**Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 283-291**
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164113

Hans汉斯

# 内射T-模上的广义Schanuel引理

**许娅捷**

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2026年3月11日；录用日期：2026年4月16日；发布日期：2026年4月27日

## 摘　要

**本研究桁架上的内射模，证明了若以下两个T-模序列正合**

$$\star \longrightarrow M \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow \star$$

$$\star \longrightarrow M \xrightarrow{i'} E_1' \xrightarrow{f_1'} E_2' \xrightarrow{\pi'} Q' \longrightarrow \star$$

**其中 $E_i, E_i'$ 为内射T-模，且 $Abs(E_i) \neq \varnothing, Abs(E_i') \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$，则 $Q' \times E_2 \times E_1' \cong Q \times E_2' \times E_1$。**

## 关键词

桁架，桁架上的内射模，广义Schanuel引理

# Generalized Schanuel Lemma on Injective T-Modules

**Yajie Xu**

College of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: March 11, 2026; accepted: April 16, 2026; published: April 27, 2026

## Abstract

**In this paper, we study injective modules over trusses. It is proven that if the following two sequences of T-modules are exact**

$$\star \longrightarrow M \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow \star$$

$$\star \longrightarrow M \xrightarrow{i'} E_1' \xrightarrow{f_1'} E_2' \xrightarrow{\pi'} Q' \longrightarrow \star$$

**where $E_i, E_i'$ are injective T-modules with $Abs(E_i) \neq \varnothing, Abs(E_i') \neq \varnothing$ for $(i = 1, 2)$, then $Q' \times E_2 \times E_1' \cong Q \times E_2' \times E_1$.**

文章引用: 许娅捷. 内射 T-模上的广义 Schanuel 引理[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 283-291.
DOI: 10.12677/pm.2026.164113

**Keywords**

**Truss, Injective Modules Over Trusses, Generalized Schanuel Lemma**



## 1. 引言

代数学的发展始终伴随着对结构的不断抽象与推广。在经典环与模理论中，投射模与内射模作为同调代数中的核心概念，已形成丰富的理论体系，并在表示论、代数几何与数学物理中发挥重要作用。然而，随着对量子杨－巴克斯特方程集合论解的深入研究，传统代数结构如群、环在描述其解集时显得局限，促使学者引入更具灵活性的代数系统。

堆(heap)作为一种不带固定单位元的群结构，由 Prüfer 在[1]中引入，Baer 在[2]中进一步系统化，其三元运算的形式为后续更复杂的代数结构奠定了基础。随后，Rump 在[3]中提出支架(brace)结构，用以系统研究量子杨－巴克斯特方程的非退化对合解，进一步将量子杨－巴克斯特方程解集的代数刻画与环论联系起来。

2019 年，Brzeziński 在[4]中引入了桁架(truss)的概念，通过将环中的阿贝尔群结构替换为阿贝尔堆，成功摆脱了对零元的依赖。桁架不仅自然包含环与支架作为其特例，更在描述量子杨－巴克斯特方程解的分类与构造中展现出优越的适应性。更重要的是，桁架结构的出现推动了其上模范畴的建立。

与经典环上模范畴不同，桁架上的模范畴($T$-模范畴)建立在阿贝尔堆的基础上，不依赖零元与阿贝尔群结构，因而呈现出一系列本质特殊性。首先，$T$-模范畴不存在零对象，无法利用零元定义平凡子模、平凡商模，使得核、余核、像等基本构造必须脱离零元重新刻画。其次，吸收元取代零元成为核心不变量，吸收元的存在性与唯一性直接影响子模、正合列、内射/投射性等关键概念的良定性，是连接堆运算与模作用的枢纽。第三，$T$-模以三元堆运算为基础，同态、正合性、分解与扩张均需满足三元运算相容性。最后，$T$-模范畴是非阿贝尔范畴，不具备核与余核的对称性、短五引理等阿贝尔范畴基本性质，同调代数的标准工具与论证范式不再适用。这些特殊性给理论推广带来显著挑战：一是基础概念重构压力，核需定义为相对于某吸收元，正合列依赖特定像元，短正合列、直和、自由模等均需在无零元框架下重新给出等价刻画；二是同调方法的技巧难以直接沿用，经典图追踪、蛇引理、马蹄引理、投射/内射分解等无法直接迁移，必须适配三元运算与非阿贝尔范畴结构；三是内射性与投射性的推广障碍，零元缺失导致内射包、投射覆盖、同伦、扩张群等构造失去天然起点，需借助吸收元迂回定义；四是 Schanuel 引理等结论的推广困难，$T$-模范畴无零对象，必须借助内射性、吸收元非空及乘积模封闭性重新构造同构与交换图。

