

指数除数函数在短区间上的Erdős-Kac型定理

郭智英

华北水利水电大学数学与统计学院, 河南 郑州

收稿日期: 2026年3月10日; 录用日期: 2026年4月16日; 发布日期: 2026年4月27日

摘要

设 $n > 1$ 为整数, 且 $n = \prod_{i=1}^l p_i^{\alpha_i}$, 令 $\tau_k^{(e)}(n) = \prod_{p_i^{\alpha_i} \parallel n} d_k(\alpha_i)$ 为指数除数函数, 其中 $d_k(n)$ 为 k 重除数函数。本文给出了短区间上权为 $\tau_k^{(e)}(n)$ 的Erdős-Kac型定理, 并得到短区间上 $\tau_k^{(e)}(n)$ 均值估计的渐近公式。

关键词

Erdős-Kac定理, 指数除数函数, Dirichlet级数

Erdős-Kac Type Theorem for Exponential Divisor Function in Short Intervals

Zhiying Guo

College of Mathematics and Statistics, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou Henan

Received: March 10, 2026; accepted: April 16, 2026; published: April 27, 2026

Abstract

Let $n > 1$ be an integer, $n = \prod_{i=1}^l p_i^{\alpha_i}$, and $\tau_k^{(e)}(n) = \prod_{p_i^{\alpha_i} \parallel n} d_k(\alpha_i)$ be the exponential divisor function, where $d_k(n)$ is the k -fold divisor function. In this paper, we establish an Erdős-Kac type theorem with weight $\tau_k^{(e)}(n)$ in short intervals, and we get an asymptotic formula for the average behavior of $\tau_k^{(e)}(n)$ in short intervals.

Keywords

Erdős-Kac Theorem, Exponential Divisor Function, Dirichlet Series

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

指数除数函数是数论中一个重要的研究对象。在 1972, Subbarao M V [1]给出了指数除数的定义: 设 $n > 1$ 为整数, 且 $n = \prod_{i=1}^t p_i^{\alpha_i}$, 若 $d = \prod_{i=1}^t p_i^{\beta_i}$, 满足 $\beta_i | \alpha_i, i = 1, 2, \dots, t$, 则称 d 为 n 的指数除数, 记为 $d |_{\epsilon} n$, 按照惯例 $1 |_{\epsilon} 1$ 。他也定义了指数除数函数 $\tau^{(e)}(n) = \sum_{d |_{\epsilon} n} 1$, 并对其均值进行了研究。Tóth [2]定义了更为一般的形式, 令 $\tau_k^{(e)}(n) = \prod_{p_i^{\alpha_i} || n} d_k(\alpha_i)$, 其中 $d_k(n)$ 为 k 重除数函数, $k \geq 2$ 为整数。当 $k=2$ 时, $\tau_k^{(e)}(n) = \tau^{(e)}(n)$ 。Tóth 得到了 $\tau_k^{(e)}(n)$ 的均值的渐近公式

$$\sum_{n \leq x} \tau_k^{(e)}(n) = C_k x + x^{\frac{1}{2}} Q_{k-2}(\log x) + O(x^{\omega_k + \epsilon})$$

其中 $Q_l(t)$ 为 t 的 l 次多项式, $\epsilon > 0$, 且

$$C_k = \prod_p \left(1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{d_k(a) - d_k(a-1)}{p^a} \right), \omega_k = \frac{2k-1}{4k+1}.$$

2013 年, 董玲玲和张德瑜[3]得到指数除数函数 $\tau_k^{(e)}(n)$ 的均值渐近公式, 设 $k \geq 2$ 为正整数, 当 $r \geq 1$ 时, 得到

$$\sum_{n \leq x} \left(\tau_k^{(e)}(n) \right)^r = A_{k,r} x + x^{\frac{1}{2}} Q_{k^r-2}(\log x) + O(x^{c(k,r)+\epsilon}),$$

这里

$$A_{k,r} = \prod_p \left(1 + \sum_{a=2}^{\infty} \frac{(d_k(a))^r - (d_k(a-1))^r}{p^a} \right), c(k,r) = \frac{1}{3 - \alpha_{k^r-1}},$$

其中 α_k 根据 k 的不同取值有上界, $Q_l(t)$ 为 t 的 l 次多项式, O 常数与 k, r 有关。

2015 年, Yang [4]给出了小区间上 $\tau_3^{(e)}(n)$ 的渐近公式, 如果 $x^{1/5+2\epsilon} < y \leq x$, 那么有

$$\sum_{x < n \leq x+y} \tau_3^{(e)}(n) = c_1 y + O(yx^{-\epsilon/2} + x^{1/5+3\epsilon/2}),$$

