesq 系统(1.3)。当  $i \geq 1$  时，我们收集  $O(\varepsilon^i)$  项，有

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}^i + \mathbf{u}^i \cdot \nabla \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \mathbf{u}^i + \nabla p^i &= \theta^i \mathbf{e}_3 + \partial_z^2 \mathbf{u}^{i-2} + f_u^i, \\ \partial_t \theta^i + \mathbf{u}^i \cdot \nabla \theta^0 + \mathbf{u}^0 \cdot \nabla \theta^i &= f_\theta^i, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^i &= 0, \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{u}^{-1} = 0, f_u^i, f_\theta^i$  取决于  $\mathbf{u}^j, \theta^j, j \leq i - 1$ 。

在内层收集  $O(\varepsilon^i)$  项，有

$$\begin{aligned} &\partial_t (\Gamma u_h^i + U_h^i) + (\Gamma u_h^i + U_h^i) \nabla_h (\Gamma u_h^0 + U_h^0) + (\Gamma u_h^0 + U_h^0) \nabla_h (\Gamma u_h^i + U_h^i) \\ &\quad + (\Gamma u_3^{i+1} + U_3^{i+1} + s \Gamma \partial_z u_3^i) \partial_s (\Gamma u_h^0 + U_h^0) + \Gamma \nabla_h p^i + \nabla_h P^i = \partial_{ss} (\Gamma u_h^i + U_h^i) + F_{U_h}^i, \\ &\partial_t (\Gamma u_3^i + U_3^i) + (\Gamma u_h^0 + U_h^0) \nabla_h (\Gamma u_3^i + U_3^i) + \Gamma \partial_z p^i + \partial_z P^{i+1} \\ &\quad + (\Gamma u_3^1 + U_3^1 + s \Gamma \partial_z u_3^0) \partial_s (\Gamma u_3^i + U_3^i + s \Gamma \partial_z u_3^{i-1}) \\ &\quad + (\Gamma u_3^i + U_3^i + s \Gamma \partial_z u_3^{i-1}) \partial_s (\Gamma u_3^1 + U_3^1 + s \Gamma \partial_z u_3^0) = \partial_{ss} (\Gamma u_3^i + U_3^i) + \Theta^i + \Gamma \theta^i + F_{U_3}^i, \\ &\partial_t (\Gamma \theta^i + \Theta^i) + (\Gamma u_h^i + U_h^i) \nabla_h (\Gamma \theta^0 + \Theta^0) + (\Gamma u_h^0 + U_h^0) \nabla_h (\Gamma \theta^i + \Theta^i) \\ &\quad + (\Gamma u_3^1 + U_3^1 + s \Gamma \partial_z u_3^0) \partial_s (\Gamma \theta^i + \Theta^i + s \Gamma \partial_z \theta^{i-1}) \\ &\quad + (\Gamma u_3^i + U_3^i + s \Gamma \partial_z u_3^{i-1}) \partial_s (\Gamma \theta^1 + \Theta^1 + s \Gamma \partial_z \theta^0) = F_{\Theta}^i, \\ &(\Gamma u_3^{i+1} + U_3^{i+1} + s \Gamma \partial_z u_3^i) = - \int_0^s \nabla_h (\Gamma u_h^i + U_h^i)(t, h, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

其中  $F_{U_h}^i, F_{U_3}^i, F_{\Theta}^i$  取决于  $U^j, \Theta^j, \mathbf{u}^j, \theta^j, j \leq i - 1$ 。

综上，粘性系统(1.1)的近似解为

$$(\mathbf{u}^0, p^0, \theta^0)(t, h, z) + \varepsilon \left( (\mathbf{u}^1, p^1, \theta^1)(t, h, z) + (U^1, P^1, \Theta^1) \left( t, h, \frac{z}{\varepsilon} \right) \right) + \dots$$

关于边界层剖面方程的可解性与衰减性，可以通过将其视为一类沿法向变量的退化抛物型方程，通过能量方法或不动点定理，可以证明其局部可解性。由于方程中包含耗散项，解在法向变量上通常具有指数型或代数型衰减性质。类似结论可参见文献[14] [15]中关于 Navier-Stokes 及 Boussinesq 边界层问题的分析。

**定理 2.1** 令  $K \in \mathbb{N}_+$ ，对于任意初值  $(\mathbf{u}_0^0, \theta_0^0) \in H^s(\mathbb{R}_+^3), s > \frac{5}{2}$ ，满足边界  $y=0$  处的相容性条件，存在  $T > 0$  的粘性系统(1.1)的  $K$  阶光滑近似解  $(\mathbf{u}_0^0, \theta_0^0)$ ，使得

- (1)  $(\mathbf{u}_0^0, \theta_0^0) \in C^0([0, T], H^s(\mathbb{R}_+^3))$  是具有初值  $(\mathbf{u}_0^0, \theta_0^0)$  的无粘系统(1.3)的解；
- (2) 对所有  $1 \leq i \leq K$ ，有  $(\mathbf{u}^i, \theta^i) \in C^0([0, T], H^s(\mathbb{R}_+^3))$ ；
- (3) 对所有  $0 \leq i \leq K$ ，内层项  $(U^i, \Theta^i, P^i)$  至少是局部可解的，且最后一个变量满足快速衰减性质；
- (4) 考虑  $(\mathbf{u}^\varepsilon, \theta^\varepsilon, p^\varepsilon)$  为粘性系统(1.1)的一个解，并定义误差项为

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}_a, \theta = \theta^\varepsilon - \theta_a, p = p^\varepsilon - p_a,$$

其中  $\mathbf{u}_a$  自然满足  $\nabla \cdot \mathbf{u}_a = 0, \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n}|_{z=0} = 0, \mathbf{n} = (0, 0, -1)$ 。则  $(\mathbf{u}, \theta)$  满足方程组

