Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(4), 142-154
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.164099

Hans汉斯

非齐次Dirichlet边界条件下Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer方程的适定性

李雨欣[1,2]

[1]广州大学数学与信息科学学院，广东 广州
[2]大湾区大学理学院，广东，东莞

收稿日期：2026年3月11日；录用日期：2026年4月11日；发布日期：2026年4月23日

摘 要

本文研究了在非齐次Dirichlet边界条件下，具有非自治外力的Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer方程的适定性。通过应用经典的Faedo-Galerkin方法，证明了弱解的存在唯一性。其中运用泛函分析中的紧性定理等内容处理非线性项与惯性项的收敛问题，进而证明了存在性。利用非线性项的增长条件证明了弱解的唯一性。

关键词

Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer方程，弱解，**Faedo-Galerkin**逼近，存在唯一性，非齐次**Dirichlet**边界条件

Well-Posedness of the Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer Equations with Nonhomogeneous Dirichlet Boundary Conditions

Yuxin Li[1,2]

[1]School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong
[2]School of Science, Great Bay University, Dongguan Guangdong

Received: March 11, 2026; accepted: April 11, 2026; published: April 23, 2026

文章引用: 李雨欣. 非齐次Dirichlet边界条件下Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer方程的适定性[J]. 理论数学, 2026, 16(4): 142-154. DOI: 10.12677/pm.2026.164099

Abstract

This paper investigates the well-posedness of the Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer equations with nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions, where the external force is non-autonomous. By applying the classical Faedo-Galerkin method, we establish the existence and uniqueness of weak solutions. Compactness theorems from functional analysis are employed to handle the convergence of nonlinear and inertial terms, thereby proving existence. The uniqueness of weak solutions is proved by utilizing the growth condition of the nonlinear term.

Keywords

Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer Equations, Weak Solutions, Faedo-Galerkin Approximation, Existence and Uniqueness, Nonhomogeneous Dirichlet Boundary Conditions

1. 引言

我们在有界光滑区域$\Omega \in \mathbb{R}^3$中研究具有非齐次 Dirichlet 边界条件的非自治 Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer 方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p + f(u) = \Delta u + g, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi, \quad u|_{t=0} = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

这里$g = g(t)$是给定的外力，表示作用在流体上的外部体力(如重力等)随时间变化。在振荡外力、周期性强迫等实际物理系统中，外力往往是时变的，我们假设g满足$g \in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}, L^2(\Omega)\right)$，$u = (u_1, u_2, u_3)$是未知速度场，标量函数$p$是未知压强，$f(u)$是满足如下假设条件的 Forchheimer 非线性项：

$$1.\ f \in C^1\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3\right), \quad 2.\ \kappa |u|^{r-1} - L \le f'(u) \le C\left(1 + |u|^{r-1}\right), \tag{2}$$

其中C、L和κ为正常数，增长指数$r \ge 1$。此处及下文$f'(u)$表示映射f的 Jacobi 矩阵(Fréchet 导数)。

应用的角度来看，方程(1)可用于描述多孔介质中的流体流动(可参考文献[1]-[4])。大多数多孔介质流动模型基于 Darcy 定律(见[1])。Darcy 经验流动模型假设多孔介质内流体速度与压力梯度之间存在线性关系。当流体速度相对较高时，Darcy 定律将不再适用。在这种情况下需要更合适的模型，如 Forchheimer 方程(见[5])：

$$\partial_t u + f(u) + \nabla p = g, \quad \operatorname{div} u = 0. \tag{3}$$

Forchheimer 方程假设流体速度与压力梯度之间的关系是非线性的。综合考虑粘性力和加速度等因素，我们将 Darcy-Forchheimer 定律推广到 Brinkman-Forchheimer 方程(见[6])，便可得到

$$\partial_t u - \Delta u + f(u) + \nabla p = g, \quad \operatorname{div} u = 0, \tag{4}$$

该方程在非牛顿流体理论(见[7])和潮汐动力学(见[8])中描述真实物理现象。通过将 Navier-Stokes 方程中的惯性项引入到 Brinkman-Forchheimer 方程中，我们得到了 Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer 方程，这正是本文的主要研究对象。该方程能够描述流体速度足够高且孔隙率不太大的流动情形。关于该

系统的详细表述和局限性，可参考文献[9] [10]。

带有阻尼项的 Navier-Stokes 方程引起了广泛研究。当 $r<3$ 时，方程(1)与经典 Navier-Stokes 方程类似；而在临界情形 $r=3$ 下，问题相对简化，文献[11]中已得到大量的特殊结果。当 $r>3$ 时，[12]将 Brinkman-Forchheimer 方程在有界区域中的结果推广到 Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer 方程，包括弱解的唯一性和在 H^2 中全局吸引子的存在性。当 $2<r\le 3$ 时，弱解在 H^1 中对 Forchheimer 系数的连续依赖性已被建立(参见[13])。[14]考虑带有阻尼项 $\alpha|u|^{r-1}u(\alpha>0)$ 的 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题，证明了当 $r\ge 1$ 时，该方程在整个空间 $\mathbb{R}^3$ 中具有全局弱解；当 $r\ge 7/2$ 时存在全局强解；当 $7/2\le r\le 5$ 时强解是唯一的。这些结果在[15]中得到了改进。

在大多数研究中(如文献[12] [16] [17])，多孔介质流动问题通常考虑无滑移边界条件(即 $u|_{\partial\Omega}=0$)，这对应于固体边界是静止的情形。然而，在实际物理场景中，例如在变形多孔介质、可渗透壁面等情况下边界可能是非静止的或允许流体穿过边界，此时需要引入非齐次 Dirichlet 边界条件 $u|_{\partial\Omega}=\phi$。即边界 $\partial\Omega$ 是固体但非静止，在 $\partial\Omega$ 上，无滑移边界条件为 $u=\phi$，其中 $\phi=\phi(x)$ 是 $\partial\Omega$ 的给定速度。我们假设 ϕ 不依赖于时间，且 ϕ 是某个函数 Φ 在边界 $\partial\Omega$ 上的迹，

$$\Phi\in\left[H^2(\Omega)\right]^3,\quad \operatorname{div}\Phi=0,\quad \int_{\partial\Omega}\Phi\cdot\nu\,\mathrm{d}S=0, \tag{5}$$

其中 ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。方便起见，记 $\tilde{u}=u+\Phi$。我们将 $\tilde{u}$ 视为(1)的解，从而得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u+(u\cdot\nabla)\Phi+(\Phi\cdot\nabla)u-\Delta u+\nabla p+f(u+\Phi)=\Delta\Phi+g-(\Phi\cdot\nabla)\Phi\\ \operatorname{div}u=0,\quad u|_{\partial\Omega}=0,\quad u|_{t=0}=u_0.\end{cases} \tag{6}$$