其中 $c_1 = \operatorname{Re} s_{s=1} F(s)$, 且 $F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_3^{(e)}(n)}{n^s}$ 。

令 $\omega(n)$ 表示 n 的不同素因子的个数, Erdős 和 Kac [5]在 1939 给出了 $\omega(n)$ 的概率分布。对于每一个 $\lambda \in \mathbb{R}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ \omega(n) - \log_2 x \leq \lambda (\log_2 x)^{1/2}}} 1 \rightarrow \Phi(\lambda),$$

其中 $\log_2 x := \log \log x$, $\Phi(\lambda)$ 是正态分布函数, $\Phi(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\tau^2/2} d\tau$.

近年来, 很多学者研究了不同加权型的 Erdős-Kac 定理. Elliott [6] 证明了权为 $d(n)^\alpha$ 的中心极限定理, 其中 $d(n)$ 为经典的除数函数. 而 Liu 和 Wu [7] 将 Elliott 的结果推广到短区间上, 证明了对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ 和任意的实数 λ , 当 $x \rightarrow \infty$ 和 $x^{7/12+\varepsilon} \leq y \leq x$ 时,

$$\frac{1}{D_\alpha(x, y)} \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ \omega(n) - 2^\alpha \log_2 x \leq \lambda (2^\alpha \log_2 x)^{1/2}}} d(n)^\alpha = \Phi(\lambda) + O_{\alpha, \varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} \right)$$

一致成立. 其中 $D_\alpha(x, y) := \sum_{x < n \leq x+y} d(n)^\alpha$, O 中隐含的常数仅依赖于 α 和 ε . 并且误差项的上界估计是最优的.

Tong [8] 在 Liu 和 Wu 研究结果的基础上进行推广, 证明了权为 $d_k(n)$ 的 Erdős-Kac 型定理, 其中 $d_k(n)$ 为 k 重除数函数.

Wang [9] 也对 Liu 和 Wu 的结果进行了推广, 研究了短区间上权为 $d(n^2)^\alpha$ 的 Erdős-Kac 型定理. 证明了对于 $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ 和任意的实数 λ , 有

$$\frac{1}{U_\alpha(x, y)} \sum_{\substack{x < g(n) \leq x+y \\ \omega(n) - 3^\alpha \eta \log_2 x \leq \lambda (3^\alpha \eta \log_2 x)^{1/2}}} d(n^2)^\alpha = \Phi(\lambda) + O \left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} \right)$$

对 $x \rightarrow \infty$ 和 $x^{19/24+\varepsilon} \leq y \leq x$ 一致成立, 其中 $U_\alpha(x, y) := \sum_{x < g(n) \leq x+y} d(n^2)^\alpha$, $g(n)$ 满足一定的性质, 公式中隐含的常数仅依赖于 α , γ , η , β 和 ε , 且误差项是最优的.

本文利用 Liu 和 Wu 的方法证明了权为指数除数函数型的 Erdős-Kac 定理.

2. 主要结果

定义

$$U_k(x, y) := \sum_{x < n \leq x+y} \tau_k^{(e)}(n),$$

本文得到了以下结果.

定理 1.1 设正整数 $k \geq 2$ 和 $\varepsilon > 0$. 那么对于每个实数 λ , 有

$$\frac{1}{U_k(x, y)} \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ \omega(n) - \log_2 x \leq \lambda (\log_2 x)^{1/2}}} \tau_k^{(e)}(n) = \Phi(\lambda) + O \left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} \right)$$

对 $x \rightarrow \infty$ 和 $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ 一致成立, 其中隐含常数仅依赖于 k 和 ε , 且误差项是最优的.

为了证明定理 1.1 中误差项是最优的, 需要建立一个在短区间上加权的 Landau 素数定理. 设 $k \geq 2$ 为正整数, $l \in \mathbb{N}$, 定义

$$U_{l,k}(x, y) := \sum_{\substack{x < g \leq x+y \\ \omega(g) = l}} \tau_k^{(e)}(n).$$

可以得到如下结果:

定理 1.2 对于正整数 $k \geq 2$, $B > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 有

$$U_{l,k}(x,y) = \frac{y}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{l-1}}{(l-1)!} \left\{ Y_k \left(\frac{l-1}{\log_2 x} \right) + O \left(\frac{\log_2 x}{l \log x} + \frac{l-1}{(\log_2 x)^2} \right) \right\},$$

$$Y_k(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right)^z \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{d_k(v)z}{p^v} \right).$$

对所有的 $x \geq 3$, $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$, $1 \leq l \leq B \log_2 x$ 一致成立, 其中 $|z| \leq B$, 这里隐含常数仅依赖于 k 和 ε .

