Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 213-226
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164106

Hans汉斯

一类双种群趋化–非牛顿流体耦合模型的强解

孙　畅，王长佳*

长春理工大学数学与统计学院，吉林 长春

收稿日期：2026年3月10日；录用日期：2026年4月11日；发布日期：2026年4月23日

摘　要

本文主要在三维光滑有界区域中对一类双种群趋化–非牛顿流体耦合模型进行研究，在适当的函数设定下，利用不动点定理，对于小且适当正则的数据，确立其强解的存在性与唯一性。

关键词

趋化–流体模型，非牛顿流，强解，存在唯一性

Strong Solutions for a Class of Coupled Two-Species Chemotaxis-Non-Newtonian Fluid Models

Chang Sun, Changjia Wang*

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Technology, Changchun Jilin

Received: March 10, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

Abstract

This paper mainly investigates a class of coupled two-species chemotaxis-Non-Newtonian fluid models in a 3D smooth bounded domain. Using a fixed-point argument within an appropriate functional framework, we establish the existence and uniqueness of strong solutions for this problem, provided that the given data are sufficiently small and regular.

*通讯作者。

文章引用: 孙畅, 王长佳. 一类双种群趋化-非牛顿流体耦合模型的强解[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 213-226.
DOI: 10.12677/pm.2026.164106

Keywords

The Coupled Chemotaxis-Fluid Equations, Non-Newtonian Fluids, Strong Solutions, Existence and Uniqueness

1. 引言

在生物学中，细胞或者微生物的趋化性是一种普遍存在的现象，它是指细胞沿着组织内的化学刺激物的浓度梯度做定向运动。这种定向运动在各种生物过程中起着重要作用，例如黏菌的行成[1]、伤口愈合[2]、神经元迁移和侵袭性癌细胞的迁移[3]等。由于细菌或微生物通常生活在流体中，因此主要研究流体中的趋化现象，即趋化模型和黏性不可压缩流体的耦合系统。趋化－流体耦合模型作为生物数学与流体力学交叉领域的重要研究方向，在过去的十几年中，众多学者针对其解的存在性与稳定性进行深入探讨，并取得突破性成果。然而，关于双种群趋化－流体耦合模型的成果较少，这类系统面临趋化效应、竞争动力学及流体影响的挑战，描述的是两种竞争种群在(非)牛顿流中对单一趋化因子的反应过程。

近年来，以下带有不可压缩流体的双种群趋化模型：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\\ \boldsymbol{u}_t+k(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=\Delta\boldsymbol{u}+\nabla P+(\beta_1 n_1+\beta_2 n_2)\nabla\phi,\\ (n_1)_t+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)n_1=\Delta n_1-\chi_1\nabla\cdot(n_1\nabla c)+\mu_1 n_1(1-n_1-a_1 n_2), & \text{in } \Omega\times(0,\infty)\\ (n_1)_t+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)n_2=\Delta n_2-\chi_2\nabla\cdot(n_2\nabla c)+\mu_2 n_2(1-a_2 n_1-n_2),\\ c_t+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)c=\Delta c-(\alpha_1 n_1+\alpha_2 n_2)c.\end{cases} \tag{1}$$

已被一些学者研究过，其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^N\ (N=2,3)$为具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域；未知函数$\boldsymbol{u}$表示流体速度，$n_1,n_2$表示两种竞争种群的细胞密度，$c$表示基质浓度，$P$表示压力；$\phi$是给定的与时间无关的函数，表示由不同物理机制产生的势函数；$k\in\{0,1\}$，参数$\chi_i,\mu_i,a_i,\alpha_i,\beta_i\ (i=1,2)$为正。当$k=1$时，系统(1)被称为双种群趋化－Navier-Stokes 模型。Hirata 等人[4]在二维情形下推导了其经典解的整体存在性、有界性和稳定性，并研究了三维情形下弱解的整体存在性、最终光滑性和稳定性[4]。当$k=0$时，系统(1)被称为双种群趋化－Stokes 模型。在三维情形下，Cao 等人[5]研究了其经典解的整体存在性和渐近行为，前提是$\mu_i/\chi_i\ (i=1,2)$足够大。Jin 和 Xiang [6]进一步给出了对于任何假定的整体有界经典解的收敛速率。最近，当$-(\alpha_1 n_1+\alpha_2 n_2)c$被替换为$-c+\alpha_1 n_1+\alpha_2 n_2$时，Cao 等人[7]在三维情形下研究了其弱解的整体存在性和经典解的稳定性，前提是μ_1,μ_2足够大。此外，Zheng 和 Willie 等人对于涉及两种化学物质的双种群趋化－Navier-Stokes 系统进行了相关研究，具体可见文献[8] [9]。上述讨论皆是针对趋化方程与牛顿流体方程的耦合，对于与非牛顿流体的耦合相关研究较少，目前仅有一篇。Bousbih H [10]在 2019 年关于“Global weak solutions for a coupled chemotaxis non-Newtonian fluid”的研究中，证明了弱解的整体存在性，但对趋化－非牛顿流体耦合模型的高阶正则性的保持机制尚未阐明。

本文考虑如下三维稳态不可压缩双种群趋化－非牛顿流体耦合模型：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, & x\in\Omega\\ -\nabla\cdot\left[\boldsymbol{\tau}\left(\mathcal{D}\boldsymbol{u}\right)\right]+\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}+\nabla P=\left(\beta_1 n_1+\beta_2 n_2\right)\nabla\phi+f, & x\in\Omega\\ -d_1\Delta n_1+\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)n_1=-\nabla\cdot\left(n_1\nabla c\right)+\mu_1 n_1\left(1-n_1-a_1 n_2\right), & x\in\Omega\\ -d_2\Delta n_2+\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)n_2=-\nabla\cdot\left(n_2\nabla c\right)+\mu_2 n_2\left(1-a_2 n_1-n_2\right), & x\in\Omega\\ -d_3\Delta c+\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)c=-\left(\alpha_1 n_1+\alpha_2 n_2\right)c, & x\in\Omega\end{cases}\tag{2}$$

具有以下边界条件：

$$\boldsymbol{u}\big|_{\partial\Omega}=0,\quad n_i\big|_{\partial\Omega}=0\ \left(i=1,2\right),\quad c\big|_{\partial\Omega}=0\tag{3}$$

其中：$\Omega\subset\mathbb{R}^n\left(n=3\right)$为具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域；$d_j>0\left(j=1,2,3\right)$是细胞和底物相应的扩散系数；$f$为给定的外力项；$\mathcal{D}\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)$为应力速率张量，$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}\left(\mathcal{D}\boldsymbol{u}\right)$为应力张量。本文研究如下形式经典幂律应力张量：

$$\boldsymbol{\tau}\left(\eta\right)=2\nu\left(1+\left|\eta\right|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\eta\tag{4}$$

其中ν,p是正常数且$p>1$。

本文的研究目标为：在$\nabla\phi$与外力项f的L^q范数以及$\dfrac{\max\left\{\mu_1,\mu_2\right\}}{\min\left\{d_1,d_2\right\}}$适当意义下为小量的假设下，基于Stokes问题和趋化方程的正则性结果，利用Banach不动点定理证明问题(2)~(4)强解的存在性与唯一性。