其中我们令方程组(6)的第一个等式右端为 $\bar{g}$，通过 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理可得

$$\begin{aligned}\|\bar{g}\|_{L^2}&=\|\Delta\Phi+g-(\Phi\cdot\nabla)\Phi\|_{L^2}\\&\le\|\Delta\Phi\|_{L^2}+\|g\|_{L^2}+\|(\Phi\cdot\nabla)\Phi\|_{L^2}\\&\le\|\Phi\|_{H^2}+\|g\|_{L^2}+\|\Phi\|_{L^\infty}\|\nabla\Phi\|_{L^2}\\&\le\|\Phi\|_{H^2}+\|g\|_{L^2}+c\|\Phi\|_{H^2}\|\nabla\Phi\|_{L^2}<\infty\end{aligned} \tag{7}$$

其中参数 c 依赖于 Ω 和维数。因此 $\bar{g}\in L^2$。在非齐次边界条件转化到齐次边界条件的过程中，我们使用迹定理，保证边界值 $\phi=\Phi|_{\partial\Omega}$ 有足够的正则性，并且要求 $\Phi\in H^2$。我们反复使用这一条件，首先，在三维区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上，由 Sobolev 嵌入定理可知 $H^2(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$，即存在常数 $c>0$，使得 $\|\Phi\|_{L^\infty}\le c\|\Phi\|_{H^2}$。其次，在验证 $\bar{g}\in L^2(\Omega)$ 的过程中，我们需要对 Φ 的二阶导数进行控制，这本质上依赖于 $\Phi\in H^2$ 以保证二阶弱导数属于 L^2。此外，本文后续的多个估计(例如 $\|(\Phi\cdot\nabla)\Phi\|_{L^2}$ 等)也都依赖于 Φ 具有二阶导数，从而能够利用 H^2 范数统一控制各阶项。

在齐次情形下，三线性型 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ 满足正交性质 $b(u,u,u)=0$，从而可有效控制非线性项。当边界条件非零时，我们需借助辅助函数 $\Phi\in\left[H^2(\Omega)\right]^3$ 将原问题转化为关于 $\tilde{u}$ 的齐次边值问题，这一转化导致方程中出现额外的非线性交叉项，例如在变换后的方程(8)中出现了 $B(\Phi,u)$ 和 $B(u,\Phi)$ 两项，它们分别对应于 $(\Phi\cdot\nabla)u$ 和 $(u\cdot\nabla)\Phi$，这些项在齐次边界情形下不存在。特别是 $B(u,\Phi)$ 项破坏了经典三线性型的正交性质，使得在能量估计中无法直接消去，需采用精细的插值不等式(如引理 2.4)进行控制。在 Galerkin 逼近中，形如 $b(u_n,\Phi,u_n)$ 的项(见第 3.1 节)需要单独处理。这类项涉及 Φ 的二阶导数，因此要求 Φ 属于 $H^2(\Omega)$。Forchheimer 非线性项 f 依赖于 $u+\Phi$，我们结合 $\Phi\in H^2$ 这一条件，通过 Hölder 不等式和 Young 不等式精细估计 $f(u_n+\Phi)$ 与 u_n 的内积，从而导出一致有界性。交叉项的处理依赖于 $\Phi\in H^2(\Omega)$。该假设保证了 Φ 不仅具有迹意义下的边界值，还能通过 Sobolev 嵌入获得 L^∞ 有界性。

本文在非齐次 Dirichlet 边界条件下，通过引入 H^2 正则的辅助函数 Φ，并针对交叉项发展了一套系统的估计方法，成功克服了非齐次边界带来的额外非线性耦合与高阶正则性需求，从而将经典的齐次边界结果推广至更符合实际物理场景的非齐次情形。我们研究方程组(6)，也就是 Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer 方程(1)的弱解的存在性和唯一性，这为后续研究方程的长时间动力学行为奠定了理论基础。

2. 预备知识

2.1. 函数空间与基本概念

我们首先介绍函数空间。将空间 H 、V 和 V^* 定义为：

$$H=\left\{u\in\left[L^2(\Omega)\right]^3:\nabla\cdot u=0\right\},$$

$$V=\left\{u\in\left[H_0^1(\Omega)\right]^3:\nabla\cdot u=0\right\},$$

$$V^*=\left\{u\in\left[H^{-1}(\Omega)\right]^3:\nabla\cdot u=0\right\},$$

其中 V^* 是 V 的对偶空间。在 V 中赋予如下内积：

$$\left(\left(u,v\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial v}{\partial x_j}\right),$$

和范数：

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}=\left(\left(u,u\right)\right)^{1/2}.$$

定义 2.1 定义双线性型：

$$a(u,v)=\left(\left(u,v\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\mathrm{d}x.$$

与双线性形式 $\left(\left(u,v\right)\right)$ 相关的线性算子 $A=-\Delta:V\to V^*$，对 $\forall v\in V$ 都有：

$$\langle Au,v\rangle=\left(\left(u,v\right)\right)=a(u,v).$$

定义 2.2 通过以下公式定义三线性型 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$：

$$b(u,v,w)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j\mathrm{d}x.$$

与 $b(u,v,w)$ 相关的双线性算子 $B(u,v):V\times V\to V^*$ 定义为：

$$\langle B(u,v),w\rangle=b(u,v,w),$$

对 $\forall w\in V$ 成立。

我们列出在后续研究中所用到的三线性型的相关性质。

引理 2.3 如果 $n=3$，则对于 $u\in H$，$v,w\in V$，有

$$b(u,v,w)=-b(u,w,v),$$

由此得到正交关系 $b(u,v,v)=0$。

引理 2.4 如果 $u,v,w\in V$ 并且 $n=3$，则

$$\left|b(u,v,w)\right| \le k\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/4}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{3/4}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)}^{1/4}\|w\|_{H_0^1(\Omega)}^{3/4},$$

其中 k 为某一常数。除此之外，如果 $u \in V$， $v \in D(A)$， $w \in H$， $n=3$，则

$$\left|b(u,v,w)\right| \le k\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|Av\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|w\|_{L^2(\Omega)},$$