记号:

\mathbb{N} 为自然数集, \mathbb{R} 为实数集, \mathbb{C} 为复数集; $\Gamma(z)$ 为伽马函数; $f(x) = O(g(x))$ 表示 $f(x) \ll g(x)$, 指存在常数 $c > 0$, 使得 $|f(x)| \leq cg(x)$; \prod_p 指对所有的素数 p 求积; $f(x) \sim g(x)$ 指

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1, \operatorname{Re}(s) \text{ 表示 } s \text{ 的实部, } \operatorname{Im}(s) \text{ 表示 } s \text{ 的虚部.}$$

3. 必要的引理

设 $f(n)$ 是一个算术函数, Dirichlet 级数 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$. 用实数 σ 和 t 表示复数 $s = \sigma + it$, 并且选择复对数的主值.

设 $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$, $\alpha > 0$, $\delta \geq 0$, $A \geq 0$, $B > 0$, $C > 0$, $M > 0$ 为常数. 如果 Dirichlet 级数 $F(s)$ 满足以下条件:

(1) 对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$|f(n)| \ll_{\varepsilon} Mn^{\varepsilon} \quad (n \geq 1),$$

(2) 对于 $\sigma > 1$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| n^{-\sigma} \leq M(\sigma-1)^{-\alpha},$$

(3) Dirichlet 级数

$$\mathcal{G}(s; z, w) := F(s) \zeta(s)^{-z} \zeta(2s)^{-w}$$

可以解析延拓到 $\sigma \geq \frac{1}{2}$ 上的全纯函数, 且 $\mathcal{G}(s; z, w)$ 在区域 $\sigma \geq \frac{1}{2}$ 内满足

$$|\mathcal{G}(s; z, w)| \leq M(|t|+1)^{\max\{\delta(1-\sigma), 0\}} \log^A(|t|+1)$$

对 $|z| \leq B$ 和 $|w| \leq C$ 一致成立, 则称 $F(s)$ 是 $\mathcal{P}(z, w, \alpha, \delta, A, B, C, M)$ 型的.

下面的引理是参考文献[10]的推论 1.2 的改进, 它在证明定理 1.1 中至关重要.

引理 2.1 [10] 假定 $F(s)$ 是 $\mathcal{P}(z, w, \alpha, \delta, A, B, C, M)$ 型的, 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{x < n \leq x+y} f(n) = y(\log x)^{z-1} \left\{ \lambda(z, w) + O \left(\frac{M}{\log x} \right) \right\}$$

对于 $x \geq 2$, $x^{(17+13\delta)/(30+13\delta)+\varepsilon} \leq y \leq x$, $|z| \leq B$ 和 $|w| \leq C$ 一致成立, 其中

$$\lambda(z, w) := \frac{\mathcal{G}(1; z, w) \zeta(2)^w}{\Gamma(z)},$$

在 O 中隐含的常数仅依赖于 A, B, α, δ 和 ε 。

证明：在文献[10]推论 1.2 的证明中用到 $\zeta(s)$ 的零点密度估计，由文献[11]可知最新的零点密度估计为

$$N(\sigma, T) \ll T^{30(1-\sigma)/13+o(1)},$$

其中 $N(\sigma, T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的零点 ρ 的个数， $\operatorname{Re}(\rho) \geq \sigma$ ， $1/2 \leq \sigma \leq 7/10$ ， $|\operatorname{Im}(\rho)| \leq T$ ， $T > 0$ ，因此可以将推论 1.2 中的 $\psi = \frac{12}{5}$ 替换为 $\psi = \frac{30}{13}$ ，即得到引理的结果。

为了证明定理 1.2，需要用到关于 $\tau_k^{(e)}(n)z^{\omega(n)}$ 的渐近公式。

引理 2.2 令 $B > 0$ 是一个常数， $|z| \leq B$ ，对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，有

$$\sum_{x < n \leq x+y} \tau_k^{(e)}(n)z^{\omega(n)} = y(\log x)^{z-1} \left\{ zY_k(z) + O_{B,\varepsilon} \left(\frac{1}{\log x} \right) \right\}$$

对于 $x \geq 2$ 和 $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ 一致成立，其中

$$Y_k(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right)^z \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{d_k(v)z}{p^v} \right).$$