因此许多经典结论需重新验证或修正。2020 年，Brzeziński 在[5]中发展了桁架上模的基本理论，包括子模等概念；随后，Brzeziński 和 Rybolowicz 在[6]中研究了桁架上模的直和与自由模结构；Brzeziński、Rybolowicz 和 Saracco 在[7]中探讨了桁架模范畴之间的函子关系，并定义了投射模与正合列等概念；王永铎、韩淑娟等人在[8]中首次定义了内射 $T$-模并证明了短正合列情形下内射 $T$-模的 Schanuel 引理。这些工作逐步构建了桁架模的同调代数框架。

而在经典环与模范畴中，Schanuel 引理作为同调代数的基础结论，其各类推广形式始终是研究热点。如：廖貽华在[9]中对 Schanuel 引理及其相关性质做了进一步推广，拓展了引理的适用场景；刘兴、黄福生在[10]中将 Schanuel 引理推广至内射半模范畴，实现了该引理在半模体系中的延伸；张力宏、李俊杰

在[11]中探究了遗传挠理论投射模上的 Schanuel 引理，丰富了特定模类下的引理内涵；张力宏、邓瑶又在[12]中研究了遗传挠理论拟内射模上的 Schanuel 引理，将 Schanuel 引理的研究范围进一步拓展至拟内射模类。这些学者在经典模论框架下对 Schanuel 引理的系列研究，为桁架模范畴中相关结论的探索提供了重要的思路与方法借鉴。

受上述文献的启发，本文在[8]的基础上，将内射 $T$-模的 Schanuel 引理推广到长度为 2 的内射分解正合列，并进一步得到任意有限长内射分解下的广义形式，从而丰富了桁架上模的同调理论，为后续研究如导出函子与扩张理论提供支撑。

## 2. 预备知识

### 2.1. 基本定义

**定义 2.1.1** [4] 设 $H$ 是一个集合。如果 $H$ 上有三元运算：

$$[-,-,-]:H\times H\times H\to H,\ \ (x,y,z)\mapsto[x,y,z],$$

且对任意的 $v,w,x,y,z\in H$，满足下列两个条件：

结合律：$[v,w,[x,y,z]]=[[v,w,x],y,z]$,

Mal’cev 等式：$[x,x,y]=[y,x,x]=y$，

那么称 $H$ 是堆。进一步地，若对任意的 $x,y,z\in H$，$[x,y,z]=[z,y,x]$，则称 $H$ 是阿贝尔堆。

**定义 2.1.2** [4] 设 $H$ 是堆，$S$ 是 $H$ 的子集。如果 $S$ 对于 $H$ 的三元运算封闭，那么称 $S$ 是 $H$ 的子堆。

**定义 2.1.3** [4] 设 $H,\ H'$ 是堆。若映射 $f:H\to H'$ 满足

$$f([x,y,z])=[f(x),f(y),f(z)],$$

对任意的 $x,y,z\in H$，则称 $f$ 是从 $H$ 到 $H'$ 的堆同态。

**定义 2.1.4** [5] 阿贝尔堆 $H$ 的每一个非空子堆 $S$ 都在 $H$ 上定义了一个同余关系：

$$a\sim_S b\Leftrightarrow\exists\, s\in S,\ [a,b,s]\in S\Leftrightarrow\forall\, s\in S,\ [a,b,s]\in S.$$

进而，$\sim_S$ 的等价类构成了阿贝尔堆，其运算由 $H$ 中的运算诱导而来，即 $[\overline{a},\overline{b},\overline{c}]=\overline{[a,b,c]}$。其中，对任意的 $x\in H$，$\overline{x}$ 表示 $x$ 在 $H/\sim_S$ 中的等价类。$H/\sim_S$ 称为商堆。并用 $H/S$ 来表示。对任意的 $s\in S$，$s$ 所在的等价类等于 $S$，即 $\overline{s}=S$。