其中 k 为某一常数。

下面，我们介绍投影算子 P_n 和它的一些性质。

引理 2.5 如果 X 为 H，V，或者为 V^*，则 $\|P_n u\|_X \le \|u\|_X$ 且 $P_n u \to u$ 在 X 中成立，其中 $\|u\|_X$ 表示 u 在空间 X 中的范数。投影算子 P_n 将 X 中的元素投影到由前 n 个特征函数张成的空间上，即

$$P_n u = \sum_{j=1}^{n}(u, w_j)w_j,$$

其中 $\{w_j\}$ 是空间 X 的一组标准正交基。

本文考虑方程的弱解。方程(1)的弱解定义如下：

定义 2.6 (弱解)称函数 u 为(1)的弱解，若对任意满足 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ 和 $\operatorname{div}\psi(t)=0$ 的测试函数 ψ，都有

$$\begin{aligned}&-\int_{\mathbb{R}}(u(t),\partial_t\psi(t))\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{R}}b(u(t),u(t),\psi(t))\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{R}}(f(u(t)),\psi(t))\mathrm{d}t\\&=-\int_{\mathbb{R}}(\nabla u(t),\nabla\psi(t))\mathrm{d}t+\int_{\mathbb{R}}(g,\psi(t))\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

格朗沃尔(Gronwall)不等式的具体内容如下：

定义 2.7 (Gronwall 不等式)设 $\eta(\cdot)$ 是 $[0,T]$ 上的一个非负、绝对连续函数，且对几乎处处的 t 满足微分不等式

$$\eta'(t) \le \phi(t)\eta(t)+\psi(t),$$

其中 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 $[0,T]$ 上是非负可数函数，则有

$$\eta(t) \le \mathrm{e}^{\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}s}\left[\eta(0)+\int_0^t\psi(s)\mathrm{d}s\right],$$

对所有的 $0 \le t \le T$ 成立。

2.2. 常用泛函分析定理

现在，我们回顾将在后续讨论中用到的泛函分析中的定理和引理，可参考文献[18]。

引理 2.8 (Alaoglu 弱 $*$ 紧性)设 X 是一个可分 Banach 空间，$\{f_n\}$ 是 X^* 中的有界序列。则 $\{f_n\}$ 存在一个弱 $*$ 收敛的子列。

引理 2.9 (自反弱紧性)设 X 是一个自反 Banach 空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的有界序列。则 $\{x_n\}$ 存在一个子列在 X 中弱收敛。

引理 2.10 (紧性定理)设 $X \subset\subset H \subset Y$ 是 Banach 空间，其中 X 自反。假设 $\{u_n\}$ 是 $L^2(0,T;X)$ 中一致有界的序列，且 $\mathrm{d}u_n/\mathrm{d}t$ 对某个 $p>1$ 在 $L^p(0,T;Y)$ 中一致有界。则存在一个子列在 $L^2(0,T;H)$ 中强收敛。

引理 2.11 设 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界开集，$\{g_j\}$ 是 $L^p(\mathcal{O})$ 中的函数列且 $g_j \to g$ 几乎处处成立，则在 $L^p(\mathcal{O})$ 中有 $g_j \rightharpoonup g$。

引理 2.12 若在 $L^p(\Omega)$ 中有 $u_j \to u$，则存在一个子列在 Ω 中几乎处处逐点收敛到 u。

3. Faedo-Galerkin 逼近

在本节中，我们通过 Galerkin 逼近方法得到问题(1)的弱解的存在性。

3.1. 存在性

存在一列特征值 λ_j，满足 $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_j\to\infty$，以及一族属于 $D(A)$ 的元素 w_j，它们在 H 中构成标准正交系，且使得对 $\forall j$，有 $Aw_j=\lambda_j w_j$。

将方程组(6)的第一个方程与函数 $v\in V$ 作内积，我们得到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t},v\right)+\langle Au,v\rangle+\langle B(u,u),v\rangle+\langle B(\Phi,u),v\rangle+\langle B(u,\Phi),v\rangle+\langle f(u+\Phi),v\rangle=\langle \bar{g},v\rangle.$$

进而有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Au+B(u,u)+B(\Phi,u)+B(u,\Phi)+f(u+\Phi)=\bar{g},\tag{8}$$

其中由(7)可知 $\bar{g}\in L^2(\Omega)$。我们考察通过仅保留前 n 个傅里叶模态而得到的有限维方程，即 n 维 Galerkin 近似。设 $u_n=\sum_{j=1}^{n}u_{nj}(t)w_j=\sum_{j=1}^{n}(u(t),w_j)w_j$，则 u_n 满足的方程为：

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}+Au_n+P_nB(u_n,u_n)+P_nB(\Phi,u_n)+P_nB(u_n,\Phi)+P_nf(u_n+\Phi)=P_n\bar{g},\tag{9}$$

其中 P_n 的具体定义见引理 2.5。

我们将方程(9)乘以 u_n 并积分，利用引理 2.3 和投影算子 P_n 的性质，可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2=\langle P_n\bar{g},u_n\rangle-b(u_n,\Phi,u_n)-(f(u_n+\Phi),u_n).$$

运用 Young 不等式和 Sobolev 嵌入，得到

$$\begin{aligned}\langle P_n\bar{g},u_n\rangle&\le\|P_n\bar{g}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\le\frac{1}{2}\|\bar{g}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2\\&\le\frac{c}{2}\|\bar{g}\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2}\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

由于 $\Phi\in H^2(\Omega)$ 且 $u_n\in H_0^1(\Omega)$，运用引理 2.4 及 Young 不等式，我们有

$$\begin{aligned}-b(u_n,\Phi,u_n)&\le k\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|\Delta\Phi\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u_n\|_{L^2(\Omega)}\\&\le c_1\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}+c_2\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2\|\Phi\|_{H^2(\Omega)},\end{aligned}$$

其中引入参数 $\varepsilon>0$，取 $c_1=\varepsilon/\left(2\|\Phi\|_{L^2}\right)$，$c_2=k^2\|\Phi\|_{L^2}/(2\varepsilon)$。根据假设(2)，我们得到

$$-(f(u_n+\Phi),u_n)\le-\int_\Omega\left(k|u_n+\Phi|^r u_n-L\right)\mathrm{d}x\le L|\Omega|-k\int_\Omega|u_n|^r u_n\,\mathrm{d}x+k\int_\Omega|\Phi|^r u_n\,\mathrm{d}x.$$

假设 $-k\int_\Omega|u_n|^r u_n\,\mathrm{d}x\le-k\int_\Omega|u_n|^{r+1}\mathrm{d}x$。利用 Hölder 不等式和 Young 不等式，还可以得到

$$k\int_\Omega|\Phi|^r u_n\,\mathrm{d}x\le\frac{k}{2}\|\Phi\|_{L^{2r}(\Omega)}^{2r}+\frac{1}{2}\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