2. 预备知识与主要结论

对于$m\in\mathbb{N}$，$1<q<\infty$，标准Lebesgue空间和Sobolev空间及其范数表示为$L^q\left(\Omega\right)\left(\left\|\cdot\right\|_q\right)$和$W^{m,q}\left(\Omega\right)\left(\left\|\cdot\right\|_{m,q}\right)$。特别地，$W_0^{m,q}\left(\Omega\right)$定义为$C_0^\infty\left(\Omega\right)$在$W^{m,q}\left(\Omega\right)$中的闭包；另外，$W^{-1,q}\left(\Omega\right)$定义为$W_0^{1,q}\left(\Omega\right)$的对偶空间，其范数记为$\left\|\cdot\right\|_{-1,q;\Omega}$。在上述空间的基础上，我们引入如下函数空间：

$$\mathcal{V}:=\left\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{C}_0^\infty\left(\Omega\right):\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0\right\};$$

$$\mathbf{V}_p:=\left\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{W}_0^{1,p}\left(\Omega\right):\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0\right\};$$

$$\mathbf{V}_{m,p}:=\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbf{W}_0^{1,p}\left(\Omega\right)\cap\boldsymbol{W}^{m,p}\left(\Omega\right):\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0\right\};$$

$$W:=\left\{\theta\in W^{1,2}\left(\Omega\right):\theta\big|_{\partial\Omega}=0\right\},$$

注：当$m=1$时，$\mathbf{V}_{m,p}$记为$\mathbf{V}_p$。此外，对于参数$q,r,t,s>n$且$s>r,t$，以及任意的$\delta>0$，我们定义凸集

$$\begin{aligned}B_\delta:=\Big\{&\left(\xi,\omega_1,\omega_2,\theta\right)\in\boldsymbol{V}_{2,q}\times W^{2,r}\left(\Omega\right)\times W^{2,t}\left(\Omega\right)\times W^{2,s}\left(\Omega\right):\\&C_{E_1}\left\|\nabla\xi\right\|_{1,q}\le\delta,C_{E_2}\left\|\nabla\omega_1\right\|_{1,r}\le\delta,C_{E_3}\left\|\nabla\omega_2\right\|_{1,t}\le\delta,C_{E_4}\left\|\nabla\theta\right\|_{1,s}\le\delta\Big\},\end{aligned}\tag{5}$$

其中$C_{E_1},C_{E_2},C_{E_3},C_{E_4}$分别是$W^{1,j}\left(\Omega\right)\left(j\in\left\{q,r,t,s\right\}\right)$嵌入到$L^\infty\left(\Omega\right)$的嵌入常数。

另一方面，我们考虑乘积空间

$\mathbf{X}:=\mathbf{V}_{2,q}\times\left(W^{2,r}\left(\Omega\right)\cap W_0^{1,r}\left(\Omega\right)\right)\times\left(W^{2,t}\left(\Omega\right)\cap W_0^{1,t}\left(\Omega\right)\right)\times\left(W^{2,s}\left(\Omega\right)\cap W_0^{1,s}\left(\Omega\right)\right)$，定义其范数为

$$\left\|\left(\xi,\omega_1,\omega_2,\theta\right)\right\|_{1,q,r,t,s}:=\max\left\{\left\|\nabla\xi\right\|_{1,q},\left\|\nabla\omega_1\right\|_{1,r},\left\|\nabla\omega_2\right\|_{1,t},\left\|\nabla\theta\right\|_{1,s}\right\}.$$

最后，为便于标记，在后续证明中 C_p 表示 Poincare’不等式 $\|\cdot\|_s \le C_p \|\nabla \cdot\|_s$ 中的 Poincare’常数。且对于任意的实数 x 和 y 我们定义 $(x,y)^+ = \max\{x,y\}$，$(x,y)^- = \min\{x,y\}$，$x^+ = \max\{x,0\}$。此外，对于任意的 $p>1$，定义如下常数：

$$S_p := (|p-2|,2)^+, \quad r_p := \frac{1+(p-3)^+ - (p-4)^+}{2}, \quad \gamma_p := \frac{\left[(p,3)^+ - 2\right]^{(p,3)^+ - 2}}{\left[(p,3)^+ - 1\right]^{(p,3)^+ - 1}}. \tag{6}$$

本文的主要结果如下：

定理 1 设 $\phi, f \in L^q(\Omega)$，$q,r,t,s>n$ 且 $s>r,t$。若存在正常数 $M = M\left(C_0, C_{-1}, C_p, C_{E_1}, C_{E_2}, C_{E_3}, C_{E_4}, \alpha_i, \beta_i, a_i, \mu_i\right)$，$(i=1,2)$ 和 $C = C(k_1,k_2,C_1,C_2)$，使得 $\dfrac{\max\{\mu_1,\mu_2\}}{\min\{d_1,d_2\}} < C$ 以及

$$\begin{aligned} &M\left[\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)\frac{M\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}+\frac{\|\nabla\phi\|_q}{\nu}\right. \\ &\left. +S_p\left(M\frac{\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q}{\nu}\right)^{2r_p}\left(1+M\frac{\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q}{\nu}\right)^{(p-4)^+}+C_pC\right] \le \frac{1}{4^{(p-2,1)^+}} \end{aligned} \tag{7}$$

成立，则问题(2)~(4)存在一个强解 $(\boldsymbol{u}, n_1, n_2, c) \in \mathbf{V}_{2,q} \times \left(W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)\right) \times \left(W^{2,t}(\Omega) \cap W_0^{1,t}(\Omega)\right) \times \left(W^{2,s}(\Omega) \cap W_0^{1,s}(\Omega)\right)$。

注 1 ϕ 是与时间无关且由不同物理机制产生的势函数，f 为外力项，当 $\|\nabla\phi\|_q$ 与 $\|f\|_q$ 分小时，条件(7)成立。

为证明定理 1 所需的两个基本引理如下：

引理 1 [11]设整数 $m \ge -1$，$\Omega \subset \mathbb{R}^n\ (n=2,3)$ 为一有界区域。称 $\partial\Omega$ 具有 $\mathcal{C}^k$ 光滑性，记为 $\partial\Omega \in \mathcal{C}^k$，其中 $k=(m+2,2)^+$。则对任意 $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbf{W}^{m,q}(\Omega)$，方程组

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla\pi = \boldsymbol{\Gamma}, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, & x \in \Omega, \\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

存在唯一解 $[\boldsymbol{u},\pi] \in \mathbf{W}^{m+2,q}(\Omega) \times W^{m+1,q}(\Omega)$。此外，下述估计成立：

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{m+1,q} + \|\pi\|_{m+1,q/\mathbb{R}} \le C_m \|\boldsymbol{\Gamma}\|_{m,q},$$

其中 $C_m = C_m(n,q,\Omega)$ 为正常数。

引理 2 [12]设 r_p, γ_p 由式(6)给定，映射 $G: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 定义为

$$G(\delta) = A\delta^2 - \delta + E\delta\mathcal{H}(\delta) + D,$$

其中 A, E, D 为正常数，且 $\mathcal{H}(x) = x^{2r_p}(1+x)^{(p-4)^+}$。若下述不等式成立：

$$AD + ED^{2r_p}(1+D)^{(p-4)^+} \le \gamma_p$$

则 G 至少存在一个根 δ_0。此外，$\delta_0 > D$，且对任意的 $\lambda \in [1,2]$ 下述估计成立：

$$\frac{\lambda-1}{\lambda}\delta_0+\frac{2-\lambda}{\lambda}A\delta_0^2+\frac{2r_p+1-\lambda}{\lambda}E\delta_0\mathcal{H}(\delta_0)+\frac{E(p-4)^+}{\lambda}\delta_0^{2r_p+2}(1+\delta_0)^{(p-4)^+-1}\le D.$$