特别地，当 $z=1$ 时，

$$U_k(x, y) = \sum_{x < n \leq x+y} \tau_k^{(e)}(n) = y \left\{ Y_k(1) + O_\varepsilon \left(\frac{1}{\log x} \right) \right\}$$

对 $x \geq 2$ 和 $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ 一致成立，其中

$$Y_k(1) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{d_k(v)}{p^v} \right).$$

证明：由于函数 $\tau_k^{(e)}(n)z^{\omega(n)}$ 是可乘函数，当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时，有

$$\begin{aligned} F_{k,z}(s) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\tau_k^{(e)}(n)z^{\omega(n)}}{n^s} \\ &= \prod_p \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{\tau_k^{(e)}(p^v)z^{\omega(p^v)}}{p^{vs}} \right) \\ &= \prod_p \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{d_k(v)z}{p^{vs}} \right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{z}{p^s} + \frac{kz}{p^{2s}} + \frac{kz}{p^{3s}} + \frac{\left(\frac{k(k+1)}{2} \right) z}{p^{4s}} + \cdots \right) \\ &= G(s; z, k) \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-z} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}} \right)^{\frac{2kz-z-z^2}{2}} \\ &= \zeta(s)^z \zeta(2s)^{\frac{2kz-z-z^2}{2}} G(s; z, k), \end{aligned}$$

其中 $|z| \leq B$, 欧拉乘积

$$G(s; z, k) := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{\frac{2kz - z - z^2}{2}} \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{d_k(v)z}{p^{vs}}\right)$$

可以得到 Dirichlet 级数

$$G(s; z, k) = \sum_{n \geq 1} b(n)n^{-s},$$

其中 $b(n)$ 是可乘函数, 其在 p^v 处的值由以下等式给出:

$$1 + \sum_{v \geq 1} b(p^v) \xi^v = \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{d_k(v)z}{\xi^{-v}}\right) (1 - \xi)^z (1 - \xi^2)^{\frac{2kz - z - z^2}{2}} \quad (|\xi| < 1).$$

特别地, 当 $v=1$ 和 $v=2$ 时, 对于所有素数 p , 有

$$b(p) = b(p^2) = 0 \quad (1)$$

并且有

$$|b(p^v)| \leq M_1(B) 2^{\frac{v}{6}} \quad (v \geq 3, |z| \leq B) \quad (2)$$

其中

$$M_1(B) := \max_{|z| \leq B} \max_{|\xi| \leq 2^{-1/6}} \left| \left(1 + \sum_{v \geq 1} d_k(v)z \xi^v\right) (1 - \xi)^z (1 - \xi^2)^{\frac{2kz - z - z^2}{2}} \right|.$$

对于 $\sigma > \frac{1}{3}$ 和 $|z| \leq B$, 由公式(1)和公式(2)可以推得

$$\begin{aligned} \sum_p \sum_{v \geq 1} |b(p^v)| p^{-v\sigma} &\leq M_1(B) \sum_p \sum_{v \geq 3} (2^{-1/6} p^\sigma)^{-v} \\ &= M_1(B) \sum_p \frac{(2^{-1/6} p^\sigma)^{-3}}{1 - (2^{-1/6} p^\sigma)^{-1}} \\ &\leq \frac{2^{1/2} M_1(B)}{1 - 2^{-1/6}} \sum_p \frac{1}{p^{3\sigma}}. \end{aligned}$$

那么 $G(s; z, k)$ 在 $\sigma > \frac{1}{3}$ 绝对收敛, 且

$$|G(s; z, k)| \leq M(B) \left(\sigma \geq \frac{1}{2}, |z| \leq B\right) \quad (3)$$

其中

$$M(B) := \exp\left(\frac{2^{1/2} M_1(B)}{1 - 2^{-1/6}} \sum_p \frac{1}{p^{3/2}}\right).$$

因此, 可以令引理 2.1 中的 $\alpha = |z|$, $\delta = 0$, $A = 0$, $M = M(B)$, 那么 $F_{k,z}(s)$ 是 $\mathcal{P}\left(z, \frac{2kz - z - z^2}{2}, |z|, 0, 0, B, \frac{2kB + B + B^2}{2}, M(B)\right)$ 型的。根据引理 2.1 可以得到引理 2.2 有关 $\tau_k(n^2)z^{\omega(n)}$ 的渐近公式。