由于 $\Phi\in H^2(\Omega)$，根据 Sobolev 嵌入定理，得到 $\|\Phi\|_{L^{2r}(\Omega)}^{2r}\le\|\Phi\|_{L^\infty(\Omega)}^{2r}<\infty$，因此，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2+\left(\frac{1}{2}-c_1\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}\right)\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2+k\|u_n\|_{L^{r+1}}^{r+1}\\&\le\left(c_2\|\Phi\|_{H^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\right)\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{c}{2}\|\bar{g}\|_{L^2(\Omega)}^2+L|\Omega|+\frac{k}{2}\|\Phi\|_{L^{2r}(\Omega)}^{2r}.\end{aligned}\tag{10}$$

其中选取适当的常数 c_1，使得 $\frac{1}{2}-c_1\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}\geq 0$ (等价于 $\varepsilon\leq 1$)。利用庞加莱不等式，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2+2k\|u_n\|_{L^{r+1}}^{r+1}\leq\left[2c_2\|\Phi\|_{H^2(\Omega)}+1-c_3\left(1-2c_1\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}\right)\right]\|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$+c\|g\|_{L^2(\Omega)}^2+2L|\Omega|+k\|\Phi\|_{L^{2r}(\Omega)}^{2r},$$

其中我们令 $\alpha:=2c_2\|\Phi\|_{H^2(\Omega)}+1-c_3\left(1-2c_1\|\Phi\|_{L^2(\Omega)}\right)$ 且 $\beta:=c\|g\|_{L^2(\Omega)}^2+2L|\Omega|+k\|\Phi\|_{L^{2r}(\Omega)}^{2r}$，选取常数 c_3 大于等于庞加莱常数，且满足 $k^2\|\Phi\|_{L^2}\|\Phi\|_{H^2}<(c_3-1)^2/(4c_3)$，则当

$$\varepsilon\in\left[\frac{(c_3-1)-\sqrt{\bar{\Delta}}}{2c_3},\frac{(c_3-1)+\sqrt{\bar{\Delta}}}{2c_3}\right],$$

其中 $\bar{\Delta}=(c_3-1)^2-4c_3k^2\|\Phi\|_{L^2}\|\Phi\|_{H^2}$，此时 $\alpha\leq 0$。应用 Gronwall 不等式，可以得到

$$\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{e}^{\alpha t}-\frac{\beta}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{\alpha t}\right). \tag{11}$$

通过对(11)两边在 0 到 T 上积分，得

$$\int_0^T\|u_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}t\leq\frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha T-1}\right)-\frac{\beta}{\alpha}T+\frac{\beta}{\alpha^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha T-1}\right).$$

在(10)两边对 0 到 T 积分，我们可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_{L^2}^2+\left(\frac{1}{2}-c_1\|\Phi\|_{L^2}\right)\int_0^T\|u_n(t)\|_{H_0^1}^2\mathrm{d}t+k\int_0^T\|u_n(t)\|_{L^{r+1}}^{r+1}\mathrm{d}t\\&\leq\frac{1}{2}\|u_n(0)\|_{L^2}^2+\left(c_2\|\Phi\|_{H^2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha T-1}\right)-\frac{\beta}{\alpha}T+\frac{\beta}{\alpha^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha T-1}\right)\right)\\&\quad+\left(\frac{c}{2}\|g\|_{L^2(\Omega)}^2+L|\Omega|+\frac{k}{2}\|\Phi\|_{L^{2r}(\Omega)}^{2r}\right)T\\&\leq M.\end{aligned}$$

其中，根据引理 2.5 知 $\|u_n(0)\|_{L^2(\Omega)}=\|P_nu_0\|_{L^2(\Omega)}\leq\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ 且 M 的定义如下：

$$\begin{aligned}M=&\frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2+\left(c_2\|\Phi\|_{H^2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha T-1}\right)-\frac{\beta}{\alpha}T+\frac{\beta}{\alpha^2}\left(\mathrm{e}^{\alpha T-1}\right)\right)\\&+\left(\frac{c}{2}\|g\|_{L^2(\Omega)}^2+L|\Omega|+\frac{k}{2}\|\Phi\|_{L^{2r}(\Omega)}^{2r}\right)T.\end{aligned}$$

M 对于有界初值集合(在 $L^2(\Omega)$ 中)和有界时间区间是一致的。因此 u_n 在 $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$、$L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ 和 $L^{r+1}\left(0,T;L^{r+1}(\Omega)\right)$ 中是一致有界的。

根据假设(2)，我们有

$$\begin{aligned}\|f(u_n+\Phi)\|_{L^{1+1/r}\left(0,T;L^{1+1/r}(\Omega)\right)}^{1+1/r}&\leq\int_0^T\int_\Omega C\left(1+|u_n+\Phi|^r\right)^{1+1/r}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\leq C\int_0^T\int_\Omega\left(1+|u_n|^{r+1}+|\Phi|^{r+1}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

故 $f(u_n+\Phi)$ 在 $L^{1+1/r}\left(0,T;L^{1+1/r}(\Omega)\right)$ 中是一致有界的。

最后，注意到 $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ 和 $L^{1+1/r}\left(0,T;L^{1+1/r}(\Omega)\right)$ 都连续嵌入到 $L^{1+1/r}\left(0,T;H^{-s}(\Omega)\right)$ 中，其中选取

s 使得 $v\in H_0^s(\Omega)$ 蕴含 $v\in L^{1+r}(\Omega)$，于是若 $u\in L^{1+1/r}(\Omega)$（$L^{1+r}(\Omega)$ 的对偶空间），则 $u\in H^{-s}(\Omega)$（$H_0^s(\Omega)$ 的对偶空间），从而 $L^{1+1/r}(\Omega)\subset H^{-s}(\Omega)$，并且 $s\ge 1$，故 $H^{-1}(\Omega)\subset H^{-s}(\Omega)$。

由(9)可得

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}=-Au_n-P_nB(u_n,u_n)-P_nB(\Phi,u_n)-P_nB(u_n,\Phi)-P_nf(u_n+\Phi)+P_n\overline{g}.$$