3. 定理 1 的证明

首先，将问题(2)~(4)重写为：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, & x\in\Omega,\\ -2\nu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla P=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\nabla\cdot\left[2\nu\sigma\left(|D\boldsymbol{u}|^2\right)D\boldsymbol{u}\right]+(\beta_1n_1+\beta_2n_2)\nabla\phi+f, & x\in\Omega,\\ -d_1\Delta n_1=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)n_1-\nabla\cdot(n_1\nabla c)+\mu_1n_1(1-n_1-a_1n_2), & x\in\Omega,\\ -d_2\Delta n_2=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)n_2-\nabla\cdot(n_2\nabla c)+\mu_2n_2(1-a_2n_1-n_2), & x\in\Omega,\\ -d_3\Delta c=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)c-(\alpha_1n_1+\alpha_2n_2)c, & x\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}=0,\quad n_1|_{\partial\Omega}=0,\quad n_2|_{\partial\Omega}=0,\quad c|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}\tag{8}$$

其中，$\sigma(x)=(1+x)^{\frac{p-2}{2}}-1$。进而利用 Banach 不动点定理证明方程组(8)强解的存在性与唯一性。为此，给定$(\boldsymbol{\xi},\omega_1,\omega_2,\theta)\in\mathbf{X}$，通过下述系统：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, & x\in\Omega,\\ -2\nu\Delta\boldsymbol{u}+\nabla P=-(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{\xi}+\nabla\cdot\left[2\nu\sigma\left(|D\boldsymbol{\xi}|^2\right)D\boldsymbol{\xi}\right]+(\beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2)\nabla\phi+f, & x\in\Omega,\\ -d_1\Delta n_1=-(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\omega_1-\nabla\cdot(\omega_1\nabla\theta)+\mu_1\omega_1(1-\omega_1-a_1\omega_2), & x\in\Omega,\\ -d_2\Delta n_2=-(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\omega_2-\nabla\cdot(\omega_2\nabla\theta)+\mu_2\omega_2(1-a_2\omega_1-\omega_2), & x\in\Omega,\\ -d_3\Delta c=-(\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\theta-(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2)\theta, & x\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}=0,\quad n_1|_{\partial\Omega}=0,\quad n_2|_{\partial\Omega}=0,\quad c|_{\partial\Omega}=0. \end{cases}\tag{9}$$

定义映射$\mathcal{A}[\boldsymbol{\xi},\omega_1,\omega_2,\theta]=[\boldsymbol{u},n_1,n_2,c]$，往证$\mathcal{A}:B_{\delta_0}\to B_{\delta_0}$是一个压缩映射。

下面首先证明存在$\delta_0>0$，使得$\mathcal{A}(B_{\delta_0})\subseteq B_{\delta_0}$。

命题 1 设$\phi,f\in L^q(\Omega)$，$q,r,t,s>n$ 且 $s>r,t$。若存在正常数$M_1=M_1(C_0,C_{E_1},C_p,\beta_1,\beta_2)$和$C=C(k_1,k_2,C_1,C_2)$，使得$\frac{\max\{\mu_1,\mu_2\}}{\min\{d_1,d_2\}}<C$以及

$$\frac{M_1^2\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu^2}+M_1S_p\left[\frac{M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}\right]^{2r_p}\left[1+\frac{M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}\right]^{(p-4)^+}\le\gamma_p\tag{10}$$

成立，则存在$\delta_0>0$，满足$\mathcal{A}(B_{\delta_0})\subseteq B_{\delta_0}$。

证明 设$(\boldsymbol{\xi},\omega_1,\omega_2,\theta)\in B_\delta$。由引理 1 可知，$\boldsymbol{u}\in\mathbf{V}_{2,q}$，且满足

$$\|\nabla\boldsymbol{u}\|_{1,q}\le\frac{C_0}{2\nu}\left(\|(\beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2)\nabla\phi\|_q+\|\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\boldsymbol{\xi}\|_q+\left\|\nabla\cdot\left[2\nu\sigma\left(|D\boldsymbol{\xi}|^2\right)D\boldsymbol{\xi}\right]\right\|_q+\|f\|_q\right).\tag{11}$$

对式(11)右端第一项进行估计，有

$$
\begin{aligned}
\left\|(\beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2)\nabla\phi\right\|_q &\le \beta_1\|\omega_1\nabla\phi\|_q+\beta_2\|\omega_2\nabla\phi\|_q \le \beta_1\|\omega_1\|_\infty\|\nabla\phi\|_q+\beta_2\|\omega_2\|_\infty\|\nabla\phi\|_q \\
&\le \beta_1 C_{E_2}\left(C_p+1\right)\|\nabla\omega_1\|_r\|\nabla\phi\|_q+\beta_2 C_{E_3}\left(C_p+1\right)\|\nabla\omega_2\|_t\|\nabla\phi\|_q \\
&\le (\beta_1+\beta_2)\delta\left(C_p+1\right)\|\nabla\phi\|_q \\
&\le \frac{(\beta_1+\beta_2)^2\left(C_p+1\right)^2}{2}\delta^2+\frac{\|\nabla\phi\|_q^2}{2}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

此外，根据([12], p. 5411)，有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla\cdot\left[\sigma\left(|D\xi|^2\right)D\xi\right]\right\|_q \le 2S_p\mathcal{H}\left(\|D\xi\|_\infty\right)\|\nabla\xi\|_{1,q}, \\
&\left\|\sigma\left(|D\xi|^2\right)D\xi-\sigma\left(|D\hat{\xi}|^2\right)D\hat{\xi}\right\|_q \le S_p\mathcal{H}\left(\|D\xi\|_\infty+\|D\hat{\xi}\|_\infty\right)\left\|\nabla\left(\xi-\hat{\xi}\right)\right\|_q,
\end{aligned}
$$

其中 $\mathcal{H}(x)=x^{2r_p}(1+x)^{(p-4)^+}$。且由[12]，可知

$$
\|\xi\cdot\nabla\xi\|_q+\left\|\nabla\cdot\left[2\nu\sigma\left(|D\xi|^2\right)D\xi\right]\right\|_q \le \frac{C_p}{C_{E_1}}\delta^2+\frac{4\nu S_p}{C_{E_1}}\delta\mathcal{H}(\delta). \tag{13}
$$

联合式(11)~(13)，可得

$$
\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{1,q} \le \frac{M_1}{\nu}\left[\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q+\delta^2+\nu S_p\delta\mathcal{H}(\delta)\right], \tag{14}
$$

其中 $M_1=\frac{C_0}{2}\max\left\{\frac{1}{2},1,\frac{4}{C_{E_1}},\frac{C_p}{C_{E_1}}+\frac{(\beta_1+\beta_2)^2\left(C_p+1\right)^2}{2}\right\}$。

另一方面，对于方程$(9)_3$，由经典椭圆方程正则性理论可知，存在常数 $k_1>0$，使得

$$
\|\nabla n_1\|_{1,r} \le \frac{k_1}{d_1}\left[\|(\xi\cdot\nabla)\omega_1\|_r+\|\nabla\cdot(\omega_1\nabla\theta)\|_r+\mu_1\|\omega_1(1-\omega_1-a_1\omega_2)\|_r\right], \tag{15}
$$

