

基于正规战的兰彻斯特方程的解析研究

张 辉^{1*}, 刘俊先²

¹火箭军工程大学基础部, 陕西 西安

²国防科技大学信息系统工程全国重点实验室, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年3月11日; 录用日期: 2026年4月16日; 发布日期: 2026年4月27日

摘 要

研究基于正规战的兰彻斯特方程的解析解的算法问题, 包括红蓝双方兵力关于时间的函数解析式和红蓝双方兵力在相平面上的函数关系式。首先利用变换得到红蓝各自兵力满足的二阶常系数齐次线性微分方程, 由特征方程再结合初值条件得到了红蓝兵力与时间的函数解析式, 然后通过变形得到一阶的齐次方程, 利用变量代换求解得到红蓝双方兵力的函数关系式, 最后进行案例仿真并通过MATLAB编程描绘红蓝双方兵力的曲线示意图, 旨在对正规战兰彻斯特方程的解有更深入的理解和掌握。

关键词

正规战, 兰彻斯特方程, 特解, 通解, 特征方程, 齐次方程

Analytical Research on Lancaster Equation Based on Regular Warfare

Hui Zhang^{1*}, Junxian Liu²

¹Department of Basic Courses, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi

²National Key Laboratory of Information Systems Engineering, National University of Defense Technology, Changsha Hunan

Received: March 11, 2026; accepted: April 16, 2026; published: April 27, 2026

Abstract

This paper studied the calculation method of the analytical solution to the Lanchester equation based on regular warfare, including the analytical expression of the functions of the red and blue forces with respect to time and the functional relationship between the red and blue forces on the phase plane. Firstly, the second-order constant coefficient homogeneous linear differential equations satisfied by the respective forces of the red and blue are obtained through transformation. The

*第一作者。

文章引用: 张辉, 刘俊先. 基于正规战的兰彻斯特方程的解析研究[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 274-282.

DOI: 10.12677/pm.2026.164112

analytical expression of the function between the red and blue forces and time is obtained by combining the characteristic equation with the initial conditions. Then, the first-order homogeneous equation is obtained through deformation, and the functional relationship between the red and blue forces is solved through variable substitution. Finally, a case simulation is conducted and the curve diagram of the red and blue forces is drawn through MATLAB programming, aiming to have a deeper understanding and mastery of the solution of the Lanchester equation in regular warfare.

Keywords

Regular Warfare, Lancaster Equation, Special Solution, General Solution, Characteristic Equation, Homogeneous Equation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

兰彻斯特方程是 1915 年由英国工程师弗雷德里克·威廉·兰彻斯特提出的战斗动态理论, 通过微分方程组描述敌对双方兵力消灭过程, 适用于现代战争模拟和效能评估[1]。第二次世界大战后, 各国军事运筹学工作者根据实际作战的情况, 从不同角度对兰彻斯特方程进行了研究与扩展, 使兰彻斯特方程成为军事运筹学的重要基本理论之一。同时兰彻斯特方程与计算机作战模拟结合以后所构成的各种形式、各种规模的作战模型, 在军事决策的有关领域中得到了广泛应用[2]-[7]。

若以红蓝双方的作战单元数指标描述红蓝双方兵力的大小。假设只考虑红蓝双方兵力多少和战斗力强弱、红蓝双方的兵力因战斗及非战斗减员而减少、每方战斗减员率取决于双方的兵力和战斗力和每方非战斗减员率与本方兵力成正比。由于红蓝双方的一方都会对另一方造成战斗减员, 记蓝方对红方的战斗减员影响程度为 $f(x, y)$, 而红方对蓝方的战斗减员影响程度为 $g(x, y)$; 由于红蓝双方都会存在非战斗减员情形, 记红、蓝双方的非战斗减员率分别为 α (>0) 和 β (>0), αx 和 βy 分别表示红、蓝双方的非战斗减员程度。若记 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 分别表示红、蓝双方作战单元数的变化率, 且红、蓝双方初始的作战单元数分别为 x_0 和 y_0 , 可得红蓝双方作战模型的兰彻斯特方程[8]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) - \alpha x, \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) - \beta y, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