我们证明右端每一项在 $L^2(0,T;H^{-s}(\Omega))$ 中是一致有界的。已知 P_n 是一个投影算子，故 $P_nf(u_n+\Phi)$ 在 $L^{1+1/r}(0,T;L^{1+1/r}(\Omega))$ 中一致有界；u_n 在 $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 中一致有界且 A 是从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 的有界线性映射，所以 Au_n 在 $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中一致有界。显然，$P_n\overline{g}$ 在 $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中也是有界的。接下来，我们仅需分析剩下的三项。由引理 2.4 可知 $\|B(u,u)\|_{H^{-1}(\Omega)}\le k\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|u\|_{H^1(\Omega)}^{3/2}$，根据引理 2.5，我们得到 $\|P_nB(u,v)\|_{H^{-1}(\Omega)}\le\|B(u,v)\|_{H^{-1}(\Omega)}$，运用插值不等式得到

$$\begin{aligned}\|P_nB(u_n,u_n)\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;H^{-1})}^{\frac{4}{3}}&\le\int_0^T\|B(u_n(s),u_n(s))\|_{H^{-1}}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}s\\&\le k\int_0^T\|u_n(s)\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\|u_n(s)\|_{H^1}^{2}\mathrm{d}s\\&\le k\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^{\frac{2}{3}}\|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^{2}.\end{aligned}$$

因此 $P_nB(u_n,u_n)$ 在 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中(关于 n)一致有界。类似地，$P_nB(u_n,\Phi)$ 在 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中一致有界：

$$\begin{aligned}\|P_nB(u_n,\Phi)\|_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;H^{-1})}^{\frac{4}{3}}&\le\int_0^T\|B(u_n(s),\Phi)\|_{H^{-1}}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}s\\&\le k\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^{\frac{2}{3}}\|\Phi\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^{2}.\end{aligned}$$

我们还有 $P_nB(u_n,u_n)$ 在 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中(关于 n)一致有界：

$$P_nB(\Phi,u_n(s))_{L^{\frac{4}{3}}(0,T;H^{-1})}^{\frac{4}{3}}\le\int_0^T\|B(\Phi,u_n(s))\|_{H^{-1}}^{\frac{4}{3}}\mathrm{d}s\le k\|\Phi\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^{\frac{2}{3}}\|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1)}^{2}.$$

从而得到 $\mathrm{d}u_n/\mathrm{d}t$ 在 $L^{1+1/r}(0,T;H^{-s}(\Omega))$ 中是一致有界的。

应用引理 2.9 提取一个弱收敛子列，记作 u_n，满足在 $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 中 $u_n\rightharpoonup u$，在 $L^{1+1/r}(0,T;L^{1+1/r}(\Omega))$ 中 $u_n\rightharpoonup u$，在 $L^{1+1/r}(0,T;L^{1+1/r}(\Omega))$ 中 $f(u_n+\Phi)\rightharpoonup\chi$。应用紧性定理(见引理 2.10)确保存在子列 $\{u_n\}$（重新标记后)在 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 中强收敛于 u。

对于 $\forall\phi\in L^{1+1/r}(0,T;L^{1+1/r}(\Omega))$，我们有

$$\int_0^T\int_\Omega(P_nf(u_n+\Phi)-\chi)\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega(f(u_n+\Phi)-\chi)\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega\tilde{Q}_nf(u_n+\Phi)\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中 $\tilde{Q}_n=I-P_n$，该等式最右端的第一项趋于 0。注意到形如 $\phi=\sum_{j=1}^n\alpha_j(t)\phi_j$ (其中 $\alpha_j\in L^{1+1/r}(0,T)$，$\phi_j\in C_c^\infty(\Omega)$)的函数在空间 $L^{1+1/r}(0,T;L^{1+1/r}(\Omega))$ 中是稠密的，并且对于这样的函数有

$$\int_0^T\int_\Omega\tilde{Q}_nf(u_n)\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega\tilde{Q}_nf(u_n)\sum_{j=1}^n\alpha_j(t)\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega f(u_n)\sum_{j=1}^n\alpha_j(t)\tilde{Q}_n\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

当 $n\to\infty$ 时有 $P_n\phi_j=\sum_{j=1}^{n}(\phi_j,w_j)w_j\to\phi_j$，从而在 $L^{1+r}(\Omega)$ 中对每个 j 都有 $\tilde{Q}_n\phi_j\to 0$。故在 $L^{1+1/r}(0,T;L^{1+1/r}(\Omega))$ 中有 $P_nf(u_n+\Phi)$ 在由此我们得到了 $P_nf(u_n)$ 弱$*$收敛到 χ。

实际上 $\chi=f(u+\Phi)$。由于 u_n 在 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 中收敛于 u （注意 $L^2(\Omega_T):=L^2(0,T;L^2(\Omega))$），引理 2.12 保证了存在子列 u_{n_j}，使得 $u_{n_j}(x,t)\to u(x,t)$ 对几乎处处的 $(x,t)\in\Omega_T$ 成立。利用 f 的连续性，可得 $f(u_{n_j}(x,t))\to f(u(x,t))$ 对几乎处处的 $(x,t)\in\Omega_T$ 成立，从而 $f(u_{n_j}(x,t)+\Phi)\to f(u(x,t)+\Phi)$ 对几乎处处的 $(x,t)\in\Omega_T$ 成立。结合 $f(u_{n_j}+\Phi)$ 在 $L^{1+1/r}(0,T;L^{1+1/r}(\Omega))$ 中的有界性，应用引理 2.11 推出在 $L^{1+1/r}(0,T;L^{1+1/r}(\Omega))$ 中 $f(u_{n_j}+\Phi)\rightharpoonup f(u+\Phi)$。根据弱极限的唯一性，即得。

接下来，证明在 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中 $P_nB(u_n,u_n)$ 弱$*$收敛于 $B(u,u)$。若 $w\in L^4(0,T;H_0^1(\Omega))$，利用定义 2.2 和引理 2.3，得到

$$\int_0^T b(u_n,u_n,w)\,\mathrm{d}t=-\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega (u_n)_i(D_iw_j)(u_n)_j\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

我们有

$$\int_0^T b(u_n,u_n,w)-b(u,u,w)\,\mathrm{d}t=-\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega\left[(u_n)_i-u_i\right](D_iw_j)u_j+(u_n)_i(D_iw_j)\left[(u_n)_j-u_j\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

因此我们需要考虑如下形式的表达式

$$E_n=\int_0^T\int_\Omega (v_n-v)wv_n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中在 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 中 $v_n\to v$，$w\in L^4(0,T;H_0^1(\Omega))$，且 v_n 在 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ 中一致有界。利用 Hölder 不等式，我们有

$$\|wv_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\le\|w\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\|v_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}<\infty,\tag{12}$$

其中根据 Sobolev 嵌入定理，我们知道 $L^4\subset L^2$ 且 $H_0^1\subset L^2$，故 $w\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$。利用两次 Hölder 不等式，我们可以得到

$$E_n\le\int_0^T\left(\int_\Omega|v_n-v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|wv_n|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\le\left(\int_0^T\|v_n-v\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\|wv_n\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