对式(15)右端进行逐项估计，有

$$
\|(\xi\cdot\nabla)\omega_1\|_r \le \|\xi\|_\infty\|\nabla\omega_1\|_r \le C_{E_1}\left(C_p+1\right)\|\nabla\xi\|_q\|\nabla\omega_1\|_{1,r} \le \frac{C_p+1}{C_{E_2}}\delta^2, \tag{16}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\cdot(\omega_1\nabla\theta)\|_r &\le \|\nabla\omega_1\cdot\nabla\theta\|_r+\|\omega_1\Delta\theta\|_r \le \|\nabla\omega_1\|_\infty\|\nabla\theta\|_r+\|\omega_1\|_\infty\|\Delta\theta\|_r \\
&\le C_{E_2}\|\nabla\omega_1\|_{1,r}c'\|\nabla\theta\|_s+C_{E_2}\left(C_p+1\right)\|\nabla\omega_1\|_r c'\|\Delta\theta\|_s \\
&\le C_{E_2}\|\nabla\omega_1\|_{1,r}c'\|\nabla\theta\|_{1,s}+C_{E_2}\left(C_p+1\right)\|\nabla\omega_1\|_{1,r}c'\|\nabla\theta\|_{1,s} \\
&\le \frac{c'}{C_{E_4}}\delta^2+\frac{c'\left(C_p+1\right)}{C_{E_4}}\delta^2=\frac{c'\left(C_p+2\right)}{C_{E_4}}\delta^2,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

以及

$$\begin{aligned}\left\|\omega_1\left(1-\omega_1-a_1\omega_2\right)\right\|_r &\le \left\|\omega_1\right\|_r+\left\|\omega_1^2\right\|_r+a_1\left\|\omega_1\omega_2\right\|_r \le C_P\left\|\nabla\omega_1\right\|_r+\left\|\omega_1\right\|_{2r}^2+a_1\left\|\omega_1\right\|_r\left\|\omega_2\right\|_\infty \\ &\le C_P\frac{\delta}{C_{E_2}}+C_P^2\left\|\nabla\omega_1\right\|_{2r}^2+a_1C_p\left\|\nabla\omega_1\right\|_r C_{E_3}\left(C_p+1\right)\left\|\nabla\omega_2\right\|_t \\ &\le \frac{C_p}{C_{E_2}}\delta+c''C_P^2\left\|\nabla\omega_1\right\|_\infty^2+a_1C_p\frac{\delta}{C_{E_2}}\left(C_p+1\right)\delta \\ &\le \frac{C_p}{C_{E_2}}\delta+\left(c''C_P^2+\frac{a_1\left(C_p+1\right)^2}{C_{E_2}}\right)\delta^2.\end{aligned}\tag{18}$$

联合式(15)~(18)，可得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla n_1\right\|_{1,r} &\le \frac{k_1}{d_1}\left(\frac{C_p+1}{C_{E_2}}+\frac{c'\left(C_p+2\right)}{C_{E_4}}+c''\mu_1C_P^2+\frac{\mu_1a_1\left(C_p+1\right)^2}{C_{E_2}}\right)\delta^2+\frac{k_1\mu_1C_p}{d_1C_{E_2}}\delta \\ &\le \frac{k_1\left(C_2+2\right)^3}{d_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1}+\mu_1+\frac{\mu_1a_1}{C_1}\right)\delta^2+\frac{k_1\mu_1C_2}{d_1C_1}\delta \\ &\le \frac{k_1\left(C_2+2\right)^3\left[2+\mu_1\left(C_1+a_1\right)\right]}{d_1C_1}\delta^2+\frac{k_1\mu_1C_2}{d_1C_1}\delta,\end{aligned}\tag{19}$$

其中 $C_1=\left(C_{E_2},C_{E_3},C_{E_4}\right)^-$，$C_2=\left(c',c'',C_p\right)^+$。

同理，对于方程(9)₄，存在常数 $k_2>0$，使得

$$\left\|\nabla n_2\right\|_{1,t} \le \frac{k_2\left(C_2+2\right)^3\left[2+\mu_2\left(C_1+a_2\right)\right]}{d_2C_1}\delta^2+\frac{k_2\mu_2C_2}{d_2C_1}\delta.\tag{20}$$

此外，对于方程(9)₅，同样存在常数 $k_3>0$，使得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla c\right\|_{1,s} &\le \frac{k_3}{d_3}\left[\left\|\left(\xi\cdot\nabla\right)\theta\right\|_s+\left\|\left(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2\right)\theta\right\|_s\right] \\ &\le \frac{k_3}{d_3}\left\|\xi\right\|_\infty\left\|\nabla\theta\right\|_s+\frac{k_3\alpha_1}{d_3}\left\|\omega_1\right\|_\infty\left\|\theta\right\|_s+\frac{k_3\alpha_2}{d_3}\left\|\omega_2\right\|_\infty\left\|\theta\right\|_s \\ &\le \frac{k_3}{d_3}C_{E_1}\left(C_p+1\right)\left\|\nabla\xi\right\|_q\left\|\nabla\theta\right\|_{1,s}+\frac{k_3\alpha_1}{d_3}C_{E_2}\left(C_p+1\right)\left\|\nabla\omega_1\right\|_r C_P\left\|\nabla\theta\right\|_s \\ &\quad+\frac{k_3\alpha_2}{d_3}C_{E_3}\left(C_p+1\right)\left\|\nabla\omega_2\right\|_t C_P\left\|\nabla\theta\right\|_s \\ &\le \frac{k_3\left(C_p+1\right)}{d_3C_{E_4}}\delta^2+\frac{k_3C_P\left(C_p+1\right)\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{d_3C_{E_4}}\delta^2 \\ &\le \frac{k_3\left(C_p+1\right)^2\left(1+\alpha_1+\alpha_2\right)}{d_3C_{E_4}}\delta^2.\end{aligned}\tag{21}$$

因此，为得到 $\mathcal{A}(B_\delta)\subseteq B_\delta$，只需证明

$$\begin{aligned}
&\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{1,q}\le \frac{M_1}{\nu}\left[\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q+\delta^2+\nu S_p\delta\mathcal{H}(\delta)\right]\le\delta,\\
&\|\nabla n_1\|_{1,r}\le \frac{k_1(C_2+2)^3\left[2+\mu_1(C_1+a_1)\right]}{d_1C_1}\delta^2+\frac{k_1\mu_1C_2}{d_1C_1}\delta\le\delta,\\
&\|\nabla n_2\|_{1,t}\le \frac{k_2(C_2+2)^3\left[2+\mu_2(C_1+a_2)\right]}{d_2C_1}\delta^2+\frac{k_2\mu_2C_2}{d_2C_1}\delta\le\delta,\\
&\|\nabla\theta\|_{1,s}\le \frac{k_3(C_p+1)^2(1+\alpha_1+\alpha_2)}{d_3C_{E_4}}\delta^2\le\delta.
\end{aligned}\tag{22}$$

对引理 2，取 $A=\frac{M_1}{\nu}$，$E=M_1S_p$，$D=\frac{M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}$，则存在 $\delta_1>\frac{M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}$，使得

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{1,q}\le \frac{M_1}{\nu}\left[\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q+\delta_1^2+\nu S_p\delta_1\mathcal{H}(\delta_1)\right]\le\delta_1,$$