**定义 2.1.5** [6] 设 $H$ 是堆，$f:H\to H$ 是堆同态。如果 $e\in\operatorname{Im}f$，那么称集合

$$\operatorname{Ker}_e(f):=f^{-1}(e)=\{x\in H\mid f(x)=e\}$$

为 $f$ 相对于 $e$ 的核。

**注 2.1.6** [6] $\operatorname{Ker}_e f$ 是 $H$ 的子堆。虽然 $e$ 的不同选择将产生不同的 $\operatorname{Ker}_e f$，但是它们彼此同构，从而商堆 $H/\operatorname{Ker}_e f$ 并不依赖于 $e$ 的选择。此外，子堆关系 $\operatorname{Ker}_e f$ 与下面定义的核关系相同：

$x\operatorname{Ker}(f)\,y$ 当且仅当 $f(x)=f(y)$。

因此，我们用 $\operatorname{Ker}(f)$ 来表示 $\operatorname{Ker}_e(f)$，并将其称为 $f$ 的核。

**定义 2.1.7** [6] 桁架 $T$ 是带有三元运算 $[-,-,-]$ 和结合的二元运算 $\cdot$ 的集合，其中 $(T,[-,-,-])$ 构成阿贝尔堆，且对任意的 $w,x,y,z\in T$，满足：

$$w\cdot[x,y,z]=[w\cdot x,w\cdot y,w\cdot z],$$

$$[x,y,z]\cdot w=[x\cdot w,y\cdot w,z\cdot w].$$

若 $T$ 关于二元运算 $\cdot$ 满足交换律（即对任意的 $x,y\in T$，有 $x\cdot y=y\cdot x$），则称 $T$ 为阿贝尔桁架。

**定义 2.1.8** [7] 设 $T$ 是桁架，$M$ 是阿贝尔堆。如果 $T$ 在 $M$ 上的左作用

$$\lambda_M : T\times M \to M,\ (t,m)\mapsto t\cdot m$$

满足以下条件：

1) $t\cdot(t'\cdot m)=(tt')\cdot m$；

2) $[t,t',t'']\cdot m=[t\cdot m,t'\cdot m,t''\cdot m]$；

3) $t\cdot[m,m',m'']=[t\cdot m,t\cdot m',t\cdot m'']$，

对任意的 $t,t',t''\in T$，$m,m',m''\in M$，那么称 $M$ 是 $T$ 上的左模，简记为左 $T$-模(下文中的 $T$-模都为左 $T$-模)。

**注 2.1.9** [7] 设 $M$ 是 $T$-模，$N$ 是 $M$ 的子堆。若对所有的 $x\in T,\ n\in N,\ x\cdot n\in N$，则称 $N$ 是 $M$ 的子 $T$-模。

**定义 2.1.10** [5] 设 $f:M\to N$ 是 $T$-模 $M$ 和 $N$ 之间的映射。如果对任意的 $m,m',m''\in M$，$t\in T$，

$$f([m,m',m''])=[f(m),f(m'),f(m'')],\ f(t\cdot m)=t\cdot f(m),$$

那么称 $f$ 是从 $M$ 到 $N$ 的 $T$-模同态。

**定义 2.1.11** [5] 设 $T$ 是桁架，$M$ 是 $T$-模，$e\in M$。若对任意的 $t\in T$，$t\cdot e=e$，则称 $e$ 是 $M$ 的吸收元。$M$ 的所有吸收元构成的集合记作

$$Abs(M)=\{m\in M\mid t\cdot m=m,\forall t\in T\}.$$

**注 2.1.12** [5] 若桁架 $T$ 的吸收元存在，则一定是唯一的。

**定义 2.1.13** [5] 设 $M$ 是非空 $T$-模。对任意的 $e\in M$，定义 $\triangleright_e : T\times M\to M$ 作用如下：

$$t\triangleright_e m=[t\cdot m,t\cdot e,e],$$

其中 $m\in M$，$t\in T$，称在这种作用下构成的 $T$-模 $M$ 是关于 $e$ 的诱导 $T$-模，记作 $M^{(e)}$。若 $N$ 是 $M$ 的非空子堆，并且对任意的 $t\in T$，$n,e\in N$，有 $t\triangleright_e n\in N$，则称 $N$ 是 $M$ 的诱导子模。

**定义 2.1.14** [7] 设 $M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}P$ 是非空 $T$-模序列。如果存在 $e\in \operatorname{Im} g$ 使得集合 $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker}_e g$，那么称该序列在 $N$ 处是正合的。