本文主要研究基于正规战(由 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 的表达式决定)的兰彻斯特方程(1)的解析解的计算方法, 利用不同的方法分别得到了红蓝双方兵力随时间变量的具体表达式和在相平面上红蓝双方兵力之间的内在联系, 为兰彻斯特方程在军事运筹中的应用提供了理论支撑。

2. 正规战兰彻斯特方程的建立

现考虑红蓝双方均以正规部队作战, 则红、蓝双方的一方战斗减员率只取决于另一方的兵力和战斗力,

记红方和蓝方每个作战单元的杀伤率分别为 $b (>0)$ 和 $a (>0)$, 则有 $f(x, y) = -ay$, $g(x, y) = -bx$, 进而可得红蓝双方采用正规战作战的兰彻斯特方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay - \alpha x, \\ \frac{dy}{dt} = -bx - \beta y, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

正规战兰彻斯特方程的核心研究是围绕大规模、有组织的正规作战场景, 量化分析双方作战力量的动态损耗规律与作战进程演变机制。它主要以双方作战单位可直接接触、火力覆盖均匀且兵力部署集中, 无明显隐蔽性和非对称作战优势, 重点探究作战力量初始规模、兵力补充速率、火力杀伤效能等关键参数, 与作战胜负、力量损耗速度、作战持续时间之间的内在关联。因此, 正规战兰彻斯特方程(2)解的研究是十分必要的, 进而如何得到其解析解也是值得关注的研究问题。

3. 正规战兰彻斯特方程的解析解

下面利用微分方程[9]的有关知识, 通过两种方法研究正规战兰彻斯特方程(2)的解析解的计算问题。

方法 1 利用二阶常系数齐次线性微分方程研究红蓝双方兵力随时间的变化规律

由方程(2)的第一个方程得, $y = \frac{1}{a} \left(-\frac{dx}{dt} - \alpha x \right)$, 且有 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -ay_0 - \alpha x_0$, 然将其代入到方程(2)的第二个方程得

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dx}{dt} + (\alpha\beta - ab)x = 0, \\ x(0) = x_0, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -ay_0 - \alpha x_0 \end{cases} \quad (3)$$

微分方程(3)是一个关于 $x(t)$ 的二阶常系数齐次线性微分方程[9]。

同理, 由(2)的第二个方程得, $x = -\frac{1}{b} \left(\frac{dy}{dt} + \beta y \right)$, 且有 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -bx_0 - \beta y_0$, 然后将其代入到方程(2)的第一个方程得

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dy}{dt} + (\alpha\beta - ab)y = 0 \\ y(0) = y_0, \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -bx_0 - \beta y_0 \end{cases} \quad (4)$$

微分方程(4)是一个关于 $y(t)$ 的二阶常系数齐次线性微分方程。

下面研究微分方程(3)和(4)满足初值条件的特解的求解问题。

微分方程(3)和(4)的特征方程[9]均为

$$r^2 + (\alpha + \beta)r + \alpha\beta - ab = 0 \quad (5)$$

记 $\Delta = (\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha\beta - ab) = (\alpha - \beta)^2 + 4ab$, 因为 α 、 β 、 a 和 b 均为正数, 则 $\Delta > 0$ 。此时特征方程(5)的两个根分别为

$$r_1 = \frac{-(\alpha + \beta) + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad r_2 = \frac{-(\alpha + \beta) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

此时, 微分方程(3)的通解为

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (6)$$

利用(3)的初值条件得

$$x(0) = C_1 + C_2 = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = r_1 C_1 + r_2 C_2 = -ay_0 - \alpha x_0$$