下面的引理是 Berry-Esseen 不等式。

假定 $F(x)$ 是一个分布函数，且满足 $F(-\infty) = 0$ 和 $F(\infty) = 1$ 。定义 $F(x)$ 的特征函数为

$$f(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} dF(x).$$

引理 2.3 [12] 设分布函数 F 和 G 的特征函数分别为 f 和 g ，假定 G 是可微的并且 G' 在 \mathbb{R} 上有界。那么对于所有的 $T > 0$ ，有

$$\|F - G\|_{\infty} \leq 16 \frac{\|G'\|_{\infty}}{T} + 6 \int_{-T}^T \left| \frac{f(\tau) - g(\tau)}{\tau} \right| d\tau,$$

其中对于任意的实值函数 H ， $\|H\|_{\infty} := \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |H(\lambda)|$ 。

4. 定理 1.2 的证明

定义

$$U_{l,k}(x, y) := \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ \omega(n)=l}} \tau_k^{(e)}(n),$$

可得

$$\sum_{x < n \leq x+y} \tau_k^{(e)}(n) z^{\omega(n)} = \sum_{l=1}^{\infty} U_{l,k}(x, y) z^l.$$

由 Cauchy 公式可得

$$U_{l,k}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \left(\sum_{x < n \leq x+y} \tau_k^{(e)}(n) z^{\omega(n)} \right) \frac{dz}{z^{l+1}},$$

其中 $r = \frac{l}{\log_2 x}$ 。

由引理 2.2 得

$$\begin{aligned} U_{l,k}(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} y (\log x)^{z-1} \left(z Y_k(z) + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right) \frac{dz}{z^{l+1}} \\ &= \frac{y}{\log x} I_{l,k}(x, r) + O\left(\frac{y}{(\log x)^2} \Delta_{l,k}(x, r)\right) \end{aligned} \quad (4)$$

对 $x \geq 2$ 和 $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ ， $|z| \leq B$ 和 $l \leq B \log_2 x$ 一致成立，其中

$$I_{l,k}(x, r) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} (\log x)^z \frac{Y_k(z)}{z^l} dz,$$

$$\Delta_{l,k}(x, r) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} (\log x)^z \frac{dz}{z^{l+1}}.$$

对于 $\Delta_{l,k}(x, r)$ ，有以下估计

$$\begin{aligned}\Delta_{l,k}(x,r) &\ll \oint_{|z|=r} (\log x)^{\operatorname{Re} z} \frac{|dz|}{|z|^{l+1}} \\ &= \int_0^{2\pi} (\log x)^{r \cos \theta} \frac{d\theta}{r^l} \\ &\ll \left(\frac{\log_2 x}{l} \right)^l \left(\int_0^{\pi/2} e^{l \cos \theta} d\theta + 1 \right)\end{aligned}$$

令 $t = l(1 - \cos \theta)$, 由 Stirling 公式可得

$$\begin{aligned}\Delta_{l,k} &\ll \left(\frac{\log_2 x}{l} \right)^l \left(\frac{e^l}{\sqrt{l}} \int_0^l e^{-t} t^{-1/2} dt + 1 \right) \\ &\ll \frac{(\log_2 x)^l}{l!}.\end{aligned}\tag{5}$$

接下来分 $l=1$ 和 $l \geq 2$ 两种情况估计 $I_{l,k}(x,r)$ 。当 $l=1$ 时, 因为 $z \mapsto Y_k(z)$ 在 $|z| \leq B$ 时是解析的, 由 Cauchy 公式得

$$I_{1,k}(x,r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} (\log x)^z \frac{Y_k(z)}{z} dz = Y_k(0) = 1.$$

将上式代入公式(4), 得到

$$U_{1,k}(x,y) = \frac{y}{\log x} \left(1 + O_\varepsilon \left(\frac{\log_2 x}{\log x} \right) \right).\tag{6}$$

当 $l \geq 2$ 时, 因为 $z \mapsto Y_k(z)$ 在 $|z| \leq B$ 时是解析的, 由 Cauchy 公式得 $I_{l,k}(x,r) = I_{l,k}(x,r_0)$, 其中 $r_0 = \frac{l-1}{\log_2 x}$ 。 $Y_k(z)$ 在点 $z = r_0$ 处的 Taylor 展开是

$$Y_k(z) = Y_k(r_0) + Y_k'(r_0)(z-r_0) + (z-r_0)^2 \int_0^1 (1-t) Y_k''(r_0 + t(z-r_0)) dt.\tag{7}$$