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{u} + \mathbf{u}_a) + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \varepsilon^2 \partial_z^2 \mathbf{u} &= \theta \mathbf{e}_3 + \varepsilon^K R_u, \\ \partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla (\theta + \theta_a) + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \theta &= \varepsilon^K R_\theta, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_z u_h &= 2\alpha u_h, \quad u_3 = 0 \quad \text{on } z = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中  $R_u = (R_{u1}, R_{u2}, R_{u3}), R_\theta$  是满足以下条件的余项：

$$\sup_{[0, T]} \|\nabla^\beta R_{u, \theta}\| \leq C_a \varepsilon^{-\beta_3}, \quad \forall \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{N}^3, \tag{2.5}$$

$C_a > 0$  与  $\varepsilon$  无关。

### 3. 线性稳定性分析

我们首先考虑边界层近似解的线性稳定性，在半空间  $\Omega = \mathbb{R}_+^3$  中将方程组(2.4)线性化，得到：

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \varepsilon^2 \partial_y^2 \mathbf{u} &= \theta \mathbf{e}_3 + \varepsilon^K R_u, \\ \partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_a + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \theta &= \varepsilon^K R_\theta, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_z u_h &= 2\alpha u_h, \quad u_3 = 0 \quad \text{on } z = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中  $R_u, R_\theta$  是满足以下条件的余项：

$$\sup_{[0, T]} \|\nabla^\beta R_{u, \theta}\| \leq C_a \varepsilon^{-\beta_3}, \quad \forall \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{N}^3. \tag{3.2}$$

方程组(2.4)和方程组(3.1)的初始条件为  $\mathbf{u}|_{t=0} = \varepsilon^{K+1} \mathbf{u}_0, \theta|_{t=0} = \varepsilon^{K+1} \theta_0$ 。

为了处理半空间边界附近解的各向异性行为以及边界层结构所带来的法向奇异性，我们引入共形 Sobolev 空间，其核心思想是通过构造一个权函数  $\varphi(z) \sim z$  (当  $z \rightarrow 0$ ) 且  $\varphi(z) \rightarrow 1$  (当  $z \rightarrow +\infty$ )，从而在边界附近对法向导数进行加权控制。相比于标准 Sobolev 空间，共形 Sobolev 空间能够在保持切向方向正则性的同时，弱化法向导数的要求，使得 Hardy 不等式等可以自然应用于含权估计中。

设  $Z_1 = \partial_x, Z_2 = \partial_y, Z_3 = \varphi(z) \partial_z, Z^\beta = Z_1^{\beta_1} Z_2^{\beta_2} Z_3^{\beta_3}$ ，其中  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{N}^3$ ，光滑函数  $\varphi(z)$  满足  $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) > 0$ ，例如  $\varphi(z) = \frac{z}{z+1}$ ，共形 Sobolev 空间  $H_{co}^s$  由下式定义：

$$H_{co}^s = \left\{ u \in L^2_{x,y,z}(\mathbb{R}^3) : \|u\|_{H_{co}^s}^2 = \sum_{|\beta| \leq s} \|Z_1^{\beta_1} Z_2^{\beta_2} Z_3^{\beta_3} u\|_{L^2_{x,y,z}(\mathbb{R}^3)}^2 < \infty \right\} \quad (3.3)$$

进一步定义  $\|u\|_{k,\infty} = \sum_{|\beta| \leq k} \|Z^\beta u\|_{L^\infty}$ ，并记  $W_{co}^{k,\infty} = \{u : \|u\|_{k,\infty} < \infty\}$ 。

**定理 3.1** 设  $K \in \mathbb{N}_+, K > m$ ， $(u_a, p_a, \theta_a)$  是由定理 2.1 给出的  $K$  阶近似解。对于每个  $\varepsilon \in (0, 1)$ ，存在  $T_0 > 0$ ，使得定义在  $[0, T_0]$  上的系统(3.1)~(3.2)的解满足以下估计：

$$\|(u, \theta)\|_{H_{co}^m} + \|\partial_z(u, \theta)\|_{H_{co}^{m-1}} \lesssim \varepsilon^{K-m}. \quad (3.4)$$

进而有

$$\|(u, \theta)\|_{L^\infty} \lesssim \varepsilon^{K-1}. \quad (3.5)$$

**证明：**首先，将方程组(3.1)中的速度和温度方程分别乘以  $u$  和  $\theta$ ，并在区域  $\Omega$  上积分，将所得两式相加，结合分部积分法可得：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u^2 + \theta^2) + \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\partial_z u|^2 + 2\alpha \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} u_h^2 \\ &= - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla u_a \cdot u + u \cdot \nabla \theta_a \cdot \theta) + \int_{\Omega} u \cdot \theta e_3 + \varepsilon^K \int_{\Omega} (R_u u + R_\theta \theta), \end{aligned}$$

利用迹定理、Cauchy 不等式、Young 不等式和 Gronwall 不等式，可得：

$$\|(u, \theta)(t, h, z)\|_{L^2}^2 + c_0 \varepsilon^2 \int_0^t \|\partial_z u(\tau, h, z)\|_{L^2}^2 d\tau \lesssim \varepsilon^{2K}. \quad (3.6)$$

其次，将  $Z^\beta, |\beta| \leq m$  分别作用于方程组(3.1)中的速度和温度方程，可以得到：

$$\begin{aligned} & \partial_t Z^\beta u + u \cdot \nabla Z^\beta u_a + u_a \cdot \nabla Z^\beta u + \nabla Z^\beta p - \varepsilon^2 \partial_z^2 Z^\beta u = Z^\beta \theta e_3 + C_u + \varepsilon^K Z^\beta R_u, \\ & \partial_t Z^\beta \theta + u \cdot \nabla Z^\beta \theta_a + u_a \cdot \nabla Z^\beta \theta = C_\theta + \varepsilon^K Z^\beta R_\theta, \\ & C_u = -[Z^\beta, u \cdot \nabla] u_a - [Z^\beta, u_a \cdot \nabla] u - [Z^\beta, \nabla] p + \varepsilon^2 [Z^\beta, \partial_z^2] u = C_1 + C_2 + C_3 + C_4, \\ & C_\theta = -[Z^\beta, u \cdot \nabla] \theta_a - [Z^\beta, u_a \cdot \nabla] \theta = C_5 + C_6. \end{aligned}$$