求解上两式可得

$$C_1 = \frac{r_2 x_0 + ay_0 + \alpha x_0}{r_2 - r_1} = \frac{x_0 \frac{-(\alpha + \beta) - \sqrt{\Delta}}{2} + ay_0 + \alpha x_0}{-\sqrt{\Delta}} = \frac{(\alpha - \beta - \sqrt{\Delta})x_0 + 2ay_0}{-2\sqrt{\Delta}},$$

$$C_2 = \frac{r_1 x_0 + ay_0 + \alpha x_0}{r_1 - r_2} = \frac{x_0 \frac{-(\alpha + \beta) + \sqrt{\Delta}}{2} + ay_0 + \alpha x_0}{\sqrt{\Delta}} = \frac{(\alpha - \beta + \sqrt{\Delta})x_0 + 2ay_0}{2\sqrt{\Delta}}$$

将 C_1 和 C_2 的表达式代入式(6)中即为微分方程(3)的特解, 即红方兵力的函数解析式。同理可得微分方程(4)满足初值条件的特解为

$$y(t) = C_3 e^{r_1 t} + C_4 e^{r_2 t} \quad (7)$$

其中

$$C_3 = \frac{r_2 y_0 + bx_0 + \beta y_0}{r_2 - r_1} = \frac{(\alpha - \beta - \sqrt{\Delta})y_0 + 2bx_0}{-2\sqrt{\Delta}}, \quad C_4 = \frac{r_1 y_0 + bx_0 + \beta y_0}{r_1 - r_2} = \frac{(\alpha - \beta + \sqrt{\Delta})y_0 + 2bx_0}{2\sqrt{\Delta}}$$

式(7)即为蓝方兵力的函数解析式。

特别地, 当 $\alpha\beta - ab = 0$ 时, 微分方程(3)满足初值条件的特解为

$$x(t) = \frac{ay_0 + \alpha x_0}{\alpha + \beta} \left[e^{-(\alpha + \beta)t} - 1 \right] + x_0$$

微分方程(4)满足初值条件的特解为

$$y(t) = \frac{bx_0 + \beta y_0}{\alpha + \beta} \left[e^{-(\alpha + \beta)t} - 1 \right] + y_0$$

方法 2 利用齐次方程研究红蓝双方兵力的关系

将微分方程(2)中第二个方程除以第一个方程得

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{-bx - \beta y}{-ay - \alpha x} = \frac{bx + \beta y}{ay + \alpha x}, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (8)$$

事实上, 一阶微分方程(8)是齐次方程[9]。下面研究齐次方程(8)的特解的计算问题。

令 $t = \frac{y}{x}$, 则 $y = xt$, $\frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx}$, 代入方程(8)第一个方程中得

$$t + x \frac{dt}{dx} = \frac{b + \beta t}{at + \alpha},$$

变形为

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{b + \beta t}{at + \alpha} - t = \frac{-at^2 + (\beta - \alpha)t + b}{at + \alpha},$$

分离变量得

$$\frac{at + \alpha}{-at^2 + (\beta - \alpha)t + b} dt = \frac{1}{x} dx$$

为方便求解不定积分继续变形为

$$\left[\frac{2at + \alpha - \beta}{at^2 + (\alpha - \beta)t - b} + \frac{\alpha + \beta}{at^2 + (\alpha - \beta)t - b} \right] dt = -\frac{2}{x} dx$$

上等式两边取不定积分得

$$\int \left[\frac{2at + \alpha - \beta}{at^2 + (\alpha - \beta)t - b} + \frac{\alpha + \beta}{at^2 + (\alpha - \beta)t - b} \right] dt = -2 \int \frac{1}{x} dx$$

即

$$\int \frac{1}{at^2 + (\alpha - \beta)t - b} d(at^2 + (\alpha - \beta)t - b) + (\alpha + \beta) \int \frac{1}{at^2 + (\alpha - \beta)t - b} dt = -2 \ln|x| + C_1$$

其中 C_1 为任意实数。

利用积分公式 $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C$ ($a > 0$) [9] 得

$$\ln|at^2 + (\alpha - \beta)t - b| + \ln x^2 + \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}} \ln \left| \frac{2at + \alpha - \beta - \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}}{2at + \alpha - \beta + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}} \right| = C_1$$