因此将估计上式右边的三项对 $I_{l,k}(x,r_0)$ 的贡献。由 Cauchy 公式得第一项的贡献为

$$\frac{Y_k(r_0)}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} e^{z \log_2 x} \frac{dz}{z^l} = \frac{(\log_2 x)^{l-1}}{(l-1)!} Y_k \left(\frac{l-1}{\log_2 x} \right).\tag{8}$$

类似地, 第二项的贡献为

$$\begin{aligned}&\frac{Y_k'(r_0)}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} (\log x)^z \frac{(z-r_0)}{z^l} dz \\ &= \frac{Y_k'(r_0)}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} e^{z \log_2 x} \frac{(z-r_0)}{z^l} dz \\ &= Y_k'(r_0) \left(\frac{(\log_2 x)^{l-2}}{(l-2)!} - r_0 \frac{(\log_2 x)^{l-1}}{(l-1)!} \right) \\ &= 0\end{aligned}\tag{9}$$

当 $0 < t \leq 1$, $|z| = r_0$ 时, 有

$$|r_0 + t(z-r_0)| = |r_0(1-t) + tz| \leq r_0(1-t) + t|z| = r_0.$$

因为当 $|z| \leq B$ 时 $Y_k(z)$ 解析, 所以存在一个正常数 C_B 使得 $|Y_k''(z)| \leq C_B$, 故可得

$$\int_0^1 (1-t) Y_k''(r_0 + t(z-r_0)) dt \leq \int_0^1 (1-t) C_B dt = \frac{1}{2} C_B.$$

因此第三项对 $I_{l,k}(x, r_0)$ 的贡献为

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=r_0} (\log x)^{\operatorname{Re} z} \frac{|z-r_0|^2}{|z|^l} |dz| &\ll r_0^{-(l-3)} \int_0^{2\pi} e^{(l-1)\cos\theta} |e^{i\theta} - 1|^2 d\theta \\ &\ll r_0^{-(l-3)} \left(\int_0^{\pi/2} e^{(l-1)\cos\theta} (1-\cos\theta) d\theta + \pi \right) \\ &\ll r_0^{-(l-3)} e^{l-1} (l-1)^{-3/2} \left(\int_0^{l-1} e^{-t} t^{1/2} dt + \pi \right) \\ &\ll \frac{(\log_2 x)^{l-3}}{(l-2)!}, \end{aligned} \tag{10}$$

结合公式(5)和公式(8)~(10)代入到公式(4)得

$$U_{l,k}(x, y) = \frac{y}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{l-1}}{(l-1)!} \left\{ Y_k \left(\frac{l-1}{\log_2 x} \right) + O \left(\frac{\log_2 x}{l \log x} + \frac{l-1}{(\log_2 x)^2} \right) \right\}.$$

定理 1.2 得证。

5. 定理 1.1 的证明

定义

$$F_{x,y}(\lambda) := \frac{1}{U_k(x, y)} \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ \omega(n) - \log_2 x \leq \lambda \sqrt{\log_2 x}}} \tau_k^{(e)}(n).$$

令 $\varphi_{x,y}(\tau)$ 是 $F_{x,y}(\lambda)$ 的特征函数, 则有

$$\begin{aligned} \varphi_{x,y}(\tau) &:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF_{x,y}(\lambda) \\ &= \frac{1}{U_k(x, y)} \sum_{x < n \leq x+y} \tau_k^{(e)}(n) \exp \left\{ i\tau \frac{\omega(n) - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} \right\} \\ &= \frac{e^{-i\tau T}}{U_k(x, y)} \sum_{x < n \leq x+y} \tau_k^{(e)}(n) e^{i(\tau/T)\omega(n)}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $T = \sqrt{\log_2 x}$ 。

设 $(F, G) = (F_{x,y}, \Phi)$, 由引理 2.3 可得

$$\|F_{x,y} - \Phi\|_{\infty} \leq \frac{16}{\sqrt{2\pi}T} + 6 \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi_{x,y}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau.$$

下面只需要证明

$$\int_{-T}^T \left| \frac{\varphi_{x,y}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau \ll \frac{1}{T} \tag{12}$$

对 $x \geq 2$ 和 $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ 一致成立。

应用引理 2.2, 设 $z = e^{it}$, 则

$$\frac{1}{U_k(x, y)} \sum_{x < n \leq x+y} \tau_k^{(\varepsilon)}(n) e^{it\omega(n)} = (\log x)^{(e^{it}-1)} A(e^{it}) + O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