将上述所得方程再分别乘以  $Z^\beta u, Z^\beta \theta$ ，并在区域  $\Omega$  上积分，将所得两式相加，结合分部积分法可得：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|Z^\beta u|^2 + |Z^\beta \theta|^2) + \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\partial_z Z^\beta u|^2 + \varepsilon^2 \int_{\partial\Omega} \partial_z Z^\beta u_h Z^\beta u_h \\ &= - \int_{\Omega} (u \cdot \nabla Z^\beta u_a Z^\beta u + u \cdot \nabla Z^\beta \theta_a Z^\beta \theta) - \int_{\Omega} \nabla Z^\beta p Z^\beta u + \int_{\Omega} Z^\beta \theta e_3 Z^\beta u \\ & \quad + \int_{\Omega} C_u Z^\beta u + \int_{\Omega} C_\theta Z^\beta \theta + \varepsilon^K \int_{\Omega} (Z^\beta R_u Z^\beta u + Z^\beta R_\theta Z^\beta \theta) = \sum_{i=1}^6 I_i. \end{aligned}$$

结合边界条件和迹定理，有

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \partial_z Z^\beta u_h Z^\beta u_h &= \int_{\partial\Omega} Z^\beta \partial_z u_h Z^\beta u_h + \int_{\partial\Omega} [\partial_z, Z^\beta] u_h Z^\beta u_h \\ &= 2\alpha \int_{\partial\Omega} |Z^\beta u_h|^2 \leq C |\alpha| \|\partial_z u_h\|_{H_{co}^m} \|u_h\|_{H_{co}^m}. \end{aligned}$$

我们需要估计上述等式右边的六项。

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla Z^{\beta} \mathbf{u}_a Z^{\beta} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla Z^{\beta} \theta_a Z^{\beta} \theta), \\
 |I_1| &\lesssim \|\nabla Z^{\beta} \mathbf{u}_a\|_{L^{\infty}} \int_{\Omega} \mathbf{u} Z^{\beta} \mathbf{u} + \|\nabla Z^{\beta} \theta_a\|_{L^{\infty}} \int_{\Omega} \mathbf{u} Z^{\beta} \theta \lesssim \|(\mathbf{u}, \theta)\|_{H_{co}^m}^2, \\
 I_2 &= -\int_{\Omega} \nabla Z^{\beta} p Z^{\beta} \mathbf{u} = \int_{\Omega} Z^{\beta} p \nabla \cdot Z^{\beta} \mathbf{u} - \int_{\partial\Omega} Z^{\beta} p Z^{\beta} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) = \int_{\Omega} Z^{\beta} p \nabla \cdot Z^{\beta} \mathbf{u}, \\
 |I_2| &\lesssim \int_{\Omega} |Z^{\beta-1} \partial_x p| |Z^{\beta-1} \nabla_h \mathbf{u}_h| \lesssim \|\nabla p\|_{H_{co}^{m-1}} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}, \\
 |I_3| &= \int_{\Omega} |Z^{\beta} \theta \mathbf{e}_3 Z^{\beta} \mathbf{u}| \lesssim \int_{\Omega} |Z^{\beta} \theta|^2 + |Z^{\beta} \mathbf{u}|^2 \lesssim \|\theta\|_{H_{co}^m}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2, \\
 |I_6| &= \varepsilon^K \int_{\Omega} |Z^{\beta} R_u Z^{\beta} \mathbf{u} + Z^{\beta} R_{\theta} Z^{\beta} \theta| \lesssim \|\theta\|_{H_{co}^m}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 + \varepsilon^{2K-2m}.
 \end{aligned}$$

特别的，对于  $I_4$  的估计，需要依次估计  $C_1 - C_4$ . 将  $C_1 C_2$  改写为如下形式：

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -[Z^{\beta}, \mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u}_a = -(Z^{\beta} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_a) - \mathbf{u} \cdot \nabla Z^{\beta} \mathbf{u}_a) \\
 &= -\left( \sum_{\gamma+\zeta=\beta, \gamma \neq 0} c_{\gamma, \zeta}^1 Z^{\gamma} \mathbf{u} \cdot Z^{\zeta} \nabla \mathbf{u}_a + \mathbf{u} \cdot [Z^{\beta}, \nabla] \mathbf{u}_a \right), \\
 C_2 &= -[Z^{\beta}, \mathbf{u}_a \cdot \nabla] \mathbf{u} = -(Z^{\beta} (\mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u}) - \mathbf{u}_a \cdot \nabla Z^{\beta} \mathbf{u}) \\
 &= -\left( \sum_{\gamma+\zeta=\beta, \gamma \neq 0} c_{\gamma, \zeta}^2 Z^{\gamma} \mathbf{u}_a \cdot Z^{\zeta} \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}_a \cdot [Z^{\beta}, \nabla] \mathbf{u} \right),
 \end{aligned}$$

其中  $c_{\gamma, \zeta}^1, c_{\gamma, \zeta}^2$  是莱布尼兹展开产生的系数。

利用 Hardy 不等式，可得

$$\|\mathbf{u}_a \cdot [Z^{\beta}, \nabla] \mathbf{u}\|_{L^2} \lesssim \|u_{a3} \partial_z Z^{\beta-1} \mathbf{u}\|_{L^2} \lesssim \|u_{a3}\|_{W^{1,\infty}} \|Z^{|\beta|} \mathbf{u}\|_{L^2}$$

由于

$$\|Z^{\gamma} \mathbf{u} Z^{\zeta} \mathbf{v}\|_{L^2} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{L^{\infty}} \|\mathbf{v}\|_{H_{co}^m} + \|\mathbf{v}\|_{L^{\infty}} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}, |\gamma| + |\zeta| = m,$$

有

$$\int_{\Omega} C_1 Z^{\beta} \mathbf{u} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2, \int_{\Omega} C_2 Z^{\beta} \mathbf{u} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 + \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m-1}}^2.$$

显然有

$$\int_{\Omega} C_3 Z^{\beta} \mathbf{u} \lesssim \|Z^{|\beta|-1} \partial_z p\|_{L^2} \|Z^{\beta} \mathbf{u}\|_{L^2} \lesssim \|\nabla p\|_{H_{co}^{m-1}} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}.$$