把 $t = \frac{y}{x}$ 代入上式可得

$$\ln|ay^2 + (\alpha - \beta)xy - bx^2| + \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}} \ln \varphi(x, y) = C_1,$$

其中 $\varphi(x, y) = \left| \frac{2ay + x \left[\alpha - \beta - \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab} \right]}{2ay + x \left[\alpha - \beta + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab} \right]} \right|$, 则有

$$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab} \ln|ay^2 + (\alpha - \beta)xy - bx^2| + (\alpha + \beta) \ln \varphi(x, y) = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab} C_1$$

进而

$$\ln|ay^2 + (\alpha - \beta)xy - bx^2|^{\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}} + \ln \varphi(x, y)^{\alpha + \beta} = C_2,$$

其中 $C_2 = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab} C_1$ 为任意实数。即

$$\ln \left\{ |ay^2 + (\alpha - \beta)xy - bx^2|^{\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}} \varphi(x, y)^{\alpha + \beta} \right\} = C_2$$

或

$$|ay^2 + (\alpha - \beta)xy - bx^2|^{\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}} \varphi(x, y)^{\alpha + \beta} = C,$$

其中 $C = e^{C_2}$ 。又 $y(x_0) = y_0$, 则有

$$C = |ay_0^2 + (\alpha - \beta)x_0y_0 - bx_0^2|^{\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}} \varphi(x_0, y_0)^{\alpha + \beta}$$

此时可得微分方程(8)满足初值条件的隐式特解为

$$|ay^2 + (\alpha - \beta)xy - bx^2|^{\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}} \varphi(x, y)^{\alpha + \beta} = |ay_0^2 + (\alpha - \beta)x_0y_0 - bx_0^2|^{\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4ab}} \varphi(x_0, y_0)^{\alpha + \beta} \quad (9)$$

式(9)也是红蓝双方兵力在相平面上的隐式函数关系式。

特别地, 若不考虑红蓝双方各自的非战斗减员率, 即 $\alpha = \beta = 0$, 则式(9)可简化为

$$ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 \quad (10)$$

式(10)刻画的是正规战兰彻斯特方程的平方律[10]。

4. 案例仿真

已知红、蓝双方的初始作战单元数分别为 $x_0 = 6$ 和 $y_0 = 3$, 若设 $a = 0.1$, $b = 0.025$, $\alpha = \beta = 0.01$, 则红蓝双方正规战的兰彻斯特方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.1y - 0.01x, \\ \frac{dy}{dt} = -0.025x - 0.01y, \\ x(0) = 6, \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad (11)$$

则 $\alpha\beta - ab = -0.0024 \neq 0$, 且 $\Delta = 0.01 > 0$, $r_1 = 0.04$, $r_2 = -0.06$, 即微分方程(11)的特解分别为

$$x(t) = 6e^{-0.06t}, \quad y(t) = 3e^{-0.06t} \quad (12)$$

即式(12)为红蓝双方兵力与时间的函数关系的显式解析式。

由式(12)利用 MATLAB 函数 plot 可描绘出红蓝双方兵力随时间的变化曲线, 同时也可利用 MATLAB 函数 ode45 对于微分方程(11)进行描绘曲线, 如图 1 所示。

由图 1 可知, 利用式(12)描绘的曲线和利用 ode45 函数描绘微分方程(11)红、蓝兵力随时间变化的曲线图是重合的, 说明式(12)刻画了红蓝双方兵力的内在规律。

对于微分方程(11), 利用式(9)代入化简可得

$$|0.1y^2 - 0.025x^2|^{0.1} \left| \frac{0.2y - 0.1x}{0.2y + 0.1x} \right|^{0.02} = 0$$