只要满足

$$AD+ED^{2r_p}(1+D)^{(p-4)^+}\le\gamma_p,$$

即假设(10)成立。此外，在引理 2 中取 $\lambda=2$，可得

$$\delta_1\le\frac{2M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}.$$

另一方面，为使式(22)$_2$~(22)$_3$ 有意义，需满足 $\frac{\max\{\mu_1,\mu_2\}}{\min\{d_1,d_2\}}<C$，其中 $C=\left(\frac{C_1}{k_1C_2},\frac{C_1}{k_2C_2}\right)^-$，且限制 $\|\nabla\phi\|_q$ 与 $\|f\|_q$ 使得 $\delta^-<2D<\delta^+$，其中

$$\delta^-=0,\quad \delta^+=\left(\frac{d_1C_1-k_1\mu_1C_2}{k_1(C_2+2)^3\left[2+\mu_1(C_1+a_1)\right]},\frac{d_2C_1-k_2\mu_2C_2}{k_2(C_2+2)^3\left[2+\mu_2(C_1+a_2)\right]},\frac{d_3C_{E_3}}{k_3(C_p+1)^2(1+\alpha_1+\alpha_2)}\right)^-.$$

现对 $\forall\delta\in\left[\delta^-,\delta^+\right]$，式(22)$_2$~(22)$_3$ 成立，我们选取 $\delta_0\in(D,2D)$，即

$$\delta^-<D<\delta_0<2D<\delta^+,$$

有

$$\begin{aligned}
&\|\nabla n_1\|_{1,r}\le \frac{k_1(C_2+2)^3\left[2+\mu_1(C_1+a_1)\right]}{d_1C_1}\delta_0^2+\frac{k_1\mu_1C_2}{d_1C_1}\delta_0\le\delta_0,\\
&\|\nabla n_2\|_{1,t}\le \frac{k_2(C_2+2)^3\left[2+\mu_2(C_1+a_2)\right]}{d_2C_1}\delta_0^2+\frac{k_2\mu_2C_2}{d_2C_1}\delta\le\delta_0,\\
&\|\nabla\theta\|_{1,s}\le \frac{k_3(C_p+1)^2(1+\alpha_1+\alpha_2)}{d_3C_{E_4}}\delta_0^2\le\delta_0.
\end{aligned}$$

综上所述，取 $\delta_0=\delta_1$ 即可得到 $\mathcal{A}(B_{\delta_0})\subseteq B_{\delta_0}$。

下面进一步证明映射 $\mathcal{A}:B_{\delta_0}\to B_{\delta_0}$ 为压缩映射。

命题 2 若存在一个常数 $M_2=M_2\left(C_p,C_{E_1},C_{E_2},C_{E_3},C_{E_4},\alpha_i,\beta_i,a_i,\mu_i\right)$，$(i=1,2)$，使得

$$M_2\left[\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)\frac{M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}+\frac{\|\nabla\phi\|_a}{\nu}\right.$$
$$\left.+S_p\left(M_1\frac{\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q}{\nu}\right)^{2r_p}\left(1+M_1\frac{\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q}{\nu}\right)^{(p-4)^+}+C_pC\right]\le\frac{1}{4^{(p-2,1)^+}} \tag{23}$$

成立，则映射 $\mathcal{A}:B_{\delta_0}\to B_{\delta_0}$ 在空间 $\mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega)\times W_0^{1,r}(\Omega)\times W_0^{1,t}(\Omega)\times W_0^{1,s}(\Omega)$ 上是一个压缩映射。

证明 设 $(\xi,\omega_1,\omega_2,\theta),\left(\hat{\xi},\hat{\omega}_1,\hat{\omega}_2,\hat{\theta}\right)\in B_{\delta_0}$，且 $\mathcal{A}(\xi,\omega_1,\omega_2,\theta)=(\boldsymbol{u},n_1,n_2,c)$，$\mathcal{A}\left(\hat{\xi},\hat{\omega}_1,\hat{\omega}_2,\hat{\theta}\right)=(\hat{\boldsymbol{u}},\hat{n}_1,\hat{n}_2,\hat{c})$，并将它们分别代入系统(9)，相减得

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})=0, & x\in\Omega,\\ -2\nu\Delta(\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})+\nabla\left(P-\hat{P}\right)=\boldsymbol{R}, & x\in\Omega,\\ -d_1\Delta(n_1-\hat{n}_1)=\boldsymbol{G}_1, & x\in\Omega,\\ -d_2\Delta(n_2-\hat{n}_2)=\boldsymbol{G}_2, & x\in\Omega,\\ -d_3\Delta(c-\hat{c})=\boldsymbol{F}, & x\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}}|_{\partial\Omega}=0,\ \ n_i-\hat{n}_i|_{\partial\Omega}=0,\ \ c-\hat{c}|_{\partial\Omega}=0,\ i=1,2.\end{cases} \tag{24}$$

其中，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}:=\nabla\cdot\left[\hat{\xi}\otimes\hat{\xi}-\xi\otimes\xi+2\nu\left(\sigma\left(|D\xi|^2\right)D\xi-\sigma\left(\left|D\hat{\xi}\right|^2\right)D\hat{\xi}\right)\right]+\beta_1(\omega_1-\hat{\omega}_1)\nabla\phi+\beta_2(\omega_2-\hat{\omega}_2)\nabla\phi,\\ &\boldsymbol{G}_1:=\hat{\xi}\cdot\nabla\hat{\omega}_1-\xi\cdot\nabla\omega_1+\nabla\cdot\left(\hat{\omega}_1\nabla\hat{\theta}-\omega_1\nabla\theta\right)+\mu_1(\omega_1-\hat{\omega}_1)+\mu_1\left(\hat{\omega}_1^2-\omega_1^2\right)+\mu_1a_1(\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2-\omega_1\omega_2),\\ &\boldsymbol{G}_2:=\hat{\xi}\cdot\nabla\hat{\omega}_2-\xi\cdot\nabla\omega_2+\nabla\cdot\left(\hat{\omega}_2\nabla\hat{\theta}-\omega_2\nabla\theta\right)+\mu_2(\omega_2-\hat{\omega}_2)+\mu_2\left(\hat{\omega}_2^2-\omega_2^2\right)+\mu_1a_2(\hat{\omega}_2\hat{\omega}_1-\omega_2\omega_1),\\ &\boldsymbol{F}:=\hat{\xi}\cdot\nabla\hat{\theta}-\xi\cdot\nabla\theta+\alpha_1\left(\hat{\omega}_1\hat{\theta}-\omega_1\theta\right)+\alpha_2\left(\hat{\omega}_2\hat{\theta}-\omega_2\theta\right).\end{aligned}$$

对于方程$(24)_2$，应用引理 1，其中 $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{R}$，可得

$$\begin{aligned}\|\nabla(\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})\|_q&\le\frac{C_{-1}}{2\nu}\left\|\nabla\cdot\left[\hat{\xi}\otimes\hat{\xi}-\xi\otimes\xi+2\nu\left(\sigma\left(|D\xi|^2\right)D\xi-\sigma\left(\left|D\hat{\xi}\right|^2\right)D\hat{\xi}\right)\right]\right\|_{-1,q}\\ &\quad+\frac{C_{-1}}{2\nu}\left\|\beta_1(\omega_1-\hat{\omega}_1)\nabla\phi+\beta_2(\omega_2-\hat{\omega}_2)\nabla\phi\right\|_{-1,q}\\ &\le\frac{k_4C_{-1}}{\nu}\left\|\hat{\xi}\otimes\hat{\xi}-\xi\otimes\xi+2\nu\left(\sigma\left(|D\xi|^2\right)D\xi-\sigma\left(\left|D\hat{\xi}\right|^2\right)D\hat{\xi}\right)\right\|_q\\ &\quad+\frac{k_4C_{-1}}{\nu}\left\|\beta_1(\omega_1-\hat{\omega}_1)\nabla\phi+\beta_2(\omega_2-\hat{\omega}_2)\nabla\phi\right\|_q\end{aligned} \tag{25}$$