结合(12)及在 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 中 $v_n\to v$ 成立，得 $E_n\to 0$。因此 $B(u_n,u_n)$ 在 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中弱$*$收敛于 $B(u,u)$。

对于 $\psi\in L^4(0,T;H_0^1(\Omega))$，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^T\langle P_nB(u_n,u_n)-B(u,u),\psi\rangle\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\langle P_nB(u_n,u_n)-B(u_n,u_n),\psi\rangle\mathrm{d}t+\int_0^T\langle B(u_n,u_n)-B(u,u),\psi\rangle\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

将上式右端第一项改写为 $\int_0^T\langle B(u_n,u_n),Q_n\psi\rangle\mathrm{d}t$，其中 $Q_n:=P_n-I$。形如 $\psi=\sum_{j=1}^{k}\psi_j\alpha_j(t)$ (其中 $\psi_j\in H_0^1(\Omega)$，$\alpha_j\in C^1(0,T;\mathbb{R})$)的函数在 $L^4(0,T;H_0^1(\Omega))$ 中稠密，我们考虑

$$\int_0^T\left\langle B(u_n,u_n),\sum_{j=1}^{k}Q_n\psi_j\right\rangle\alpha_j(t)\mathrm{d}t.$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 中，当 $n\to\infty$ 时 $P_n\psi_j\to\psi_j$ 且 $Q_n\psi_j=(P_n-I)\psi_j\to 0$，因此 $\int_0^T\langle B(u_n,u_n),Q_n\psi\rangle\mathrm{d}t\to 0$，这表明 $P_nB(u_n,u_n)$ 在 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中弱 $*$ 收敛于 $B(u,u)$。

若 $w\in L^4(0,T;H_0^1(\Omega))$，则

$$\int_0^T b(\Phi,u_n,w)-b(\Phi,u,w)\mathrm{d}t=-\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega\Phi_i(D_iw_j)\left[(u_n)_j-u_j\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

考虑表达式：$\tilde{E}_n=\int_0^T\int_\Omega(v_n-v)w\Phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，其中 $v_n\to v$ 在 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 中成立，即当 $n\to\infty$ 时，有 $\|v_n-v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\to 0$。由 Hölder 不等式，得到

$$\tilde{E}_n\le\int_0^T\left(\int_\Omega|v_n-v|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|w\Phi|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\le\left(\int_0^T\|v_n-v\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\|w\Phi\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

结合 Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理，可得

$$\|w\Phi\|_{L^2}\le\|w\|_{L^2}\|\Phi\|_{L^\infty}\le c\|w\|_{L^2}\|\Phi\|_{H^2}<\infty$$

因此可得当 $n\to\infty$ 时，$\tilde{E}_n\to 0$，进而得到 $B(\Phi,u_n)$ 在 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中弱 $*$ 收敛于 $B(\Phi,u)$。通过类似的推导，可得 $B(u_n,\Phi)$ 在 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中弱 $*$ 收敛于 $B(u,\Phi)$。

对于任意 $\psi\in L^4(0,T;H_0^1(\Omega))$，得到

$$\begin{aligned}&\int_0^T\langle P_nB(\Phi,u_n)-B(\Phi,u),\psi\rangle\mathrm{d}t\\&=\int_0^T\langle P_nB(\Phi,u_n)-B(\Phi,u_n),\psi\rangle+\langle B(\Phi,u_n)-B(\Phi,u),\psi\rangle\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{13}$$

我们将上式右端的第一项写作 $\int_0^T\langle B(\Phi,u_n),Q_n\psi\rangle\mathrm{d}t$，由于形如 $\psi=\sum_{j=1}^{k}\psi_j\alpha_j(t)$ (其中 $\psi_j\in H_0^1(\Omega)$，$\alpha_j\in C^1([0,T],\mathbb{R})$)的函数在 $L^4(0,T;H_0^1(\Omega))$ 中稠密，我们可以考虑

$$\int_0^T\left\langle B(\Phi,u_n),\sum_{j=1}^{k}Q_n\psi_j\right\rangle\alpha_j(t)\mathrm{d}t,$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 中当 $n\to\infty$ 时有 $P_n\psi_j\to\psi_j$ 成立(见引理 2.5)，故 $Q_n\psi_j\to 0$。于是当 $n\to\infty$ 时，(13)右端的第一项也趋于 0。因此，当 $n\to\infty$ 时，$P_nB(\Phi,u_n)$ 在 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中弱 $*$ 收敛于 $B(\Phi,u)$。类似地，当 $n\to\infty$ 时，$P_nB(u_n,\Phi)$ 在空间 $L^{4/3}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中弱 $*$ 收敛于 $B(u,\Phi)$。

已知 A 是从 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 的有界线性算子且当 $n\to\infty$ 时，u_n 在 $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中弱收敛于 u，对 $\forall\psi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$，有

$$\int_0^T\langle Au_n,\psi\rangle\mathrm{d}t=\int_0^T\langle u_n,A\psi\rangle\mathrm{d}t\to\int_0^T\langle u,A\psi\rangle\mathrm{d}t=\int_0^T\langle Au,\psi\rangle\mathrm{d}t.$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，Au_n 在 $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 中弱 $*$ 收敛于 Au。

形如 $\psi=\sum_{j=1}^{n}\psi_j\alpha_j(t)$ 的函数(其中 $\psi_j\in H_0^1(\Omega)$，$\alpha_j\in L^2(0,T;\mathbb{R})$)在 $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 中稠密。对于这样的 ψ，有

$$\int_0^T\langle P_n\overline{g},\psi(t)\rangle\mathrm{d}t=\int_0^T\langle\overline{g},P_n\psi(t)\rangle\mathrm{d}t=\int_0^T\sum_{j=1}^{k}\langle\overline{g},P_n\psi_j\rangle\alpha_j(t)\mathrm{d}t.$$

当 $n\to\infty$ 时在 $H_0^1(\Omega)$ 中对每个 j 有 $P_n\psi_j\to\psi_j$ (见引理 2.5)，故上式收敛到

$$\int_0^T\sum_{j=1}^{k}\langle\overline{g},\psi(t)\rangle\alpha_j(t)\mathrm{d}t=\int_0^T\langle\overline{g},\psi\rangle\mathrm{d}t.$$

这表明当 $n\to\infty$ 时，$P_n\overline{g}$ 在 $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ 中弱 $*$ 收敛到 $\overline{g}$。