**定义 2.1.15** [8] 设 $E$ 是 $T$-模，$f:M\to N$ 是任意 $T$-模单同态。若对于任意 $T$-模同态 $g:M\to E$，存在 $T$-模同态 $h:N\to E$，使得 $g=hf$，则称 $E$ 是内射 $T$-模。

## 2.2. 重要结论

**引理 2.2.1** [5] 设 $(H,[-,-,-])$ 是堆。

1) 若对 $e,x,y\in H$，$[x,y,e]=e$ 或 $[e,x,y]=e$，则 $x=y$。

2) 对任意的 $v,w,x,y,z\in H$，

$$[v,w,[x,y,z]]=[v,[y,x,w],z].$$

3) 对任意的 $x,y,z\in H$，

$$[x,y,[y,x,z]]=[[z,x,y],y,x]=[x,[y,z,x],y]=z.$$

特别的，若 $[x,y,z]=w$，则该等式中任意一个元素都可由其余三个元素通过三元运算得到。

4) 如果 $H$ 是阿贝尔堆，那么对任意的 $x_i,y_i,z_i\in H,i=1,2,3$，

$$[[x_1,x_2,x_3],[y_1,y_2,y_3],[z_1,z_2,z_3]]=[[x_1,y_1,z_1],[x_2,y_2,z_2],[x_3,y_3,z_3]].$$

**引理 2.2.2** [5] 堆同态 $f$ 是单射当且仅当存在像集中的一个元素使得它的原像集是单点集。

**命题 2.2.3** [6] 每个 $T$-模满同态都是满态射；每个 $T$-模单同态都是单态射。

**命题 2.2.4** [6] 若 $f: M \to N$ 是 $T$-模同态，$e$ 是 $M$ 的吸收元，那么 $f(e)$ 是 $N$ 的吸收元且 $\mathrm{Ker}_{f(e)} f$ 是 $M$ 的子模。

**引理 2.2.5** [7] 设 $M, N, P$ 是 $T$-模，$f: M \to N$ 和 $g: N \to P$ 是 $T$-模同态，★表示单点集构成的 $T$-模。则以下三个 $T$-模正合列

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P, \quad \bigstar \longrightarrow M^{(e)} \xrightarrow{f} N^{(f(e))}, \quad N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \bigstar,$$

当且仅当 $f$ 是单射；且有 $T$-模同构 $N/\mathrm{Im} f \cong P$ （$N/\mathrm{Im} f$ 为 $f$ 的余核，简记为 $\mathrm{Coker} f$），其中 $e \in M$ 。

**注 2.2.6** [13] 在该意义下，称序列

$$\bigstar \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow \bigstar$$

为短正合列，且 $f$ 是单同态，$g$ 是满同态

**引理 2.2.7** [13] 若 $\bigstar \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \bigstar$ 是短正合列 $T$-模序列，$M$ 是 $T$-模，则有 $T$-模短正合列

$$\bigstar \longrightarrow A \times M \xrightarrow{f'} B \times M \xrightarrow{g'} C \longrightarrow \bigstar,$$

其中

$$f': A \times M \to B \times M,\ (a, m) \mapsto (f(a), m),\quad g': B \times M \to C,\ (b, m) \mapsto g(b).$$

**引理 2.2.8** [8] 若 $E_1, E_2$ 是 $T$-模，$Abs(E_1) \neq \varnothing, Abs(E_2) \neq \varnothing$ 且 $E = E_1 \times E_2$ 。则 $E = E_1 \times E_2$ 是内射 $T$-模当且仅当 $E_1$ 和 $E_2$ 是内射 $T$-模。

**引理 2.2.14** [8] 设有如下 $T$-模短正合序列：

$$\begin{array}{l} \bigstar \longrightarrow M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow \bigstar \\ \bigstar \longrightarrow M \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{\pi'} Q' \longrightarrow \bigstar \end{array},$$

其中 $E, E'$ 为内射 $T$-模，$Abs(Q') \neq \varnothing$，则 $Q' \times E \cong Q \times E'$ 。