类似([12], p. 5405)的推导过程可得

$$\left\|\hat{\xi}\otimes\hat{\xi}-\xi\otimes\xi\right\|_q\le2C_p\left(C_p^q+1\right)^{\frac{1}{q}}\delta_0\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q, \tag{26}$$

$$\left\|\sigma\left(|D\xi|^2\right)D\xi-\sigma\left(\left|D\hat{\xi}\right|^2\right)D\hat{\xi}\right\|_q\le S_p\mathcal{H}(2\delta_0)\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q. \tag{27}$$

此外，对式(25)右端最后一项进行估计，有

$$\begin{aligned}\left\|\beta_1(\omega_1-\hat{\omega}_1)\nabla\phi+\beta_2(\omega_2-\hat{\omega}_2)\nabla\phi\right\|_q &\le \beta_1\left\|(\omega_1-\hat{\omega}_1)\nabla\phi\right\|_q+\beta_2\left\|(\omega_2-\hat{\omega}_2)\nabla\phi\right\|_q \\ &\le \beta_1\|\omega_1-\hat{\omega}_1\|_\infty\|\nabla\phi\|_q+\beta_2\|\omega_2-\hat{\omega}_2\|_\infty\|\nabla\phi\|_q \\ &\le \beta_1 C_{E_2}(C_p+1)\left\|\nabla(\omega_1-\hat{\omega}_1)\right\|_r\|\nabla\phi\|_q \\ &\quad +\beta_2 C_{E_3}(C_p+1)\left\|\nabla(\omega_2-\hat{\omega}_2)\right\|_t\|\nabla\phi\|_q\end{aligned} \tag{28}$$

联合式(25)~(28)，可得

$$\left\|\nabla(\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})\right\|_q \le \frac{T_1}{\nu}\left(2\delta_0+\nu S_p\mathcal{H}(2\delta_0)+2\|\nabla\phi\|_q\right)\cdot\max\left\{\left\|\nabla(\hat{\xi}-\xi)\right\|_q,\left\|\nabla(\omega_1-\hat{\omega}_1)\right\|_r,\left\|\nabla(\omega_2-\hat{\omega}_2)\right\|_t\right\}, \tag{29}$$

其中，$T_1=k_4C_{-1}\max\left\{C_p\left(C_p^q+1\right)^{\frac{1}{q}},2,\beta_1C_{E_2}(C_p+1),\beta_2C_{E_3}(C_p+1)\right\}$。

另一方面，对方程$(24)_3$进行估计，有

$$\begin{aligned}\left\|\nabla(n_1-\hat{n}_1)\right\|_r &\le \frac{1}{d_1}\left\|\hat{\xi}\cdot\nabla\hat{\omega}_1-\xi\cdot\nabla\omega_1+\mu_1(\omega_1-\hat{\omega}_1)+\mu_1\left(\hat{\omega}_1^2-\omega_1^2\right)+\mu_1a_1(\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2-\omega_1\omega_2)\right\|_r \\ &\quad +\frac{1}{d_1}\left\|\hat{\omega}_1\nabla\hat{\theta}-\omega_1\nabla\theta\right\|_r \\ &\le \frac{1}{d_1}\left\|\hat{\xi}\cdot\nabla\hat{\omega}_1-\xi\cdot\nabla\omega_1\right\|_r+\frac{1}{d_1}\left\|\hat{\omega}_1\nabla\hat{\theta}-\omega_1\nabla\theta\right\|_r \\ &\quad +\frac{1}{d_1}\left\|\mu_1(\omega_1-\hat{\omega}_1)+\mu_1\left(\hat{\omega}_1^2-\omega_1^2\right)+\mu_1a_1(\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2-\omega_1\omega_2)\right\|_r.\end{aligned} \tag{30}$$

对式(30)右侧进行逐项估计，有

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\xi}\cdot\nabla\hat{\omega}_1-\xi\cdot\nabla\omega_1\right\|_r &\le \left\|\hat{\xi}\cdot\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)+(\hat{\xi}-\xi)\cdot\nabla\omega_1\right\|_r \\ &\le \left\|\hat{\xi}\right\|_\infty\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r+\left\|\hat{\xi}-\xi\right\|_\infty\|\nabla\omega_1\|_r \\ &\le (C_p+1)\delta_0\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r+\frac{C_{E_1}(C_p+1)}{C_{E_2}}\delta_0\left\|\nabla(\hat{\xi}-\xi)\right\|_q\end{aligned} \tag{31}$$

和

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\omega}_1\nabla\hat{\theta}-\omega_1\nabla\theta\right\|_r &\le \left\|\hat{\omega}_1\nabla(\hat{\theta}-\theta)+\nabla\theta(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r \\ &\le \|\hat{\omega}_1\|_\infty\left\|\nabla(\hat{\theta}-\theta)\right\|_r+\|\nabla\theta\|_\infty\|\hat{\omega}_1-\omega_1\|_r \\ &\le c'(C_p+1)\delta_0\left\|\nabla(\hat{\theta}-\theta)\right\|_s+C_p\delta_0\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r\end{aligned} \tag{32}$$

以及

$$\begin{aligned}&\left\|\mu_1(\omega_1-\hat{\omega}_1)+\mu_1\left(\hat{\omega}_1^2-\omega_1^2\right)+\mu_1a_1(\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2-\omega_1\omega_2)\right\|_r \\ &\le \mu_1C_p\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r+\mu_1C_p\|\hat{\omega}_1+\omega_1\|_\infty\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r+\mu_1a_1\left\|(\hat{\omega}_1-\omega_1)\hat{\omega}_2+\omega_1(\hat{\omega}_2-\omega_2)\right\|_r \\ &\le \mu_1C_p\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r+\mu_1C_p\left(\|\hat{\omega}_1\|_\infty+\|\omega_1\|_\infty\right)\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r \\ &\quad +\mu_1a_1\|\hat{\omega}_1-\omega_1\|_r\|\hat{\omega}_2\|_\infty+\mu_1a_1\|\omega_1\|_r\|\hat{\omega}_2-\omega_2\|_\infty \\ &\le \mu_1C_p\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r+2\mu_1C_p(C_p+1)\delta_0\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r \\ &\quad +\mu_1a_1C_p(C_p+1)\delta_0\left\|\nabla(\hat{\omega}_1-\omega_1)\right\|_r+\frac{\mu_1a_1C_p(C_p+1)C_{E_3}}{C_{E_2}}\delta_0\left\|\nabla(\hat{\omega}_2-\omega_2)\right\|_t.\end{aligned} \tag{33}$$

