Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 227-231
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164107

Hans汉斯

问题求解与命题的形成

——以一个三角函数最值问题的推广为例

郝伟静

青岛工学院通识教育学院，山东 青岛

收稿日期：2026年3月11日；录用日期：2026年4月11日；发布日期：2026年4月23日

摘　要

在给出锐角三角形中一三角式最值问题的新解法基础上，对该问题进行了一系列推广。这一过程中，对问题对象数学结构相似性的联想、新变量的引入、问题关键的把握，以及问题的转化是问题求解和新命题形成的重要手段。

关键词

三角函数式最值，凸n边形中三角函数式最值，命题形成

Problem Solving and Proposition Formation

—Taking the Generalization of a Trigonometric Function Extremum Problem as an Example

Weijing Hao

School of General Education, Qingdao University of Technology, Qingdao Shandong

Received: March 11, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

Abstract

Based on a new solution to an extremum problem involving trigonometric expressions in an acute triangle, this paper carries out a series of generalizations of the problem. In this process, association via the similarity of the mathematical structures of problem objects, introduction of new variables, grasping the key points of the problem, and transformation of the problem serve as important approaches to problem solving and the formation of new propositions.

文章引用: 郝伟静. 问题求解与命题的形成[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 227-231.
DOI: 10.12677/pm.2026.164107

Keywords

Extremum of Trigonometric Function, Extremum of Trigonometric Function in Convex N-Gon, Proposition Formation

1. 引言

在高中新课程标准中，明确提出了要培养学生发现和分析问题，形成命题的能力。这一能力的养成一方面在于对实际情景的数学化训练，另外一个重要途径则需要善于对已有数学命题进行拓展、重组，三角问题往往是这一训练的重要载体，这里提供的是一个锐角三角形中三角函数式最值问题的一系列推广。

2. 初始问题及解

原问题：已知锐角$\triangle ABC$，求$\dfrac{\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)^2}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\dfrac{27}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}$的最小值[1]。

分析：目标三角函数式中出现了$\cos\frac{A}{2}$、$\cos\frac{B}{2}$、$\cos\frac{C}{2}$的和与积的形式，从结构上联想到均值不等式，从而得到如下解法：

令$\cos\frac{A}{2}=a$，$\cos\frac{B}{2}=b$，$\cos\frac{C}{2}=c$

则，原式

$$=\frac{(a+b+c)^2}{abc}+\frac{27}{a+b+c} \tag{1}$$

由三元均值不等式$abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{(a+b+c)^3}{27}$

有$\frac{1}{abc}\ge\frac{27}{(a+b+c)^3}$

则(1)

$$\ge\frac{27}{a+b+c}+\frac{27}{a+b+c}=\frac{54}{a+b+c} \tag{2}$$

又因为$a+b+c=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$。当且仅当$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时，“=”成立。

所以$\frac{1}{a+b+c}\ge\frac{2}{3\sqrt{3}}$

则(2) $\ge 54\times\frac{2}{3\sqrt{3}}=12\sqrt{3}$

所以 $\dfrac{\left(\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}\right)^2}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}+\dfrac{27}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$ 的最小值为 $12\sqrt{3}$。当且仅当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时，取最小值。

3. 进一步推广的准备

从上一节的求解中可以看出，原问题的关键是判断 $\dfrac{\left(\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}\right)^2}{\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}$ 是否有最值。为讨论的方便，下面从其更简单的形式 $\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{\cos A\cos B\cos C}$ 出发探讨其最值的存在性。

命题 1：在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{\cos A\cos B\cos C}$ 存在最值。

事实上，令 $\cos A=a$， $\cos B=b$， $\cos C=c$

$$\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\cos A\cos B\cos C}=\frac{a+b+c}{abc}$$

由三元均值不等式 $abc\le\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3=\dfrac{(a+b+c)^3}{27}$

所以 $\dfrac{1}{abc}\ge\dfrac{27}{(a+b+c)^3}$

原式 $\ge\dfrac{27}{(a+b+c)^2}$， 当且仅当 $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ 时， “ $=$ ” 成立

因为 $a+b+c=\cos A+\cos B+\cos C\le\dfrac{3}{2}$

那么 $(a+b+c)^2\le\dfrac{9}{4}$， $\dfrac{1}{(a+b+c)^2}\ge\dfrac{4}{9}$

所以原式 ≥ 12。

本命题是关于锐角三角形中余弦结构的最值，那么其正弦结构形式是否存在最值呢？我们有如下命题。

命题 2：在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}$ 存在最值[2]。

令 $\sin A=a$， $\sin B=b$， $\sin C=c$

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{a+b+c}{abc}$$

同理，利用三元均值不等式可得，原式 ≥ 4。

不仅如此，该问题还可以由锐角三角形推广到凸 n 边形。

4. 在凸 n 边形中的情形

命题 3：在凸 n 边形中，$\dfrac{\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n}{\sin x_1\sin x_2\cdots\sin x_n}$ 存在最值，其中 x_1， x_2， $\cdots$， x_n 为凸 n 边形的 n 个内角。

事实上，令 $\sin x_1 = m_1$， $\sin x_2 = m_2$， $\cdots$， $\sin x_n = m_n$

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n}{\sin x_1 \sin x_2 \cdots \sin x_n} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{m_1 m_2 \cdots m_n}$$

由 n 元均值不等式 $m_1 m_2 \cdots m_n \le \left(\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n}\right)^n$

$$\frac{1}{m_1 m_2 \cdots m_n} \ge \frac{n^n}{\left(m_1 + m_2 + \cdots + m_n\right)^n}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时，“$=$”成立

这里我们进一步利用凸函数的性质来求其最值。

因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为凸 n 边形的 n 个内角，所以 $0 < x_i < \pi$，$i = 1,2,3,\cdots,n$，且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (n-2)\pi$。