由于 $\mathrm{d}u_n/\mathrm{d}t$ 在 $L^{1+1/r}\left(0,T;H^{-s}(\Omega)\right)$ 中一致有界，应用引理 2.8 提取一个弱 $*$ 收敛的子列，使得当 $n\to\infty$ 时，在 $L^{1+1/r}\left(0,T;H^{-s}(\Omega)\right)$ 中 $\mathrm{d}u_n/\mathrm{d}t$ 弱 $*$ 收敛于 $\dot{u}$。故对任意的 $\psi\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap L^{1+r}\left(0,T;L^{1+r}(\Omega)\right)$ 有

$$\int_0^T\left\langle\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t},\psi(t)\right\rangle\mathrm{d}t\to\int_0^T\left\langle\dot{u},\psi(t)\right\rangle\mathrm{d}t.$$

现在，若 $\psi(t)\in C_c^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$，已知当 $n\to\infty$ 时，在 $L^{1+r}\left(0,T;L^{1+r}(\Omega)\right)$ 中 $u_n\rightharpoonup u$ 且 $\mathrm{d}u_n/\mathrm{d}t\in C_c^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\subset L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$，通过分部积分得到

$$\int_0^T\left\langle\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t},\psi(t)\right\rangle\mathrm{d}t=-\int_0^T\left\langle u_n(t),\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\right\rangle\mathrm{d}t\to-\int_0^T\left\langle u(t),\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\right\rangle\mathrm{d}t.$$

进而得到

$$\int_0^T\left\langle\dot{u}(t),\psi(t)\right\rangle\mathrm{d}t=-\int_0^T\left\langle u(t),\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\right\rangle\mathrm{d}t,$$

对所有 $\psi\in C_c^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ 成立，因此 $\dot{u}=\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ （弱时间导数），于是当 $n\to\infty$ 时，在 $L^{1+r}\left(0,T;H^{-s}(\Omega)\right)$ 中有 $\mathrm{d}u_n/\mathrm{d}t$ 弱 $*$ 收敛到 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$。

空间 $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ 和 $L^{1+1/r}\left(0,T;L^{1+1/r}(\Omega)\right)$ 都连续嵌入到 $L^{1+1/r}\left(0,T;H^{-s}(\Omega)\right)$ 中。因此，所有项都在 $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap L^{1+r}\left(0,T;L^{1+r}(\Omega)\right)$ 的对偶空间中收敛，该对偶空间为 $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)+L^{1+1/r}\left(0,T;L^{1+1/r}(\Omega)\right)$，结合上述讨论，在这个空间中

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Au+B(u,u)+B(\Phi,u)+B(u,\Phi)+f(u+\Phi)=\overline{g},\tag{14}$$

作为等式成立。

选取某个满足 $\psi(T)=0$ 的 $\psi\in C^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap L^{1+r}\left(0,T;L^{1+r}(\Omega)\right)$，注意到 $\psi\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)\cap L^{1+r}\left(0,T;L^{1+r}(\Omega)\right)$，因此将方程(14)与 ψ 作内积，可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t},\psi\right)+\left\langle Au,\psi\right\rangle+\left\langle B(u,u),\psi\right\rangle+\left\langle B(\Phi,u),\psi\right\rangle+\left\langle B(u,\Phi),\psi\right\rangle+\left\langle f(u+\Phi),\psi\right\rangle=\left\langle\overline{g},\psi\right\rangle,$$

对时间在 $[0,T]$ 上进行积分，通过分部积分得到

$$\begin{aligned}&\int_0^T-\left\langle u,\psi'\right\rangle+a(u,\psi)+b(u,u,\psi)+b(\Phi,u,\psi)+b(u,\Phi,\psi)+\left\langle f(u+\Phi),\psi\right\rangle\mathrm{d}s\\&=\int_0^T\left\langle\overline{g},\psi\right\rangle\mathrm{d}s+\left(u(0),\psi(0)\right).\end{aligned}$$

在伽辽金近似中进行同样的操作，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^T-\left\langle u_n,\psi'\right\rangle+a(u_n,\psi)+b(u_n,u_n,\psi)+b(\Phi,u_n,\psi)+b(u_n,\Phi,\psi)+\left\langle f(u_n+\Phi),\psi\right\rangle\mathrm{d}s\\&=\int_0^T\left\langle\overline{g},\psi\right\rangle\mathrm{d}s+\left(u_n(0),\psi(0)\right).\end{aligned}\tag{15}$$

由于我们的整个论证依赖于证明(15)中各项的收敛性，并且当 $n\to\infty$ 时，$u_n(0)=P_nu_0\to u_0$，故在(15)中令 $n\to\infty$ 取极限，可得：

$$\begin{aligned}&\int_0^T-\left\langle u,\psi'\right\rangle+a(u,\psi)+b(u,u,\psi)+b(\Phi,u,\psi)+b(u,\Phi,\psi)+\left\langle f(u+\Phi),\psi\right\rangle\mathrm{d}s\\&=\int_0^T\left\langle\overline{g},\psi\right\rangle\mathrm{d}s+\left(u_0,\psi(0)\right),\end{aligned}$$

因此 $u(0)=u_0$。这便证明了问题(6)的弱解的存在性。

3.2. 唯一性

最后我们证明 Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer 方程弱解的唯一性。

引理 3.1 设非线性项 f 满足(1)且 $g \in L^2$。则对任意 $u_0 \in H$，问题(1)存在唯一的弱解 u。

证明：为了证明唯一性，我们考虑(8)的两个解 u 和 v，并令 $w := u - v$，则 w 满足：

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Aw + B(w,u) + B(v,w) + B(\Phi,w) + B(w,\Phi) + f(u+\Phi) - f(v+\Phi) = 0.$$

将该方程与 w 作内积，利用 b 的正交性质(见引理 2.3)，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{H_0^1}^2 + b(w,u,w) + b(w,\Phi,w) + \left(f(u+\Phi) - f(v+\Phi), w\right) = 0,$$

(2)的第二个条件意味着对 $\forall \xi, u \in \mathbb{R}^3$ 有

$$\left(\kappa|u|^{r-1} - L\right)|\xi|^2 \le f'(u)\xi\cdot\xi \le C\left(1+|u|^{r-1}\right)|\xi|^2,$$

故

$$\left(f(u+\Phi) - f(v+\Phi), w\right) \ge \int_\Omega \kappa\left|\theta u + (1-\theta)v + \Phi\right|^{r-1}|w|^2\mathrm{d}x - \int_\Omega L|w|^2\mathrm{d}x,$$