对于  $C_4$  项，化简得  $C_4 = \varepsilon^2 [Z^{\beta}, \partial_z^2] \mathbf{u} = \varepsilon^2 (\partial_z (\beta_3 \varphi' Z^{\beta-1} \partial_z \mathbf{u}) + \beta_3 \varphi' Z^{\beta-1} \partial_z^2 \mathbf{u})$ ，通过分部积分得到：

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} C_4 Z^{\beta} \mathbf{u} &= -\varepsilon^2 \int_{\Omega} \partial_z (\beta_3 \varphi' Z^{\beta-1} \partial_z \mathbf{u}) \cdot Z^{\beta} \mathbf{u} - \varepsilon^2 \int_{\Omega} (\beta_3 \varphi' Z^{\beta-1} \partial_z^2 \mathbf{u}) \cdot Z^{\beta} \mathbf{u} \\
 &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} \beta_3 \varphi' Z^{\beta-1} \partial_z \mathbf{u} \cdot (\partial_z Z^{\beta} \mathbf{u}) - \varepsilon^2 \int_{\Omega} (\beta_3 \varphi' Z^{\beta-1} \partial_z^2 \mathbf{u}) \cdot Z^{\beta} \mathbf{u} \\
 &\lesssim \varepsilon^2 \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m-1}} \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^m}.
 \end{aligned}$$

综上，可得  $I_4$  的估计：

$$|I_4| \lesssim \varepsilon^2 \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m-1}} \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^m} + \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 + \|\nabla p\|_{H_{co}^{m-1}} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}.$$

同理可得  $I_5$  的估计： $|I_5| \lesssim \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|\theta\|_{H_{co}^m}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2$ 。

综合对所有  $I_i (1 \leq i \leq 6)$  的估计及 Young 不等式，可得：

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|(\mathbf{u}, \theta)\|_{H_{co}^m}^2 + c_0 \varepsilon^2 \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 \\ & \lesssim \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|\theta\|_{H_{co}^m}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 + \|\nabla p\|_{H_{co}^{m-1}} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m} + \varepsilon^{2K-2m}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

鉴于上述结果，我们还需给出  $\|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m-1}}$  的估计。利用散度为零，有  $\|\partial_z u_3\|_{H_{co}^{m-1}} = \|\nabla_h u_h\|_{H_{co}^{m-1}} \lesssim \|u_h\|_{H_{co}^m} \lesssim \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}$ ，还剩  $\|\partial_z u_h\|_{H_{co}^{m-1}}$  需要估计，回顾三维涡量  $\omega$  的定义

$$\omega = \text{curl } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_y u_3 - \partial_z u_2 \\ \partial_z u_1 - \partial_x u_3 \\ \partial_x u_2 - \partial_y u_1 \end{pmatrix},$$

定义适用于近似解的涡量  $\omega_a$ ，它由速度方程取旋度后导出，并满足以下方程：

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega_a + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \omega - \varepsilon^2 \partial_z^2 \omega = \omega \cdot \nabla \mathbf{u}_a + \omega_a \cdot \nabla \mathbf{u} + \text{curl} \theta e_3 + \varepsilon^K \text{curl} R_u. \tag{3.8}$$

我们定义新符号  $\eta = \omega_h - 2\alpha u_h^\perp, \eta_a = \omega_{ah} - 2\alpha u_{ah}^\perp$ ，满足  $\eta|_{\partial\Omega} = 0, \eta_a|_{\partial\Omega} = 0$ ，有

$$\|\partial_z u_h\|_{H_{co}^{m-1}} \lesssim \|\eta\|_{H_{co}^{m-1}} + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}.$$

将(3.8)改写为如下形式：

$$\partial_t \eta + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta_a + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \eta - \varepsilon^2 \partial_z^2 \eta = \omega \cdot \nabla u_{ah} + \omega_a \cdot \nabla u_h + 2\alpha \nabla_h^\perp p - \nabla_h^\perp \theta + \varepsilon^K \text{curl} R_u,$$

同时，取(3.1)中温度方程的正态导数，可以得到：

$$\begin{aligned} & \partial_t \partial_z \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \partial_z \theta_a + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \partial_z \theta = C' + \varepsilon^k \partial_z R_\theta, \\ & C' = -[\partial_z, \mathbf{u} \cdot \nabla] \theta_a - [\partial_z, \mathbf{u}_a \cdot \nabla] \theta. \end{aligned}$$

将上述新得到的  $\eta$  方程和温度方程分别乘以  $Z^\beta, |\beta| \leq m-1$ ，可以得到：

$$\begin{aligned} & \partial_t Z^\beta \eta + \mathbf{u} \cdot \nabla Z^\beta \eta_a + \mathbf{u}_a \cdot \nabla Z^\beta \eta - \varepsilon^2 \partial_z^2 Z^\beta \eta \\ & = \omega \cdot \nabla Z^\beta u_{ah} + \omega_a \cdot \nabla Z^\beta u_h + 2\alpha Z^\beta \nabla_h^\perp p - Z^\beta \nabla_h^\perp \theta + \varepsilon^k Z^\beta \text{curl} R_u + C_\eta, \\ & \partial_t Z^\beta \partial_z \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla Z^\beta \partial_z \theta_a + \mathbf{u}_a \cdot \nabla Z^\beta \partial_z \theta = C_{\partial_z \theta} + Z^\beta C' + \varepsilon^k Z^\beta \partial_z R_\theta, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} C_\eta &= -[Z^\beta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \eta_a - [Z^\beta, \mathbf{u}_a \cdot \nabla] \eta + [Z^\beta, \omega \cdot \nabla] u_{ah} + [Z^\beta, \omega_a \cdot \nabla] u_h + \varepsilon^2 [Z^\beta, \partial_z^2] \eta, \\ C_{\partial_z \theta} &= -[Z^\beta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \partial_z \theta_a - [Z^\beta, \mathbf{u}_a \cdot \nabla] \partial_z \theta. \end{aligned}$$