即

$$0.1y^2 - 0.025x^2 = 0 \text{ 或 } 0.2y - 0.1x = 0$$

进而

$$0.025x^2 = 0.1y^2 \text{ 或 } 0.1x = 0.2y$$

则有

$$x = 2y \text{ 或 } x = -2y \text{ (舍去)} \quad (13)$$

事实上, 式(13)与式(12)本质上是一致的, 体现了在所给条件下红方的兵力始终是蓝方兵力的 2 倍。当作战时间充分大时, 红方兵力和蓝方兵力几乎同时近似为零, 说明作战最终以平局收场。虽然初始时刻红方兵力是蓝方兵力的 2 倍, 但红方每个作战单元的杀伤率 b 的值仅为蓝方每个作战单元的杀伤率 a 的值的四分之一, 使得结局未必是红方获胜。这说明了红蓝双方正规战作战的结局与初始兵力、单元杀伤率、非战斗减员率等因素密切相关。

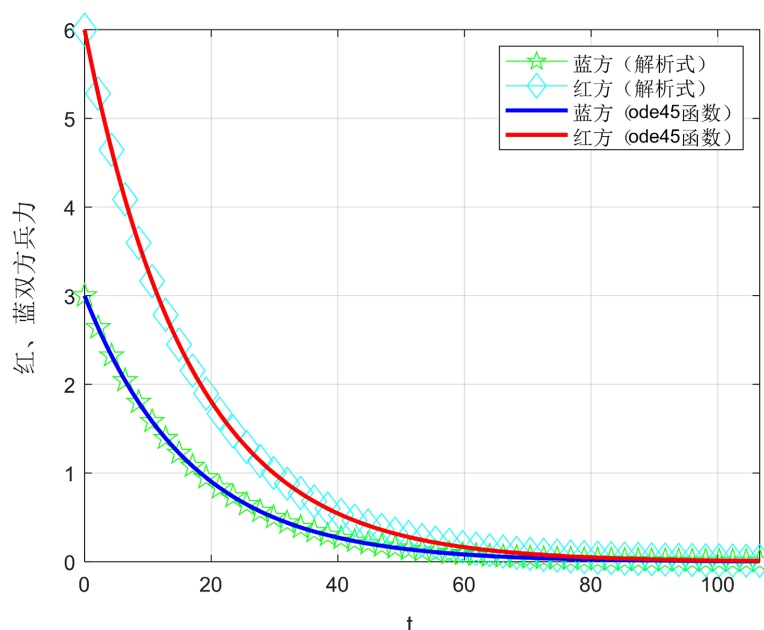


Figure 1. Curves showing the change in troop strength between the Red and Blue sides over time

图 1. 红蓝双方兵力随时间变化的曲线图

若把红方每个作战单元的杀伤率 b 的取值调整为 0.1 (和 a 的取值一样), 则红蓝双方正规战的兰彻斯特方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.1y - 0.01x, \\ \frac{dy}{dt} = -0.1x - 0.01y, \\ x(0) = 6, \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad (14)$$

则 $\alpha\beta - ab = -0.0009 \neq 0$, 且 $\Delta = 0.04 > 0$, $r_1 = 0.09$, $r_2 = -0.11$, 即微分方程(14)的特解分别为

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{0.09t} + \frac{9}{2}e^{-0.11t}, \quad y(t) = -\frac{3}{2}e^{0.09t} + \frac{9}{2}e^{-0.11t} \quad (15)$$