由于函数 $y = \sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内为凸函数，对 $(0,\pi)$ 内的任意值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n}{n} \le \sin \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \sin \frac{(n-2)\pi}{n}$$

所以 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_n \le n \sin \frac{(n-2)\pi}{n}$，等号在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{(n-2)\pi}{n}$ 时成立。

$$\frac{1}{\left(m_1 + m_2 + \cdots + m_n\right)^{n-1}} \ge \frac{1}{n^{n-1}\left(\sin \frac{(n-2)\pi}{n}\right)^{n-1}}$$

$$\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{m_1 m_2 \cdots m_n} \ge \frac{n^n}{\left(m_1 + m_2 + \cdots + m_n\right)^{n-1}} \ge \frac{n^n}{n^{n-1}\left(\sin \frac{(n-2)\pi}{n}\right)^{n-1}} = \frac{n}{\left(\sin \frac{(n-2)\pi}{n}\right)^{n-1}}$$

以上是在凸 n 边形中，其内角的正弦和与内角正弦积的比存在最值，下面探讨其余弦结构的三角函数式最值是否存在。

考虑到，$y = \cos x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 为凸函数，在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 为凹函数，那么通过三角函数的伸缩变换，可得命题 4。

命题 4: 在凸 n 边形中，$\dfrac{\cos \frac{x_1}{2} + \cos \frac{x_2}{2} + \cdots + \cos \frac{x_n}{2}}{\cos \frac{x_1}{2} \cos \frac{x_2}{2} \cdots \cos \frac{x_n}{2}}$ 存在最值，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为凸 n 边形的 n 个内角。

事实上，令 $\cos \frac{x_1}{2} = v_1$， $\cos \frac{x_2}{2} = v_2$， $\cdots$， $\cos \frac{x_n}{2} = v_n$

$$\frac{\cos \frac{x_1}{2} + \cos \frac{x_2}{2} + \cdots + \cos \frac{x_n}{2}}{\cos \frac{x_1}{2} \cos \frac{x_2}{2} \cdots \cos \frac{x_n}{2}} = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}{v_1 v_2 \cdots v_n}$$

同理，由 n 元均值不等式得 $\frac{1}{v_1 v_2 \cdots v_n} \ge \frac{n^n}{\left(v_1 + v_2 + \cdots + v_n\right)^n}$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时，“$=$”成立

$$v_1+v_2+\cdots+v_n=\cos\frac{x_1}{2}+\cos\frac{x_2}{2}+\cdots+\cos\frac{x_n}{2}$$

因为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为凸 n 边形的 n 个内角，所以 $0<x_i<\pi,i=1,2,\cdots,n$。那么 $0<\frac{x_i}{2}<\frac{\pi}{2},i=1,2,\cdots,n$，且 $\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{2}=\frac{(n-2)\pi}{2}$。

由于函数 $y=\cos x$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 为凸函数，对 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内的任意值 $\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{2}$，有

$$\frac{\cos\frac{x_1}{2}+\cos\frac{x_2}{2}+\cdots+\cos\frac{x_n}{2}}{n}\le\cos\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{2n}=\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

所以 $\cos\frac{x_1}{2}+\cos\frac{x_2}{2}+\cdots+\cos\frac{x_n}{2}\le n\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}$，等号在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{(n-2)\pi}{n}$ 时成立。

若 $n=3$，则当 $\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{2}=\frac{x_3}{2}=\frac{\pi}{6}$ 时，$\cos\frac{x_1}{2}+\cos\frac{x_2}{2}+\cos\frac{x_3}{2}$ 有最大值 $3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$。

经过以上的分析，当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{(n-2)\pi}{n}$ 时，

$$v_1+v_2+\cdots+v_n=\cos\frac{x_1}{2}+\cos\frac{x_2}{2}+\cdots+\cos\frac{x_n}{2}\le n\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

$$\frac{1}{(v_1+v_2+\cdots+v_n)^{n-1}}\ge\frac{1}{n^{n-1}\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^{n-1}}$$

$$\frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{v_1v_2\cdots v_n}\ge\frac{n^n}{(v_1+v_2+\cdots+v_n)^{n-1}}\ge\frac{n^n}{n^{n-1}\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^{n-1}}=\frac{n}{\left(\cos\frac{(n-2)\pi}{2n}\right)^{n-1}}$$

事实上，该三角函数式的正切结构、余切结构也存在最值。

命题 5： 在凸 n 边形中，$\dfrac{\tan\frac{x_1}{2}+\tan\frac{x_2}{2}+\cdots+\tan\frac{x_n}{2}}{\tan\frac{x_1}{2}\tan\frac{x_2}{2}\cdots\tan\frac{x_n}{2}}$ 存在最值，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为凸 n 边形的 n 个内角。

命题 6： 在凸 n 边形中，$\dfrac{\cot\frac{x_1}{2}+\cot\frac{x_2}{2}+\cdots+\cot\frac{x_n}{2}}{\cot\frac{x_1}{2}\cot\frac{x_2}{2}\cdots\cot\frac{x_n}{2}}$ 存在最值，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为凸 n 边形的 n 个内角。

在以上问题求解和新命题获得的过程中，我们可以看到，引进适当变量可以使问题得到简化；而对于问题中数学表达式结构的相似性思考则可以使我们迅速锁定解题方案；对问题中关键部分的思考以及其它三角函数的转换可以得到新的数学命题。

参考文献

[1] 陶兴红. 数学问题解答 2625 [J]. 数学通报, 2021(10): 64-65.

[2] 刘培杰. 新编中学数学解题方法全书上卷: 高中版[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2006 :299.