再将上述两式分别乘以  $Z^\beta \eta, Z^\beta \partial_z \theta$ ，并在区域  $\Omega$  上积分，将所得两式相加，结合分部积分法可得：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega (|Z^\beta \eta|^2 + |Z^\beta \partial_z \theta|^2) + \varepsilon^2 \int_\Omega |\partial_z Z^\beta \eta|^2 \\ & = -\int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla Z^\beta \eta_a Z^\beta \eta + \mathbf{u} \cdot \nabla Z^\beta \partial_z \theta_a Z^\beta \partial_z \theta) + \int_\Omega 2\alpha Z^\beta \nabla_h^\perp p Z^\beta \eta + \int_\Omega Z^\beta \nabla_h^\perp \theta Z^\beta \eta \\ & \quad + \int_\Omega C_\eta Z^\beta \eta + \int_\Omega C_{\partial_z \theta} Z^\beta \partial_z \theta + \varepsilon^k \int_\Omega (Z^\beta \text{curl} R_u Z^\beta \eta + Z^\beta \partial_z R_\theta Z^\beta \partial_z \theta) \\ & = \sum_{j=1}^6 J_j, \end{aligned}$$

利用 Cauchy 不等式、Hardy 不等式和 Young 不等式，依次估计  $J_1 \sim J_6$  项，可得：

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \|\eta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 \right) + c_0 \varepsilon^2 \|\partial_z \eta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 \\ & \lesssim \|\nabla p\|_{H_{co}^{m-1}} \|\eta\|_{H_{co}^{m-1}} + \|\eta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 + \|\theta\|_{H_{co}^m}^2 + \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \varepsilon^{2K-2m}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

最后, 给出压力估计. 通过对(3.1)中的速度方程取散度算子, 得到

$$\begin{aligned} \Delta p &= \nabla \cdot F, \\ F &= -(\mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_a) + \theta \mathbf{e}_3 + \varepsilon^K R_u. \end{aligned} \quad (3.10)$$

由系统(3.1)的边界条件及无散度条件, 可得

$$\begin{aligned} \partial_z p(h, 0) &= \varepsilon^2 \partial_z^2 u_3(h, 0) - \partial_t u_3(h, 0) + F_3(h, 0) \\ &= -\varepsilon^2 \partial_z \nabla_h u_h(h, 0) + F_3(h, 0) \\ &= -2\varepsilon^2 \alpha \nabla_h u_h(h, 0) + F_3(h, 0). \end{aligned}$$

令  $p = p_1 + p_2$ , 其中  $p_1$  和  $p_2$  分别满足

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= \nabla \cdot F, z > 0, \quad \partial_z p_1(h, 0) = F_3(h, 0), \\ \Delta p_2 &= 0, z > 0, \quad \partial_z p_2(h, 0) = -2\varepsilon^2 \alpha \nabla_h u_h(h, 0). \end{aligned}$$

根据半空间上椭圆边值问题的正则性理论:

**引理 3.2** 设  $F_i \in H^{m-1}(\mathbb{R}_+^3)$ , 考虑半空间上的 Poisson 问题

$$\Delta p_i = \nabla \cdot F_i, \quad \partial_z p_i|_{z=0} = g_i,$$

则存在解  $p_i \in H^m(\mathbb{R}_+^3)$ , 并满足

$$\|p_i\|_{H^m(\mathbb{R}_+^3)} \leq C \left( \|F_i\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}_+^3)} + \|g_i\|_{H^{m-3/2}(\mathbb{R}^2)} \right),$$

其中常数  $C$  仅依赖于  $m$ .

由此可得压力估计

$$\|\nabla p\|_{H_{co}^{m-1}} \lesssim (1 + \varepsilon^2) \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m} + \|(\mathbf{u}, \theta)\|_{H_{co}^{m-1}} + \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m-1}} + \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-2}} + \varepsilon^{K-m+1}. \quad (3.11)$$

联合估计式(3.6)、(3.7)、(3.9)、(3.11)以及 Gronwall 不等式可得(3.4), 利用各向异性 Sobolev 嵌入

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}^2 \lesssim \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m_0}} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^{m_0}} + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^{m_0}}^2.$$

可得(3.5), 定理 3.1 证明完毕。

#### 4. 非线性稳定性分析

本节致力于估计剩余非线性项, 当  $|\beta| \leq m$  时, 有  $[Z^\beta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u}, [Z^\beta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \theta$  两项, 将交换子改写为如下形式:

$$\sum_{\gamma+\zeta=\beta, \gamma \neq 0} c_{\gamma, \zeta} Z^\gamma \mathbf{u} \cdot Z^\zeta \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot [Z^\beta, \nabla] \mathbf{u}, \quad \sum_{\gamma+\zeta=\beta, \gamma \neq 0} d_{\gamma, \zeta} Z^\gamma \mathbf{u} \cdot Z^\zeta \nabla \theta + \mathbf{u} \cdot [Z^\beta, \nabla] \theta,$$

从而有

$$\begin{aligned} \|c_{\gamma, \zeta} Z^\gamma \mathbf{u} \cdot Z^\zeta \nabla \mathbf{u}\|_{L^2} &\lesssim \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \left( \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m} + \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m-1}} \right), \\ \|d_{\gamma, \zeta} Z^\gamma \mathbf{u} \cdot Z^\zeta \nabla \theta\|_{L^2} &\lesssim \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^\infty} \left( \|\theta\|_{H_{co}^m} + \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-1}} \right) + \|\nabla \theta\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}, \end{aligned}$$

利用 Hardy 不等式, 可得

$$\|\mathbf{u} \cdot [Z^\beta, \nabla] \mathbf{u}\|_{L^2} \lesssim \|u_3\|_{W^{1,\infty}} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}, \quad \|\mathbf{u} \cdot [Z^\beta, \nabla] \theta\|_{L^2} \lesssim \|u_3\|_{W^{1,\infty}} \|\theta\|_{H_{co}^m}.$$

对于非线性系统, 我们得到类似(3.7)的估计:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|(\mathbf{u}, \theta)\|_{H_{co}^m}^2 + c_0 \varepsilon^2 \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 \\ & \lesssim (1 + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}}) \left( \|(\mathbf{u}, \theta)\|_{H_{co}^m}^2 + \|\partial_z (\mathbf{u}, \theta)\|_{H_{co}^{m-1}}^2 \right) \\ & \quad + \|\nabla p\|_{H_{co}^{m-1}} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m} + \|\nabla \theta\|_{L^\infty} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 + \varepsilon^{2K-2m}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