## 3. 主要结果

本节首先讨论了 $T$-模范畴中核与余核的泛性质等结论，然后以此为基础，证明了内射 $T$-模上的广义 Schanuel 引理。

**命题 3.1.1** (核的泛性质) 设 $T$ 是桁架，$A$、$B$、$C$ 为 $T$-模，$f: A \to B, g: C \to A$ 为 $T$-模同态。若存在 $e \in \mathrm{Im} f$，使得 $\mathrm{Im}\, g \subseteq \mathrm{Ker}_e f$，则存在唯一的堆同态 $g': C \to \mathrm{Ker}_e f$，使得

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & {}^{g'}\swarrow & \downarrow^{g} & & \\ \mathrm{Ker}_e f & \xrightarrow[\tau]{} & A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

交换(即 $g = \tau g'$)，其中 $\tau$ 为自然嵌入同态。进一步，若 $e \in \mathrm{Im} f \cap Abs(B)$，则 $g'$ 为 $T$-模同态；更进一步地，若 $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}_e f$，则 $g'$ 为 $T$-模满同态。

**证明** 由 $\mathrm{Im}\, g \subseteq \mathrm{Ker}_e f$，可定义映射 $g': C \to \mathrm{Ker}_e f$，满足 $g'(x) = g(x)$，对任意的 $x \in C$，显然 $g'$ 为堆同态；又 $\tau(g'(x)) = \tau g(x) = g(x)$，则 $g = \tau g'$ 。

设存在另一堆同态 $g'': C \to \mathrm{Ker}_e f$，使得 $g = \tau g''$，则有 $\tau g' = \tau g''$ 。因为 $\tau$ 为单射，所以 $g' = g''$，唯

一性得证。

若 $e \in \operatorname{Im} f \cap Abs(B)$， $\operatorname{Ker}_e f$ 为 $A$ 的子模，对任意的 $x_1, x_2, x_3 \in C$，

$$\begin{aligned} g'([x_1,x_2,x_3]) &= \tau g'([x_1,x_2,x_3]) \\ &= g([x_1,x_2,x_3]) \\ &= [g(x_1),g(x_2),g(x_3)] \\ &= [\tau g'(x_1),\tau g'(x_2),\tau g'(x_2)] \\ &= [g'(x_1),g'(x_2),g'(x_2)]; \end{aligned}$$

且对任意的 $t \in T,\ x \in C$，

$$g'(t\cdot x) = \tau g'(t\cdot x) = g(t\cdot x) = t\cdot g(x) = t\cdot \tau g'(x) = t\cdot g'(x).$$

则 $g'$ 为 $T$-模同态。

更进一步，若 $\operatorname{Ker}_e f = \operatorname{Im} g$， 则对任意的 $a \in \operatorname{Ker}_e f$， 存在 $x \in C$， 使得 $a = g(x) = g'(x)$， 因此 $g'$ 为 $T$-模满同态。

**命题 3.1.2** (余核的泛性质) 设 $T$ 是桁架，$A$、$B$、$D$ 为 $T$-模， $f: A \to B,\ g: B \to D$ 是 $T$-模同态，$h: B \to \operatorname{Coker} f$ 为自然满同态。若存在 $e \in D$， 使得 $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Ker}_e f$， 则存在唯一的 $T$-模同态 $g': \operatorname{Coker} f \to D$， 使得图表

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[dl, "g'"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

交换(即 $g = g''h$)，且 $g'$ 为 $T$-模单同态。

**证明** 定义 $g': \operatorname{Coker} f \to D$，满足 $g'(\bar{b}) = g(\bar{b})$，对任意的 $\bar{b} \in \operatorname{Coker} f = B/\operatorname{Im} f$。若 $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 \in \operatorname{Coker} f$，则存在 $x \in A$，使得 $[b_1, b_2, f(x)] \in \operatorname{Im} f$，故存在 $x' \in A$，使得 $[b_1, b_2, f(x)] = f(x')$。由题设 $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker}_e g$，

$$g[b_1,b_2,f(x)] = [g(b_1),g(b_2),gf(x)] = [g(b_1),g(b_2),e] = gf(x') = e,$$

由引理 2.2.1， $g(b_1) = g(b_2)$， 即 $g'$ 为映射。

因为 $g$ 为 $T$-模同态，对任意的 $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \in \operatorname{Coker} f$，

$$\begin{aligned} g'([\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3]) &= g'(\overline{[b_1,b_2,b_3]}) \\ &= g([b_1,b_2,b_3]) \\ &= [g(b_1),g(b_2),g(b_3)] \\ &= [g'(\bar{b}_1),g'(\bar{b}_2),g'(\bar{b}_3)]; \end{aligned}$$