即式(15)为红蓝双方兵力与时间的函数关系的显式解析式。利用 MATLAB 软件描绘出红蓝双方兵力随时间的变化曲线图, 如图 2 所示。

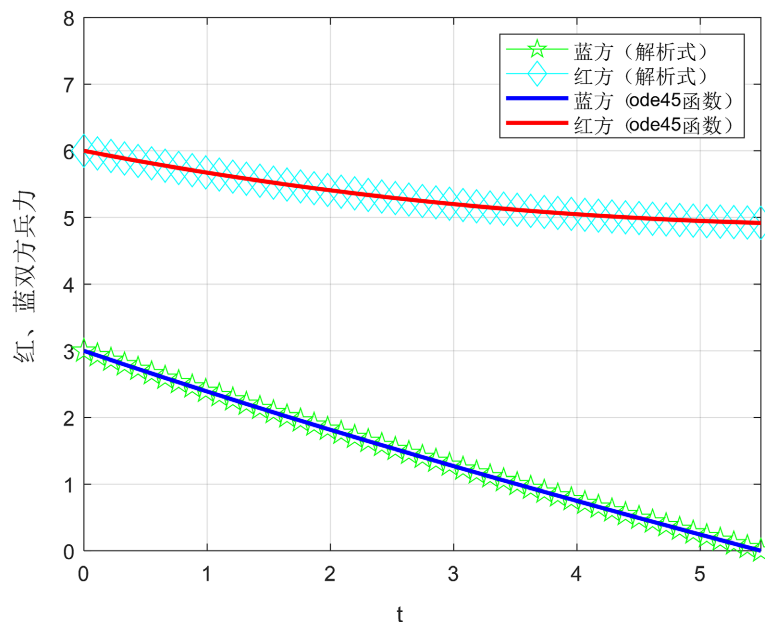


Figure 2. Curves showing the change in troop strength between the Red and Blue sides over time
图 2. 红蓝双方兵力随时间变化的曲线图

可以发现, 初始状态时红方的兵力是蓝方兵力的 2 倍, 当具有相同的杀伤率和非战斗减员率时, 蓝方在 5.492 时间后兵力几乎为零, 而此时红方兵力为 4.918475, 红方获胜。这说明了在单元杀伤率、非战斗减员率等因素相同的条件下, 红蓝双方正规战作战的结局与初始兵力密切相关, 谁的初始兵力大谁就能获胜。

5. 小结

本文主要研究了基于正规战的兰彻斯特方程的解析解的算法问题, 得到了红蓝双方兵力关于时间的函数解析式和红蓝双方兵力在相平面上的函数关系式, 并通过具体案例进行了 MATLAB 仿真, 有效促进了正规战兰彻斯特方程的解的深入研究。事实上, 基于游击战或者混合战的兰彻斯特方程[8]的解的算法问题, 鉴于微分方程中个别项的表达式的特征, 兵力的函数解析式和相平面上的函数关系式不易得到, 这可作为后续有待持续研究的热点问题。

同时, 由于正规战的兰彻斯特方程(2)中的系数考虑的均是常数, 如果把这些常数变为一般函数, 那么方程(2)的解析研究是非常复杂的。此时, 通常可以考虑利用 MATLAB 软件的 ode45 函数进行数值研究, 也可以推广到其他类型的兰彻斯特方程中。

基金项目

信息系统工程全国重点实验室稳定支持资助项目(编号: 6142101240101)。

参考文献

- [1] 兰彻斯特方程[EB/OL]. <https://baike.baidu.com/item/%E5%85%B0%E5%BD%BB%E6%96%AF%E7%89%B9%E6%96%B9%E7%A8%8B/9761321>, 2026-04-17.
- [2] 陶鹏, 丁凡. 兰彻斯特方程在分布式海战背景下的应用[J]. 火力与指挥控制, 2024, 49(10): 82-90.
- [3] 吕学志. 基于非连续兰彻斯特方程的战役态势预测方法[J]. 火力与指挥控制, 2024, 49(7): 58-63.

- [4] 刘芳名, 王凯. 基于兰彻斯特方程战争中人的作用研究[J]. 舰船电子工程, 2023, 43(11): 157-160.
- [5] 毕凯, 李大喜. 基于多元兰彻斯特方程的电火一体作战模型[J]. 空军工程大学学报, 2022, 23(5): 96-100.
- [6] 郭一鸣, 陈春良. 基于排队论和兰彻斯特方程的战时维修保障装备数量确定[J]. 火力与指挥控制, 2021, 46(11): 124-129.
- [7] 谢英超, 程燕. 一类非线性兰彻斯特方程的摄动解[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(13): 270-275.
- [8] 张辉. 军事建模案例与实战[M]. 北京: 国防工业出版社, 2021.
- [9] 同济大学数学科学学院. 高等数学(上册) [M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [10] 杨戈方. 基于兰切斯特方程的战斗时滞分析[J]. 火力与指挥控制, 2018, 43(10): 109-112.