当  $|\beta| \leq m-1$  时, 有  $[Z^\beta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \eta, [Z^\beta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \partial_z \theta$  两项, 以  $[Z^\beta, \mathbf{u} \cdot \nabla] \eta$  为例, 为了避免出现  $\|\partial_z \eta\|_{L^\infty}, \|\partial_z \eta\|_{H_{co}^m}$  这样增加计算量的项, 当  $\gamma + \zeta = \beta, \gamma \neq 0, |\beta| \leq m-1$ , 有

$$\begin{aligned} & \|\tilde{c}_{\gamma,\zeta} Z^\gamma \mathbf{u} \cdot Z^\zeta \nabla \eta\|_{L^2} \\ & \lesssim \|Z^\gamma u_h \cdot Z^\zeta \nabla_h \eta\|_{L^2} + \|Z^\gamma u_3 \cdot Z^\zeta \partial_z \eta\|_{L^2} \\ & \lesssim \|\nabla_h u_h\|_{L^\infty} \|\eta\|_{H_{co}^{m-1}} + \|\eta\|_{L^\infty} \|\nabla_h u_h\|_{H_{co}^{m-1}} + \left\| \frac{1}{\varphi(z)} Z^\gamma u_3 \cdot \varphi(z) Z^\zeta \partial_z \eta \right\|_{L^2} \\ & \lesssim (\|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}} + \|\mathbf{u}\|_{2,\infty} + \|Z\eta\|_{L^\infty}) (\|\eta\|_{H_{co}^{m-1}} + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}). \end{aligned}$$

同理可得

$$\|\tilde{d}_{\gamma,\zeta} Z^\gamma \mathbf{u} Z^\zeta \nabla \partial_z \theta\|_{L^2} \lesssim (\|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}} + \|\mathbf{u}\|_{2,\infty}) \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-1}} + \|\partial_z \theta\|_{1,\infty} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}.$$

结合 Hardy 不等式, 可得:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|\eta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-1}}^2) + c_0 \varepsilon^2 \|\partial_z \eta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 \\ & \lesssim \|\nabla p\|_{H_{co}^{m-1}} \|\eta\|_{H_{co}^{m-1}} + (1 + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}} + \|\mathbf{u}\|_{2,\infty} + \|Z\eta\|_{L^\infty}) (\|\eta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2) \\ & \quad + \|\partial_z \theta\|_{1,\infty} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 + (1 + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}} + \|\mathbf{u}\|_{2,\infty}) \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \varepsilon^{2K-2m}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

将  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  加入压力估计中的源项  $F$  中, 即可得到对应的估计:

$$\|\nabla p\|_{H_{co}^{m-1}} \lesssim (1 + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}}) (\|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m} + \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m-1}}) + \|\theta\|_{H_{co}^{m-1}} + \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-2}} + \varepsilon^{K-m+1}. \tag{4.3}$$

因此, 我们可以从(4.1)、(4.2)、(4.3)中推断出

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|(\mathbf{u}, \theta)\|_{H_{co}^m}^2 + \|\eta\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|\partial_z \theta\|_{H_{co}^{m-1}}^2) + c_0 \varepsilon^2 (\|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 + \|\partial_z \eta\|_{H_{co}^{m-1}}^2) \\ & \lesssim (1 + \|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}} + \|\mathbf{u}\|_{2,\infty} + \|Z\eta\|_{L^\infty}) (\|(\mathbf{u}, \theta)\|_{H_{co}^m}^2 + \|(\eta, \partial_z \theta)\|_{H_{co}^{m-1}}^2) \\ & \quad + (\|\nabla \theta\|_{L^\infty} + \|\partial_z \theta\|_{1,\infty}) \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^m}^2 + \varepsilon^{2K-2m}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

显然, 系数中仍存在  $L^\infty$  范数项有待估计. 在此之前, 我们首先定义  $N_m(t)$

$$N_m(t) = \|(\mathbf{u}, \theta)\|_{H_{co}^m}^2 + \|(\eta, \partial_z \theta)\|_{H_{co}^{m-1}}^2 + \|(\eta, \partial_z \theta)\|_{1,\infty}^2.$$

由于各向异性 Sobolev 嵌入, 定理 1.1 的证明可归结为以下命题, 为了闭合非线性估计, 边界层展开的最小临界阶次需满足  $K = 6$ 。

**命题 4.1** 设  $(\mathbf{u}, \theta)$  是定义在  $[0, T]$  上系统(2.4)的解, 对于  $m \geq 5, K > m$ , 有

$$N_m(t) \lesssim N_m(0) + (1+t) \int_0^t (N_m^2(s) + N_m(s)) ds + \varepsilon^{2K-2m}. \tag{4.5}$$

**引理 4.2** 当  $m_0 \geq 1, m_0 \in \mathbb{N}$ , 有

$$\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}^2 \lesssim \|\partial_z \mathbf{u}\|_{H_{co}^{m_0}} \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^{m_0}} + \|\mathbf{u}\|_{H_{co}^{m_0}}^2.$$

**引理 4.3** 当  $m_0 \geq 1, m \geq m_0 + 3$ , 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}} &\lesssim N_m^{1/2}(t), \|\mathbf{u}\|_{2,\infty} \lesssim N_m^{1/2}(t), \|\nabla \mathbf{u}\|_{1,\infty} \lesssim N_m^{1/2}(t), \\ \|\theta\|_{1,\infty} &\lesssim N_m^{1/2}(t), \|\theta\|_{2,\infty} \lesssim N_m^{1/2}(t). \end{aligned}$$

我们还需估计  $\|\eta\|_{1,\infty}, \|\partial_z \theta\|_{1,\infty}$ 。

**命题 4.4** 当  $m \geq 5$ , 有以下估计

$$\|\eta\|_{1,\infty}^2 \lesssim N_m(0) + (1+t) \int_0^t (N_m^2(s) + N_m(s)) ds + \varepsilon^{2K-4}. \tag{4.6}$$