联合式(30)~(33)，可得

$$\left\|\nabla\left(n_1-\hat{n}_1\right)\right\|_r \le \left(\frac{T_2}{d_1}\delta_0+\frac{C_p\mu_1}{d_1}\right)\cdot\max\left\{\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q,\left\|\nabla\left(\omega_1-\hat{\omega}_1\right)\right\|_r,\left\|\nabla\left(\omega_2-\hat{\omega}_2\right)\right\|_t,\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\right\}, \tag{34}$$

其中，$T_2=4\left(C_p+1\right)^2\max\left\{\frac{C_{E_1}}{C_{E_2}},c',2+2\mu_1+\mu_1a_1,\frac{\mu_1a_1C_{E_3}}{C_{E_2}}\right\}$。

类似式(30)的推导过程，对方程$(24)_4$进行估计，可得

$$\left\|\nabla\left(n_2-\hat{n}_2\right)\right\|_t \le \left(\frac{T_3}{d_2}\delta_0+\frac{C_p\mu_2}{d_2}\right)\cdot\max\left\{\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q,\left\|\nabla\left(\omega_1-\hat{\omega}_1\right)\right\|_r,\left\|\nabla\left(\omega_2-\hat{\omega}_2\right)\right\|_t,\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\right\}, \tag{35}$$

其中，$T_3=4\left(C_p+1\right)^2\max\left\{\frac{C_{E_1}}{C_{E_3}},c',2+2\mu_2+\mu_2a_2,\frac{\mu_2a_2C_{E_3}}{C_{E_2}}\right\}$。

另一方面，对方程$(24)_5$进行估计，有

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\left(c-\hat{c}\right)\right\|_s &\le \frac{1}{d_3}\left\|\hat{\xi}\cdot\nabla\hat{\theta}-\xi\cdot\nabla\theta\right\|_s+\frac{1}{d_3}\left\|\alpha_1\left(\hat{\omega}_1\hat{\theta}-\omega_1\theta\right)\right\|_s+\frac{1}{d_3}\left\|\alpha_2\left(\hat{\omega}_2\hat{\theta}-\omega_2\theta\right)\right\|_s\\
&\le \frac{C_{E_1}\left(C_p+1\right)}{d_3C_{E_4}}\delta_0\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q+\frac{C_p+1}{d_3}\delta_0\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s+\frac{\alpha_1C_p\left(C_p+1\right)C_{E_2}}{d_3C_{E_4}}\delta_0\left\|\nabla\left(\omega_1-\hat{\omega}_1\right)\right\|_r\\
&\quad+\frac{\alpha_2C_p\left(C_p+1\right)C_{E_3}}{d_3C_{E_4}}\delta_0\left\|\nabla\left(\omega_2-\hat{\omega}_2\right)\right\|_t+\frac{C_p\left(C_p+1\right)\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{d_3}\delta_0\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\\
&\le \frac{C_{E_1}\left(C_p+1\right)^2}{d_3C_{E_4}}\delta_0\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q+\frac{\left(C_p+1\right)^2\left(\alpha_1+\alpha_2+1\right)}{d_3}\delta_0\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\\
&\quad+\frac{\alpha_1\left(C_p+1\right)^2C_{E_2}}{d_3C_{E_4}}\delta_0\left\|\nabla\left(\omega_1-\hat{\omega}_1\right)\right\|_r+\frac{\alpha_2\left(C_p+1\right)^2C_{E_3}}{d_3C_{E_4}}\delta_0\left\|\nabla\left(\omega_2-\hat{\omega}_2\right)\right\|_t\\
&\le \frac{T_4}{d_3}\delta_0\cdot\max\left\{\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q,\left\|\nabla\left(\omega_1-\hat{\omega}_1\right)\right\|_r,\left\|\nabla\left(\omega_2-\hat{\omega}_2\right)\right\|_t,\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\right\},
\end{aligned} \tag{36}$$

其中，$T_4=4\left(C_p+1\right)^2\max\left\{\frac{C_{E_1}}{C_{E_4}},\alpha_1+\alpha_2+1,\frac{\alpha_1C_{E_2}}{C_{E_4}},\frac{\alpha_2C_{E_3}}{C_{E_4}}\right\}$。

进而结合式(29) (34) (35) (36)，可推得

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}}\right)\right\|_q,\left\|\nabla\left(n_1-\hat{n}_1\right)\right\|_r,\left\|\nabla\left(n_2-\hat{n}_2\right)\right\|_t,\left\|\nabla\left(c-\hat{c}\right)\right\|_s\right\}\\
&\le\left(\frac{T_1}{\nu}\left(2\delta_0\right)+T_1S_p\mathcal{H}\left(2\delta_0\right)+T_1\frac{2\left\|\nabla\phi\right\|_q}{\nu}+\frac{T_2}{2d_1}\left(2\delta_0\right)+\frac{T_3}{2d_2}\left(2\delta_0\right)+\frac{T_4}{2d_3}\left(2\delta_0\right)+\frac{C_p\mu_1}{d_1}+\frac{C_p\mu_2}{d_2}\right)\\
&\quad\cdot\max\left\{\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q,\left\|\nabla\left(\omega_1-\hat{\omega}_1\right)\right\|_r,\left\|\nabla\left(\omega_2-\hat{\omega}_2\right)\right\|_t,\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\right\}.
\end{aligned} \tag{37}$$

此外，由上述推导可知 $\delta_0<2D=\frac{2M_1\left(\left\|\nabla\phi\right\|_q^2+\left\|f\right\|_q\right)}{\nu}$，$\frac{\max\left\{\mu_1,\mu_2\right\}}{\min\left\{d_1,d_2\right\}}<C$，$\mathcal{H}(x)=x^{2r_p}\left(1+x\right)^{(p-4)^+}$ 是非

减的，且 $\mathcal{H}(4x)\le 4^{(p-2,1)^+}\mathcal{H}(x)$，取 $M_2=\max\left\{T_1,\frac{T_2}{2},\frac{T_3}{2},\frac{T_4}{2},1\right\}$，有

$$\begin{aligned}
&\max\left\{\|\nabla(\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})\|_q,\|\nabla(n_1-\hat{n}_1)\|_r,\|\nabla(n_2-\hat{n}_2)\|_t,\|\nabla(c-\hat{c})\|_s\right\}\\
&\le M_2\left[\frac{2\delta_0}{\nu}+S_p\mathcal{H}(2\delta_0)+\frac{2\|\nabla\phi\|_q}{\nu}+\frac{2\delta_0}{d_1}+\frac{2\delta_0}{d_2}+\frac{2\delta_0}{d_3}+\frac{C_p\mu_1}{d_1}+\frac{C_p\mu_2}{d_2}\right]\\
&\quad\cdot\max\left\{\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q,\|\nabla(\omega_1-\hat{\omega}_1)\|_r,\|\nabla(\omega_2-\hat{\omega}_2)\|_t,\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\right\}\\
&\le M_2\left[\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)(2\delta_0)+S_p\mathcal{H}(2\delta_0)+\frac{2\|\nabla\phi\|_q}{\nu}+\frac{C_p\mu_1}{d_1}+\frac{C_p\mu_2}{d_2}\right]\\
&\quad\cdot\max\left\{\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q,\|\nabla(\omega_1-\hat{\omega}_1)\|_r,\|\nabla(\omega_2-\hat{\omega}_2)\|_t,\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\right\}\\
&\le M_2\left[\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)\frac{4M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}+4^{(p-2,1)^+}S_p\mathcal{H}\left(\frac{M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}\right)+\frac{2\|\nabla\phi\|_q}{\nu}+2C_pC\right]\\
&\quad\cdot\max\left\{\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q,\|\nabla(\omega_1-\hat{\omega}_1)\|_r,\|\nabla(\omega_2-\hat{\omega}_2)\|_t,\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\right\}\\
&\le 4^{(p-2,1)^+}M_2\left[\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)\frac{M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}+S_p\mathcal{H}\left(M_1\frac{\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q}{\nu}\right)+\frac{\|\nabla\phi\|_q}{\nu}+C_pC\right]\\
&\quad\cdot\max\left\{\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q,\|\nabla(\omega_1-\hat{\omega}_1)\|_r,\|\nabla(\omega_2-\hat{\omega}_2)\|_t,\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\right\}\\
&\le 4^{(p-2,1)^+}M_2\left[\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)\frac{M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}+\frac{\|\nabla\phi\|_q}{\nu}\right.\\
&\quad\left.+S_p\left(M_1\frac{\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q}{\nu}\right)^{2r_p}\left(1+M_1\frac{\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q}{\nu}\right)^{(p-4)^+}+C_pC\right]\\
&\quad\cdot\max\left\{\left\|\nabla\left(\hat{\xi}-\xi\right)\right\|_q,\|\nabla(\omega_1-\hat{\omega}_1)\|_r,\|\nabla(\omega_2-\hat{\omega}_2)\|_t,\left\|\nabla\left(\hat{\theta}-\theta\right)\right\|_s\right\}.
\end{aligned}$$