利用引理 2.4，有 $\left|b(w,u,w)\right| \le k\|w\|_{L^2}^{1/2}\|w\|_{H_0^1}^{3/2}\|u\|_{H_0^1}$ 且 $\left|b(w,\Phi,w)\right| \le k\|w\|_{L^2}^{1/2}\|w\|_{H_0^1}^{3/2}\|\Phi\|_{H_0^1}$，因此得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{H_0^1}^2 + \int_\Omega \kappa\left|\theta u + (1-\theta)v + \Phi\right|^{r-1}|w|^2\mathrm{d}x \\
&\le k\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|w\|_{H_0^1}^{\frac{3}{2}}\|u\|_{H_0^1} + k\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|w\|_{H_0^1}^{\frac{3}{2}}\|\Phi\|_{H_0^1} + L\|w\|_{L^2}^2 \\
&\le \left(\frac{3k}{4}\|u\|_{H_0^1}^{\frac{4}{3}} + \frac{3c}{4}\right)\|w\|_{H_0^1}^2 + \left(\frac{k+c}{4} + L\right)\|w\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

化简这个不等式，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w\|_{L^2}^2 + \xi\|w\|_{H_0^1}^2 + \int_\Omega \kappa\left|\theta u + (1-\theta)v + \Phi\right|^{r-1}|w|^2\mathrm{d}x \le \eta\|w\|_{L^2}^2,$$

其中 $\xi = 2 - \frac{3k}{2}\|u\|_{H_0^1}^{4/3} - \frac{3c}{2}$，$\eta = \frac{\kappa + c}{2} + 2L$，$\kappa$ 和 L 与假设(2)中的相同，选取适当的常数 c 使得 $\xi \ge 0$。利用 Gronwall 不等式可以得到

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \le \|w(0)\|_{L^2}^2\,\mathrm{e}^{\int_0^t \eta\,\mathrm{d}s}.$$

因此，若 $w(0) = 0$，则对所有 $t \ge 0$ 有 $w(t) = 0$，即对所有 $t \ge 0$ 有 $u(t) = v(t)$，从而得到解的唯一性。

4. 总结

本文研究了在非齐次 Dirichlet 边界条件下，具有非自治外力的三维 Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer 方程的适定性问题。通过引入辅助函数将边界条件齐次化，采用 Faedo-Galerkin 逼近方法构造近似解序列，并利用能量估计和紧性定理证明了弱解的存在性。在唯一性证明中，结合非线性项的增长条件与 Gronwall 不等式，得到了解的唯一性结论。本研究将经典的零边界结果推广至非齐次情形，为后续探讨系统的长时间动力学行为提供了理论基础。

参考文献

[1] Rajagopal, K.R. (2007) On a Hierarchy of Approximate Models for Flows of Incompressible Fluids through Porous

Solids. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **17**, 215-252. https://doi.org/10.1142/s0218202507001899

[2] Straughan, B. (2008) Stability and Wave Motion in Porous Media. Springer.

[3] Aulisa, E., Bloshanskaya, L., Hoang, L. and Ibragimov, A. (2009) Analysis of Generalized Forchheimer Flows of Compressible Fluids in Porous Media. *Journal of Mathematical Physics*, **50**, Article ID: 103102. https://doi.org/10.1063/1.3204977

[4] Brinkman, H.C. (1949) A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles. *Flow*, *Turbulence and Combustion*, **1**, 27-34. https://doi.org/10.1007/bf02120313

[5] Giorgi, T. (1997) Derivation of the Forchheimer Law via Matched Asymptotic Expansions. *Transport in Porous Media*, **29**, 191-206. https://doi.org/10.1023/a:1006533931383

[6] Brinkman, H.C. (1949) On the Permeability of Media Consisting of Closely Packed Porous Particles. *Flow*, *Turbulence and Combustion*, **1**, 81-86. https://doi.org/10.1007/bf02120318

[7] Shenoy, A.V. (1994) Non-Newtonian Fluid Heat Transfer in Porous Media. In: *Advances in Heat Transfer*, Elsevier, 101-190. https://doi.org/10.1016/s0065-2717(08)70233-8

[8] Gordeev, R.G. (1976) The Existence of a Periodic Solution in a Tide Dynamics Problem. *Journal of Soviet Mathematics*, **6**, 1-4. https://doi.org/10.1007/bf01084856

[9] Nield, D.A. (1991) The Limitations of the Brinkman-Forchheimer Equation in Modeling Flow in a Saturated Porous Medium and at an Interface. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **12**, 269-272. https://doi.org/10.1016/0142-727x(91)90062-z

[10] Nield, D.A. (1994) Modelling High Speed Flow of a Compressible Fluid in a Saturated Porous Medium. *Transport in Porous Media*, **14**, 85-88. https://doi.org/10.1007/bf00617029

[11] Hajduk, K.W. and Robinson, J.C. (2017) Energy Equality for the 3D Critical Convective Brinkman-Forchheimer Equations. *Journal of Differential Equations*, **263**, 7141-7161. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.08.001

[12] Kalantarov, V.K. and Zelik, S. (2012) Smooth Attractors for the Brinkman-Forchheimer Equations with Fast Growing Nonlinearities. *Communications on Pure and Applied Analysis*, **11**, 2037-2054. https://doi.org/10.3934/cpaa.2012.11.2037

[13] Çelebi, A.O., Kalantarov, V.K. and U[gtilde]urlu, D. (2005) Continuous Dependence for the Convective Brinkman-Forchheimer Equations. *Applicable Analysis*, **84**, 877-888. https://doi.org/10.1080/00036810500148911

[14] Cai, X. and Jiu, Q. (2008) Weak and Strong Solutions for the Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **343**, 799-809. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.041

[15] Zhang, Z., Wu, X. and Lu, M. (2011) On the Uniqueness of Strong Solution to the Incompressible Navier-Stokes Equations with Damping. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **377**, 414-419. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.11.019

[16] Kalantarov, V. and Zelik, S. (2021) Asymptotic Regularity and Attractors for Slightly Compressible Brinkman-Forchheimer Equations. *Applied Mathematics & Optimization*, **84**, 3137-3171. https://doi.org/10.1007/s00245-020-09742-8

[17] Stone, D. and Zelik, S. (2023) The Non-Autonomous Navier-Stokes-Brinkman-Forchheimer Equation with Dirichlet Boundary Conditions: Dissipativity, Regularity, and Attractors. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*: *Section A Mathematics*, **155**, 352-393. https://doi.org/10.1017/prm.2023.87

[18] Robinson, J. (2001) Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors. Cambridge University Press.