**证明:** 考虑到  $\eta$  满足具有齐次 Dirichlet 边界条件的运输扩散方程, 因此可以通过该类方程的最大值原理建立  $\eta, Z_1\eta, Z_2\eta$  的  $L^\infty$  估计。给出  $\eta$  方程

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + (\mathbf{u}_a + \mathbf{u}) \cdot \nabla \eta - \varepsilon^2 \partial_z^2 \eta &= R, \\ R &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \eta_a + 2\alpha \nabla_h^\perp p + \nabla_h^\perp \theta + \varepsilon^k \operatorname{curl} R_u, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{L^\infty} &\lesssim \|\eta_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|R\|_{L^\infty}, \\ \|Z_1\eta\|_{L^\infty} &\lesssim \|\eta_0\|_{1,\infty} + \int_0^t \|Z_1 R\|_{L^\infty} + \int_0^t \|Z_1(\mathbf{u}_a + \mathbf{u}) \nabla \eta\|_{L^\infty}, \\ \|Z_2\eta\|_{L^\infty} &\lesssim \|\eta_0\|_{1,\infty} + \int_0^t \|Z_2 R\|_{L^\infty} + \int_0^t \|Z_2(\mathbf{u}_a + \mathbf{u}) \nabla \eta\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

对于  $Z_3\eta$ , 其相关估计则源于对近似方程算子的格林函数进行的精确估计。将  $\eta$  方程改写为以下形式

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + (\mathbf{u}_{ah}(t, h, 0) + \mathbf{u}_h(t, h, 0)) \nabla_h \eta + z \partial_z (\mathbf{u}_{a3}(t, h, 0) + \mathbf{u}_3(t, h, 0)) \partial_z \eta - \varepsilon^2 \partial_z^2 \eta &= R - G, \\ G &= [\mathbf{u}_{ah} + \mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{ah}(t, h, 0) - \mathbf{u}_h(t, h, 0)] \nabla_h \eta + [\mathbf{u}_{a3} + \mathbf{u}_3 - z \partial_z (\mathbf{u}_{a3}(t, h, 0) - \mathbf{u}_3(t, h, 0))] \partial_z \eta. \end{aligned}$$

该方程的解可通过其左侧算子的生成元  $S(t, \tau)$  结合 Duhamel 公式给出, 即对于任意  $t \geq \tau$ , 有  $\eta(t) = S(t, \tau)\eta_0 + \int_0^t S(t, \tau)(R - G)(\tau) d\tau$ , 其中  $S(t, \tau)$  是一个  $C^0$  演化算子, 结合

$$\|z \partial_z S(t, \tau)\eta_0\|_{L^\infty} \lesssim \|\eta_0\|_{L^\infty} + \|z \partial_z \eta_0\|_{L^\infty},$$

即得到  $\|Z_3\eta\|_{L^\infty}$  的估计

$$\|Z_3\eta\|_{L^\infty} \lesssim \|\eta_0\|_{1,\infty} + \int_0^t \|R - G\|_{1,\infty},$$

综上, 对  $R$  与  $R - G$  进行相应的估计, 结合 Cauchy-Schwarz 不等式即可得到(4.6)。命题 4.4 证明完

毕。

**命题 4.5** 当  $m \geq 5$ ，有以下估计

$$\|\partial_z \theta\|_{L^\infty}^2 \lesssim N_m(0) + (1+t) \int_0^t N_m(s) ds + \varepsilon^{2K-4}. \tag{4.7}$$

**证明：**将方程组(2.4)中的温度方程改写为

$$\partial_t \theta + (\mathbf{u} + \mathbf{u}_a) \cdot \nabla \theta = f(t, h, z) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \theta_a + \varepsilon^k R_\theta, \quad z > 0.$$

我们将问题转化为整个空间，定义  $\tilde{\theta}, \tilde{\theta}_a, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_a, \tilde{f}$ ：

$$\begin{aligned} (\tilde{\theta}, \tilde{\theta}_a, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_a) &= (\theta, \theta_a, \mathbf{u}, \mathbf{u}_a)(t, h, z), \quad z > 0; \\ (\tilde{\theta}, \tilde{\theta}_a, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_a) &= -(\theta, \theta_a, \mathbf{u}, \mathbf{u}_a)(t, h, -z), \quad z < 0; \end{aligned}$$

从而有

$$\partial_t \tilde{\theta} + (\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}_a) \cdot \nabla \tilde{\theta} = \tilde{f}, \quad \tilde{f} = -\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\theta}_a + \varepsilon^k \tilde{R}_\theta,$$

利用最大值原理，可得

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}\|_{L^\infty} &\lesssim \|\tilde{\theta}|_{t=0}\|_{L^\infty} + \int_0^t \|\tilde{f}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\ &\lesssim \varepsilon^{K+1} \|\theta_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|\mathbf{u} \cdot \nabla \theta_a(\tau) + \varepsilon^k R_\theta\|_{L^\infty} d\tau \\ &\lesssim N_m^{1/2}(0) + \int_0^t N_m^{1/2}(s) ds + \varepsilon^k. \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{\theta}\|_{L^\infty} &\lesssim \varepsilon^{K+1} \|\nabla \theta_0\|_{L^\infty} + \int_0^t (\|\mathbf{u}(\tau)\|_{L^\infty} + \|\nabla \mathbf{u}(\tau)\|_{L^\infty}) d\tau + \varepsilon^{K-1} \\ &\lesssim N_m^{1/2}(0) + \int_0^t N_m^{1/2}(s) ds + \varepsilon^{K-1}, \\ \|Z \partial_z \tilde{\theta}\|_{L^\infty} &\lesssim \varepsilon^{K+1} \|Z \partial_z \theta_0\|_{L^\infty} + \int_0^t (\|Z \partial_z \mathbf{u}(\tau)\|_{L^\infty} + \|\mathbf{u}(\tau)\|_{L^\infty} + \|\mathbf{u}(\tau)\|_{W^{1,\infty}}) d\tau + \varepsilon^{K-2} \\ &\lesssim N_m^{1/2}(0) + \int_0^t N_m^{1/2}(s) ds + \varepsilon^{K-2}. \end{aligned}$$