对 $t \in \mathbb{R}$, $x \geq 2$ 和 $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ 一致成立, 其中

$$A(z) := \frac{zY_k(z)}{Y_k(1)}$$

在 $|z| \leq B$ 是关于 z 的全纯函数, 并且 $A(1) = 1$, $Y_k(z)$ 和 $Y_k(1)$ 引用引理 2.2 的定义。令 $t = \tau/T$, 则

$$\varphi_{x,y}(\tau) = (\log x)^{(e^{i\tau/T}-1)} e^{-i\tau T} A(e^{i\tau/T}) + O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad (13)$$

对 $x \geq 2$, $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ 和 $|\tau| \leq T$ 一致成立。

因为当 $|t| \leq 1$ 时, $\cos t - 1 \leq -2(t/\pi)^2$, 所以有

$$\left| (\log x)^{(e^{i\tau/T}-1)} \right| = e^{(\cos(\tau/T)-1)T^2} \leq e^{-2(\tau/\pi)^2},$$

因此可以推得 $\varphi_{x,y}(\tau) \ll_\varepsilon e^{-2(\tau/\pi)^2}$ 对 $x \geq 2$, $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ 和 $|\tau| \leq T$ 一致成立。下面将分三种情况来证明公式(12)的成立。

当 $T^{1/3} \leq |\tau| \leq T$ 时, 有

$$\int_{\pm T^{1/3}}^{\pm T} \left| \frac{\varphi_{x,y}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau \ll \int_{T^{1/3}}^T e^{-2(\tau/\pi)^2} d\tau \ll \frac{1}{T}. \quad (14)$$

当 $(\log x)^{-1} < |\tau| \leq T^{1/3}$ 时, 由 Taylor 展开可得

$$A(e^{i\tau/T}) = 1 + O(|\tau|/T), e^{i\tau/T} - 1 = i\tau/T - \frac{1}{2}(\tau/T)^2 + O\left(\frac{|\tau|}{T}\right)^3,$$

故

$$\begin{aligned} (\log x)^{(e^{i\tau/T}-1)} A(e^{i\tau/T}) e^{-i\tau T} &= e^{-\tau^2/2 + O(\tau^3/T)} \left\{ 1 + O\left(\frac{|\tau|}{T}\right) \right\} \\ &= e^{-\tau^2/2} \left\{ 1 + O\left(\frac{|\tau| + |\tau|^3}{T}\right) \right\}. \end{aligned}$$

将上式代入到公式(13)中, 则

$$\varphi_{x,y}(\tau) = e^{-\tau^2/2} \left\{ 1 + O\left(\frac{|\tau| + |\tau|^3}{T}\right) \right\} + O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

对 $x \geq 2$, $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ 和 $(\log x)^{-1} < |\tau| \leq T^{1/3}$ 一致成立。由 $\varphi_{x,y}(\tau)$ 的估计可得

$$\begin{aligned}
\int_{\pm 1/\log x}^{\pm T^{1/3}} \left| \frac{\varphi_{x,y}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau &\ll \int_{1/\log x}^{T^{1/3}} \left(e^{-\tau^2/2} \frac{1+\tau^2}{T} + \frac{1}{\tau \log x} \right) d\tau \\
&\ll \frac{1}{T} + \frac{\log_2 x}{\log x} \\
&\ll \frac{1}{T}.
\end{aligned} \tag{15}$$

当 $|\tau| \leq (\log x)^{-1}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left| \tau \frac{\omega(n) - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} \right| &\ll \frac{|\tau| \log x}{T}, \\
\exp \left\{ i\tau \frac{\omega(n) - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} \right\} &= 1 + O \left(\frac{|\tau| \log x}{T} \right).
\end{aligned}$$

代入到公式(11)中, 则有

$$\varphi_{x,y}(\tau) = 1 + O \left(\frac{|\tau| \log x}{T} \right).$$

因为 $e^{-\tau^2/2} = 1 + O(\tau^2)$, 可以得到

$$\int_{-1/\log x}^{1/\log x} \left| \frac{\varphi_{x,y}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau \ll \int_{-1/\log x}^{1/\log x} \left(\frac{\log x}{T} + |\tau| \right) d\tau \ll \frac{1}{T}. \tag{16}$$

所以从公式(14)~(16)中可以得到公式(12)。

最后证明定理 1.1 中的余项估计是最优的。定义

$$\begin{aligned}
R_\lambda(x, y) &:= \frac{1}{U_k(x, y)} \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ \omega(n) - \log_2 x \leq \lambda \sqrt{\log_2 x}}} \tau_k^{(e)}(n) - \Phi(\lambda), \\
R(x, y) &:= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |R_\lambda(x, y)|.
\end{aligned}$$