且对任意的 $t \in T,\ \bar{b} \in \operatorname{Coker} f$，

$$g'(t\cdot\bar{b}) = g'(\overline{t\cdot b}) = g(tb) = t\cdot g(b) = t\cdot g'(\bar{b}).$$

所以 $g'$ 为 $T$-模同态。又对任意的 $b \in B$， $g'(h(b)) = g'(\bar{b}) = g(b)$， 则 $g = g'$。

设存在另一 $T$-模同态 $g'': \operatorname{Coker} f \to D$， 使得 $g = g''h$， 则 $g'h = g''h$。因为 $h$ 为满射，所以 $g' = g''$，唯一性得证。

对任意的 $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \operatorname{Coker} f$， 设 $g'(\bar{b}_1) = g'(\bar{b}_2)$， 则 $g(b_1) = g(b_2)$。任取 $x \in A$， 有 $gf(x) = e$， 进而

DOI: 10.12677/pm.2026.164113

$$g\left(\left[b_1,b_2,f\left(x\right)\right]\right)=\left[g\left(b_1\right),g\left(b_2\right),gf\left(x\right)\right]=\left[g\left(b_1\right),g\left(b_2\right),e\right]=e,$$

即$\left[b_1,b_2,f\left(x\right)\right]\in \operatorname{Ker}_e g$，从而$\overline{b_1}=\overline{b_2}$，即$g'$是单射。

**注 3.1.3** 设$\bigstar\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{l}D\longrightarrow\bigstar$为$T$-模正合序列，即存在$e_1\in \operatorname{Im} g\subseteq C$，$e_2\in \operatorname{Im} l\subseteq D$使得$\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker}_{e_1} g$，$\operatorname{Im} g=\operatorname{Ker}_{e_2} l$。由命题 3.1.2 可知存在唯一的$T$-模单同态$g':\operatorname{Coker} f\to C$，使得图表

$$\begin{tikzcd}
\bigstar \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "h"'] & & C \arrow[r, "l"] & D \arrow[r] & \bigstar \\
& & & \operatorname{Coker} f \arrow[ur, "g'"'] & & &
\end{tikzcd}$$

交换(即$g=g'h$)，且$\operatorname{Im} g=\operatorname{Im} g'$，其中$h$为自然满同态。进一步，上述正合序列可分解为如下两个$T$-模短正合序列：

$$\bigstar\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{h}\operatorname{Coker} f\longrightarrow\bigstar$$

$$\bigstar\longrightarrow \operatorname{Coker} f\xrightarrow{g'}C\xrightarrow{l}D\longrightarrow\bigstar.$$

**定理 3.1.4** 设$T$为桁架，如下两个$T$-模序列正合：

$$\bigstar\longrightarrow M\xrightarrow{i}E_1\xrightarrow{f_1}E_2\xrightarrow{\pi}Q\longrightarrow\bigstar$$

$$\bigstar\longrightarrow M\xrightarrow{i'}E_1'\xrightarrow{f_1'}E_2'\xrightarrow{\pi'}Q'\longrightarrow\bigstar.$$

若$E_i,\ E_i'$均为内射$T$-模，且$Abs\left(E_i\right)\neq\varnothing,\ Abs\left(E_i'\right)\neq\varnothing\ \left(i=1,2\right)$。则存在$T$-模同构

$$Q'\times E_2\times E_1'\cong Q\times E_2'\times E_1.$$

**证明** 由注 3.1.3 对题设中的正合序列进行分解，

$$\begin{tikzcd}
\bigstar \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & E_2 \arrow[r, "\pi"] & Q \arrow[r] & \bigstar \\
& & & \operatorname{Coker} i \arrow[ur, "g"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bigstar \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & E_1' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, "h'"'] & & E_2' \arrow[r, "\pi'"] & Q' \arrow[r] & \bigstar \\
& & & \operatorname{Coker} i' \arrow[ur, "g'"'] & & &
\end{tikzcd},$$