考虑空间 $Y:=\mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega)\times W_0^{1,r}(\Omega)\times W_0^{1,t}(\Omega)\times W_0^{1,s}(\Omega)$，其范数为 $\max\left\{\|\nabla\cdot\|_q,\|\nabla\cdot\|_r,\|\nabla\cdot\|_t,\|\nabla\cdot\|_s\right\}$，则由最后一个不等式可推得

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{A}\left[\hat{\xi},\hat{\omega}_1,\hat{\omega}_2,\hat{\theta}\right]-\mathcal{A}[\xi,\omega_1,\omega_2,\theta]\right\|_Y\\
&\le 4^{(p-2,1)^+}M_2\left[\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}\right)\frac{M_1\left(\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q\right)}{\nu}+\frac{\|\nabla\phi\|_q}{\nu}\right.\\
&\quad\left.+S_p\left(M_1\frac{\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q}{\nu}\right)^{2r_p}\left(1+M_1\frac{\|\nabla\phi\|_q^2+\|f\|_q}{\nu}\right)^{(p-4)^+}+C_pC\right]\cdot\left\|\left[\hat{\xi},\hat{\omega}_1,\hat{\omega}_2,\hat{\theta}\right]-[\xi,\omega_1,\omega_2,\theta]\right\|_Y.
\end{aligned}$$

结合该式与假设(23)，可推得映射 $\mathcal{A}: B_{\delta_0} \to B_{\delta_0}$ 是空间 $\mathbf{W}_0^{1,q}(\Omega) \times W_0^{1,r}(\Omega) \times W_0^{1,t}(\Omega) \times W_0^{1,s}(\Omega)$ 上的一个压缩映射。

最后注意到，当 $p \le 3$ 时，$\gamma_p = 1/4 = 1/4^{(p-2,1)^+}$；当 $p > 3$ 时，$\gamma_p > 1/4^{(p-2,1)^+}$。因此，取 $M = (M_1, M_2)^+$，并结合假设(7)可推出(10)与(23)，我们可以看到，定理 1 的结论是命题 1、命题 2 以及 Banach 不动点定理的直接推论。由此，定理 1 得证。

4. 总结

本文在三维光滑有界区域 Ω 中，考虑了一类稳态不可压缩双种群趋化－非牛顿流体耦合模型，证明了问题强解的存在唯一性。这类系统面临趋化效应、竞争动力学及流体影响的挑战，且具有强耦合性与非线性性。为克服上述困难，本文基于 Stokes 问题和趋化方程的正则性结果，重构方程组并定义合适的函数空间，通过一系列计算，在小数据的假设下，利用 Banach 不动点定理完成证明。且在物理意义上，该模型稳态解体现了非牛顿流体粘性、对流、压力与趋化驱动力的耦合平衡，种群扩散、趋化及物质运输相互抵消，形成了稳定定常流场与空间分布结构。在生物学上，则对应两种群稳定共存，反映微生物群落的可持续生态格局。同时，本研究需在小数据假设下进行讨论，具有一定的局限性，且对于非稳态下模型解的存在性仍需进一步探讨。

基金项目

吉林省科技发展计划项目(吉林省自然科学基金：No. 20240101289JC)。

参考文献

[1] Höfer, T., Sherratt, J.A. and Maini, P.K. (1995) Cellular Pattern Formation during Dictyostelium Aggregation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **85**, 425-444. https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00075-f

[2] Alt, W. and Lauffenburger, D.A. (1987) Transient Behavior of a Chemotaxis System Modelling Certain Types of Tissue Inflammation. *Journal of Mathematical Biology*, **24**, 691-722. https://doi.org/10.1007/bf00275511

[3] Chaplain, M.A.J. and Lolas, G. (2006) Mathematical Modelling of Cancer Invasion of Tissue: Dynamic Heterogeneity. *Networks & Heterogeneous Media*, **1**, 399-439. https://doi.org/10.3934/nhm.2006.1.399

[4] Hirata, M., Kurima, S., Mizukami, M. and Yokota, T. (2017) Boundedness and Stabilization in a Two-Dimensional Two-Species Chemotaxis-Navier-Stokes System with Competitive Kinetics. *Journal of Differential Equations*, **263**, 470-490. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.02.045

[5] Cao, X., Kurima, S. and Mizukami, M. (2018) Global Existence and Asymptotic Behavior of Classical Solutions for a 3D Two-Species Chemotaxis-Stokes System with Competitive Kinetics. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 3138-3154. https://doi.org/10.1002/mma.4807

[6] Jin, H. and Xiang, T. (2019) Convergence Rates of Solutions for a Two-Species Chemotaxis-Navier-Stokes Sytstem with Competitive Kinetics. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **24**, 1919-1942. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018249

[7] Cao, X., Kurima, S. and Mizukami, M. (2019) Global Existence and Asymptotic Behavior of Classical Solutions for a 3D Two-Species Keller-Segel-Stokes System with Competitive Kinetics. *Funkcialaj Ekvacioj*, **62**, 387-408. https://doi.org/10.1619/fesi.62.387

[8] Zheng, P., Willie, R. and Mu, C. (2020) Global Boundedness and Stabilization in a Two-Competing-Species Chemotaxis-Fluid System with Two Chemicals. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **32**, 1371-1399. https://doi.org/10.1007/s10884-019-09797-4

[9] Zheng, P. and Willie, R. (2020) Global Weak Solutions and Eventual Smoothness in a 3D Two-Competing-Species Chemotaxis-Navier-Stokes System with Two Consumed Signals. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **43**, 3773-3785. https://doi.org/10.1002/mma.6154

[10] Bousbih, H. (2019) Global Weak Solutions for a Coupled Chemotaxis Non-Newtonian Fluid. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **24**, 907-929. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018212

[11] Galdi, G.P. (1994) An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3866-7

[12] Arada, N. (2012) A Note on the Regularity of Flows with Shear-Dependent Viscosity. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **75**, 5401-5415. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.04.040