令 $l := [\log_2 x]$, $\theta := l - \log_2 x$, 那么

$$\begin{aligned}
\frac{U_{l,k}(x, y)}{U_k(x, y)} &= F_{x,y} \left(\frac{\theta}{\sqrt{\log_2 x}} \right) - F_{x,y} \left(\frac{\theta - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}}{\sqrt{\log_2 x}} \right) \\
&\leq \Phi \left(\frac{\theta}{\sqrt{\log_2 x}} \right) - \Phi \left(\frac{\theta - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}}{\sqrt{\log_2 x}} \right) + 2R(x, y) \\
&= \int_{\left(\theta - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)/\sqrt{\log_2 x}}^{\theta/\sqrt{\log_2 x}} e^{-\tau^2/2} d\tau + 2R(x, y) \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi \log_2 x}} + 2R(x, y).
\end{aligned} \tag{17}$$

由 Stirling 公式, 定理 1.2 和引理 2.2 可得

$$\frac{U_{l,k}(x,y)}{U_k(x,y)} \sim \frac{Y_k\left(\frac{l-1}{\log_2 x}\right)}{Y_k(1)} \frac{(\log_2 x)^{l-1}}{(\log x)(l-1)!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \log_2 x}}. \quad (18)$$

根据公式(17)和公式(18)可以得到

$$R(x,y) \geq \frac{1+o(1)}{2\sqrt{2\pi \log_2 x}} - \frac{1}{4\sqrt{2\pi \log_2 x}} = \frac{1+o(1)}{4\sqrt{2\pi \log_2 x}}.$$

对 $x \geq 2$ 和 $x^{17/30+\varepsilon} \leq y \leq x$ 一致成立。

定理 1.1 得证。

6. 结语

本文研究了短区间上有关指数除数函数的均值估计, 结合 Selberg-Delange 方法得到的结果和 Berry-Esseen 不等式, 得到了指数除数函数在短区间上的 Erdős-Kac 型定理。该研究将指数除数函数与 Erdős-Kac 定理结合在一起, 为指数除数函数在短区间上的研究提供思路, 丰富了概率数论的内容。

参考文献

- [1] Subbarao, M.V. (1972) On Some Arithmetic Convolutions. In: Gioia, A.A. and Goldsmith, D.L. Eds., *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 247-271. <https://doi.org/10.1007/bfb0058796>
- [2] Tóth, L. (2007) An Order Result for the Exponential Divisor Function. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **71**, 165-171. <https://doi.org/10.5486/pmd.2007.3676>
- [3] 董玲玲, 张德瑜. 指数除数函数的均值问题[J]. 数学学报(中文版), 2013, 56(3), 427-432.
- [4] Yang, L. (2015) The Asymptotic Formula about the Generalized Exponential Divisor Function. *Basic Sciences Journal of Textile Universities*, **2**, 178-181.
- [5] Erdős, P. and Kac, M. (1939) On the Gaussian Law of Errors in the Theory of Additive Functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **25**, 206-207. <https://doi.org/10.1073/pnas.25.4.206>
- [6] Elliott, P.D.T.A. (2015) Corrigendum: Central Limit Theorems for Classical Cusp Forms. *The Ramanujan Journal*, **36**, 99-102. <https://doi.org/10.1007/s11139-014-9629-9>
- [7] Liu, K. and Wu, J. (2021) Weighted Erdős-Kac Theorem in Short Intervals. *The Ramanujan Journal*, **55**, 1-12. <https://doi.org/10.1007/s11139-020-00343-1>
- [8] 全晓菲. 短区间上权为 $d_k(n)$ 的 Erdős-Kac 型定理[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 1082-1093.
- [9] Wang, D. (2024) Weighted Erdős-Kac Type Theorems in Short Intervals. *Acta Arithmetica*, **212**, 255-267. <https://doi.org/10.4064/aa230129-22-8>
- [10] Cui, Z., Lü, G. and Wu, J. (2019) The Selberg-Delange Method in Short Intervals with Some Applications. *Science China Mathematics*, **62**, 447-468. <https://doi.org/10.1007/s11425-017-9172-7>
- [11] Guth, L. and Maynard, J. (2026) New Large Value Estimates for Dirichlet Polynomials. *Annals of Mathematics*, **203**, 623-675. <https://doi.org/10.4007/annals.2026.203.2.6>
- [12] Tenenbaum, G. (1995) Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory. In: Thomas, C.B., Ed., *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Vol. 46, Cambridge University Press, 240.