可知如下序列正合

$$\bigstar\longrightarrow M\xrightarrow{i}E_1\xrightarrow{h}\operatorname{Coker} i\longrightarrow\bigstar$$

$$\bigstar\longrightarrow M\xrightarrow{i'}E_1'\xrightarrow{h'}\operatorname{Coker} i'\longrightarrow\bigstar$$

$$\bigstar\longrightarrow \operatorname{Coker} i\xrightarrow{g}E_2\xrightarrow{\pi}Q\longrightarrow\bigstar$$

$$\bigstar\longrightarrow \operatorname{Coker} i'\xrightarrow{g'}E_2'\xrightarrow{\pi'}Q'\longrightarrow\bigstar,$$

由引理 2.2.4 可知$Abs\left(\operatorname{Coker} i'\right)\neq\varnothing$，$Abs\left(Q'\right)\neq\varnothing$。因此由引理 2.2.9 可知$T$-模同构$\operatorname{Coker} i'\times E_1\cong \operatorname{Coker} i\times E_1'$。

因为$E_i,\ E_i'$为内射$T$-模$\left(i=1,2\right)$，所以由引理 2.2.8 知$E_2\times E_1',\ E_2'\times E_1$仍为内射$T$-模，进而由引理 2.2.7 可知如下序列正合

$$\bigstar \longrightarrow \operatorname{Coker} i \times E_1' \longrightarrow E_2 \times E_1' \longrightarrow Q \longrightarrow \bigstar$$

$$\bigstar \longrightarrow \operatorname{Coker} i' \times E_1 \longrightarrow E_2' \times E_1 \longrightarrow Q' \longrightarrow \bigstar$$

再次应用引理 2.2.9 可知 $Q' \times E_2 \times E_1' \cong Q \times E_2' \times E_1$。

**定理 3.1.5** (广义 Schanuel 引理) 设 $T$ 为桁架，如下两个 $T$-模序列正合：

$$\bigstar \longrightarrow M \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow \bigstar$$

$$\bigstar \longrightarrow M \xrightarrow{i'} E_1' \xrightarrow{f_1'} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}'} E_n' \xrightarrow{\pi'} Q' \longrightarrow \bigstar.$$

若 $E_i, E_i'$ 为内射 $T$-模，且 $Abs(E_i) \neq \varnothing, Abs(E_i') \neq \varnothing \ (i = 1, \cdots, n)$。则存在 $T$-模同构

$$Q' \times E_n \times E_{n-1}' \times \cdots \times C' \cong Q \times E_n' \times E_{n-1} \times \cdots \times C$$

其中 $C'$ 和 $C$ 的取值规则为

$$\begin{cases} n \text{ 为奇数时}: C' = E_1,\ C = E_1', \\ n \text{ 为偶数时}: C' = E_1',\ C = E_1. \end{cases}$$

**证明** 当 $n = 2$ 时，即为定理 3.1.4，结论成立，即

$$Q' \times E_2 \times E_1' \cong Q \times E_2' \times E_1.$$

假设当 $n = k \ (k \geq 2)$ 时结论成立，即

$$Q' \times E_k \times E_{k-1}' \times \cdots \times C' \cong Q \times E_k' \times E_{k-1} \times \cdots \times C,$$

其中 $C', C$ 满足 $n = k$ 时的取值规则。

考虑 $n = k + 1$ 时所对应的 $T$-模正合序列如下：

$$\bigstar \longrightarrow M \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}} E_k \xrightarrow{f_k} E_{k+1} \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow \bigstar$$

$$\bigstar \longrightarrow M \xrightarrow{i'} E_1' \xrightarrow{f_1'} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}'} E_k' \xrightarrow{f_k'} E_{k+1}' \xrightarrow{\pi'} Q' \longrightarrow \bigstar$$

由注 3.1.3 将如上正合序列分解，记 $\operatorname{Coker} f_k = E_{k+1} / \operatorname{Im} f_k, \operatorname{Coker} f_k' = E_{k+1}' / \operatorname{Im} f_k'$，可知如下序列正合

$$\bigstar \longrightarrow M \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}} E_k \xrightarrow{h} \operatorname{Coker} f_k \longrightarrow \bigstar$$

$$\bigstar \longrightarrow M \xrightarrow{i'} E_1' \xrightarrow{f_1'} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}'} E_k' \xrightarrow{h'} \operatorname{Coker} f_k' \longrightarrow \bigstar$$

$$\bigstar \longrightarrow \operatorname{Coker} f_k \xrightarrow{g} E_{k+1} \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow \bigstar$$

$$\bigstar \longrightarrow \operatorname{Coker} f_k' \xrightarrow{g'} E_{k+1}' \xrightarrow{\pi'} Q' \longrightarrow \bigstar.$$