综上，结合引理 4.2 和 Cauchy-Schwarz 不等式即可得到(4.7)，命题 4.5 证明完毕。

因此，综合运用(4.4)、(4.6)、(4.7)以及标准的连续性论证，即可完成命题 4.1 的证明。

### 5. 结论与展望

本文研究了半空间中具有垂直耗散的三维不可压 Boussinesq 方程组在 Navier 滑移边界条件下的粘性消失极限问题。通过构造高阶近似解，结合共形 Sobolev 空间中的线性稳定性分析与非线性项的高阶估计，证明了当粘性系数趋于零时，系统的解收敛于理想 Boussinesq 系统的解，并获得了收敛速率。该结果在模型简化与边界层精细刻画上对现有理论形成了补充。

本文的分析依赖于 Navier 滑移边界条件的特殊结构以及理想系统光滑解的存在性假设，这在一定程度上限制了结果的适用范围。例如，在无滑移(Dirichlet)边界条件下，边界层的结构将更加复杂，相关问题仍有待进一步研究。此外，本文仅考虑了垂直方向的粘性耗散，而未涉及热扩散或更一般的各向异性耗散情形，这些因素的引入可能对解的渐近行为产生重要影响。未来的研究可以考虑在更一般的边界条件和耗散机制下，探讨粘性消失极限问题的稳定性与收敛性；同时，在较弱正则性框架中建立类似结果，以及推广至有界区域或更复杂几何区域的情形，也将是值得进一步深入研究的方

## 参考文献

- [1] Cushman-Roisin, B. and Beckers, J. (2011) Introduction to Geophysical Fluid Dynamics, International Geophysics Series. Elsevier.
- [2] Majda, A. (2003) Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean. American Mathematical Society.
- [3] Pedlosky, J. (1987) Geophysical Fluid Dynamics. Springer.
- [4] Bergé, P. and Dubois, M. (1984) Rayleigh-Bénard Convection. *Contemporary Physics*, **25**, 535-582. <https://doi.org/10.1080/00107518408210730>
- [5] Constantin, P. and Doering, C.R. (1996) Heat Transfer in Convective Turbulence. *Nonlinearity*, **9**, 1049-1060. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/9/4/013>
- [6] Majda, A.J. and Bertozzi, A.L. (2001) Vorticity and Incompressible Flow. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511613203>
- [7] Constantin, P. (1986) Note on Loss of Regularity for Solutions of the 3-D Incompressible Euler and Related Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **104**, 311-326. <https://doi.org/10.1007/bf01211598>
- [8] Ebin, D.G. and Marsden, J. (1970) Groups of Diffeomorphisms and the Motion of an Incompressible Fluid. *The Annals of Mathematics*, **92**, 102-163. <https://doi.org/10.2307/1970699>
- [9] Masmoudi, N. (2006) Remarks about the Inviscid Limit of the Navier-Stokes System. *Communications in Mathematical Physics*, **270**, 777-788. <https://doi.org/10.1007/s00220-006-0171-5>
- [10] Swann, H.S.G. (1971) The Convergence with Vanishing Viscosity of Nonstationary Navier-Stokes Flow to Ideal Flow in  $R_3$ . *Transactions of the American Mathematical Society*, **157**, 373-373. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1971-0277929-7>
- [11] Xiao, Y. and Xin, Z. (2007) On the Vanishing Viscosity Limit for the 3D Navier-Stokes Equations with a Slip Boundary Condition. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **60**, 1027-1055. <https://doi.org/10.1002/cpa.20187>
- [12] da Veiga, H.B. and Crispo, F. (2009) Sharp Inviscid Limit Results under Navier Type Boundary Conditions. An  $L^p$  Theory. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **12**, 397-411. <https://doi.org/10.1007/s00021-009-0295-4>
- [13] Beirão da Veiga, H. and Crispo, F. (2009) Concerning the  $W^{k,p}$ -Inviscid Limit for 3-D Flows under a Slip Boundary Condition. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **13**, 117-135. <https://doi.org/10.1007/s00021-009-0012-3>
- [14] Wang, X., Wang, Y. and Xin, Z. (2010) Boundary Layers in Incompressible Navier-Stokes Equations with Navier Boundary Conditions for the Vanishing Viscosity Limit. *Communications in Mathematical Sciences*, **8**, 965-998. <https://doi.org/10.4310/cms.2010.v8.n4.a10>
- [15] Berselli, L.C. and Spirito, S. (2011) On the Boussinesq System: Regularity Criteria and Singular Limits. *Methods and Applications of Analysis*, **18**, 391-416. <https://doi.org/10.4310/maa.2011.v18.n4.a3>
- [16] Zhang, Z. (2018) Vanishing Diffusivity Limit for the 3D Heat-Conductive Boussinesq Equations with a Slip Boundary Condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **460**, 47-57. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.11.045>
- [17] Acevedo, P., Amrouche, C. and Conca, C. (2018)  $L^p$  Theory for Boussinesq System with Dirichlet Boundary Conditions. *Applicable Analysis*, **98**, 272-294. <https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1530762>
- [18] Cai, X. and Zhou, Y. (2022) Global Existence of Strong Solutions for the Generalized Navier-Stokes Equations with Damping. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **38**, 627-634. <https://doi.org/10.1007/s10255-022-1106-4>
- [19] Masmoudi, N. and Rousset, F. (2016) Uniform Regularity and Vanishing Viscosity Limit for the Free Surface Navier-Stokes Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **223**, 301-417. <https://doi.org/10.1007/s00205-016-1036-5>
- [20] Bona, J.L. and Sachs, R.L. (1988) Global Existence of Smooth Solutions and Stability of Solitary Waves for a Generalized Boussinesq Equation. *Communications in Mathematical Physics*, **118**, 15-29. <https://doi.org/10.1007/bf01218475>
- [21] Hou, T.Y. and Li, C. (2005) Global Well-Posedness of the Viscous Boussinesq Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **13**, 1-12. <https://doi.org/10.3934/dcds.2005.12.1>