由 $n = k$ 时结论成立，可知

$$\operatorname{Coker} f_k' \times E_k \times E_{k-1}' \times \cdots \times C' \cong \operatorname{Coker} f_k \times E_k' \times E_{k-1} \times \cdots \times C,$$

由引理 2.2.7 可知如下序列正合

$$\bigstar \longrightarrow \operatorname{Coker} f_k \times E_k' \times E_{k-1} \times \cdots \times C_k \longrightarrow E_{k+1} \times E_k \times E_{k-1}' \times \cdots \times C' \longrightarrow Q \longrightarrow \bigstar$$

$$\bigstar \longrightarrow \operatorname{Coker} f_k' \times E_k \times E_{k-1}' \times \cdots \times C' \longrightarrow E_{k+1}' \times E_k \times E_{k-1}' \times \cdots \times C' \longrightarrow Q' \longrightarrow \bigstar,$$

因为由引理 2.2.8 可知 $E_{k+1}\times E_k\times E'_{k-1}\times\cdots\times C', E'_{k+1}\times E_k\times E'_{k-1}\times\cdots\times C'$ 仍为内射 T-模，所以由引理 2.2.9 可知

$$Q'\times E_{k+1}\times E'_k\times\cdots\times C'\cong Q\times E'_{k+1}\times E_k\times\cdots\times C.$$

因此 $n=k+1$ 时结论成立，证明结束。

## 4. 总结与展望

本文在内射 T-模上证明了广义 Schanuel 引理，丰富了桁架模的同调理论。未来研究可进一步探讨 T-模的同调维数、导出函子理论，以及马蹄引理的推广。此外，结合量子杨－巴克斯特方程的解分类，可探索桁架上的模在量子群与数学物理中的具体应用，推动其结构理论与表示理论的发展。

## 基金项目

项目类别：地区科学基金项目；项目名称：投射盖及其相关模类的研究；项目编号：11861043。

## 参考文献

[1] Prüfer, H. (1924) Theorie der Abelschen Gruppen: I. *Mathematische Zeitschrift*, **20**, 165-187. https://doi.org/10.1007/bf01188079

[2] Baer, R. (1929) Zur einführung des scharbegriffs. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, **160**, 199-207. https://doi.org/10.1515/crll.1929.160.199

[3] Rump, W. (2007) Braces, Radical Rings, and the Quantum Yang-Baxter Equation. *Journal of Algebra*, **307**, 153-170. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.03.040

[4] Brzeziński, T. (2019) Trusses: Between Braces and Rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, **372**, 4149-4176. https://doi.org/10.1090/tran/7705

[5] Brzeziński, T. (2020) Trusses: Paragons, Ideals and Modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **224**, Article 106258. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2019.106258

[6] Brzeziński, T. and Rybołowicz, B. (2022) Modules over Trusses vs Modules over Rings: Direct Sums and Free Modules. *Algebras and Representation Theory*, **25**, 1-23. https://doi.org/10.1007/s10468-020-10008-8

[7] Brzeziński, T., Rybołowicz, B. and Saracco, P. (2022) On Functors between Categories of Modules over Trusses. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **226**, Article 107091. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2022.107091

[8] Wang, Y., Han, S., Jia, D., He, J. and Wu, D. (2026) Injectivity of Modules over Trusses. *Journal of Algebra and Its Applications*, 25, 1-22. https://doi.org/10.1142/s0219498827500356

[9] 廖贻华. Schanuel 引理及相关性质的推广[J]. 广西大学学报: 自然科学版, 2012, 37(6): 1288-1291.

[10] 刘兴, 黄福生. 内射半模的 Schanuel 引理及推广[J]. 江西科学, 2011, 29(3): 310-312.

[11] 张力宏, 李俊杰. 关于遗传挠理论投射模的 Schanuel's 引理[J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2011, 32(4): 39-40.

[12] 张力宏, 邓瑶. 关于遗传挠理论拟内射模的 Schanuel's 引理[J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2013, 34(4): 19-20.

[13] 王永铎, 贾登科. 桁架上的正合列[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2026, 62(1): 93-99.