

定积分与不定积分解题方法与策略研究

杨 鹏

四川建筑职业技术大学基础教学部, 四川 德阳

收稿日期: 2026年3月13日; 录用日期: 2026年4月17日; 发布日期: 2026年4月27日

摘 要

积分学作为高等数学的核心支柱之一, 定积分与不定积分的求解能力直接决定学习者对微积分理论体系的掌握深度。本文系统梳理积分求解的各类核心方法与进阶技巧, 将函数积分分为简单函数、复杂函数和抽象函数三种类型, 并构建了“函数类型识别 - 方法适配选择 - 问题转化求解”的完整解题框架。研究内容涵盖直接积分法、函数化简技巧、凑微分法、换元积分法、分部积分法及奇偶性在定积分中的优化应用, 并深入探讨抽象函数的积分求解策略。通过分类归纳与典型案例剖析, 本文旨在为学习者提供一套系统化、可操作的积分求解思维范式, 助力提升解题效率与数学逻辑思维能力。

关键词

不定积分, 定积分, 分类, 解题策略

Research on Problem-Solving Methods and Strategies for Definite and Indefinite Integrals

Peng Yang

Department of Basic Education, Sichuan University of Architectural Technology, Deyang Sichuan

Received: March 13, 2026; accepted: April 17, 2026; published: April 27, 2026

Abstract

As a core pillar of advanced mathematics, proficiency in solving definite and indefinite integrals is a critical determinant of learners' in-depth comprehension of the theoretical framework of calculus. This paper systematically reviews fundamental approaches and advanced techniques for integral solving, and classifies integrable functions into three categories: elementary functions, complex functions and abstract functions. On this basis, a complete problem-solving paradigm is constructed,

which follows the logical chain of “function type identification—adaptive method selection—problem transformation and resolution”. The research scope encompasses direct integration, function simplification, differential matching, substitution method, integration by parts, as well as the optimized application of parity properties in definite integral computation; in addition, it further explores targeted solving strategies for abstract function integrals. Through classification analysis and typical case studies, this paper intends to provide learners with a systematic and operable thinking paradigm for integral solving, thereby improving problem-solving efficiency and cultivating mathematical logical reasoning abilities.

Keywords

Indefinite Integral, Definite Integral, Classification, Problem-Solving Strategies

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

微积分学作为现代数学的基石，在自然科学、工程技术、经济管理、生命科学等诸多领域发挥着不可替代的工具性作用。积分运算与微分运算共同构成微积分的核心内容，其计算方法与技巧的熟练掌握，不仅是深入理解微积分本质的关键，更是解决实际问题的重要前提[1] [2]。

然而，在教学实践中发现，多数学习者面对形式多样的积分问题时易陷入“无从下手”的困境。究其根源，在于积分求解缺乏固定不变的运算范式——与求导运算的确定性法则不同，积分运算更依赖对函数结构的精准分析、方法的灵活适配及技巧的积累运用。因此，构建一套逻辑清晰、层次分明、实用性强的积分方法体系，对提升学习效率、强化解题能力具有重要的理论价值与实践指导意义。

本文基于积分求解的逻辑规律，从简单到复杂、从具体到抽象，系统阐述各类积分方法的基本原理、适用条件与选择策略，通过典型案例具象化方法应用场景，为学习者提供兼具系统性与操作性的学习参考[3]。

2. 积分学的历史背景

积分学历经萌芽、酝酿、创立、完善四阶段，从古代朴素思想逐步发展为严密理论体系，定积分与不定积分概念在此过程中逐步清晰统一。

萌芽期(古代)，古希腊欧多克索斯提出穷竭法，阿基米德用其求解抛物线弓形面积；中国《庄子》蕴含无穷分割思想，刘徽以割圆术逼近圆面积，东西方均从几何问题出发形成早期探索，但未建立抽象概念与系统方法。

酝酿期(15~17 世纪)，文艺复兴推动科学发展，开普勒、卡瓦列里发展分割求和与不可分量原理，费马、帕斯卡引入无穷小量优化方法；巴罗发现切线与求积的互逆关系，为微分与积分统一奠定基础。

创立期(17 世纪末)，牛顿与莱布尼茨独立完成微积分创立，明确定积分与不定积分核心概念及运算方法，奠定理论基础[1]-[3]。牛顿从运动学提出“流数术”，将积分视为累积与求导逆运算；莱布尼茨从几何定义无穷小和，创设沿用至今的积分符号，二人共同确立微积分基本定理，实现微分与积分统一，但因无穷小量定义不严格引发第二次数学危机。

完善期(19~20 世纪)，数学家弥补早期理论缺陷，使定积分与不定积分概念更严谨[4]。柯西以严格极

限重建积分基础,黎曼给出定积分严谨定义(黎曼积分),勒贝格等人提出勒贝格积分拓展适用范围。至此,积分学理论体系成熟,成为高等数学核心与多领域实用工具[3] [5]。

3. 预备知识

3.1. 积分的基本概念

不定积分本质上是微分运算的逆运算,其数学表达式为:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 $F'(x) = f(x)$ (即 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数), C 为任意常数,称为积分常数[1] [2]。

定积分则表征函数在闭区间 $[a, b]$ 上的累积效应,其值可通过牛顿-莱布尼茨公式计算:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的一个原函数[1] [2]。

3.2. 基本积分公式

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等基本初等函数的积分公式是积分运算的基础。因此,通过归纳整理得到 24 个核心基本积分公式如表 1 所示[1] [3]。

Table 1. Basic integration formulas

表 1. 基本积分公式

(1) $\int dx = x + C$	(9) $\int \sin x dx = -\cos x + C$	(17) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
(2) $\int k dx = kx + C$	(10) $\int \cos x dx = \sin x + C$	(18) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
(3) $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	(11) $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	(19) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
(4) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	(12) $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	(20) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	(13) $\int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x + C$	(21) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, a > 0$
(6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	(14) $\int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x + C$	(22) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C, a > 0$
(7) $\int e^x dx = e^x + C$	(15) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	(23) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
(8) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	(16) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	(24) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$

表 1 中所涉及公式是开展复杂积分运算的基础依据,前 20 个公式需熟练记忆,对于后 4 个公式至少需记住其推导思路以便对于复杂类型,能以不变应万变。具体而言,公式(21)和(22)的推导思路为“相邻项,裂项法”;公式(23)的推导思路为“平方和,凑反正切”;公式(24)的推导思路为“凑反正弦”。

4. 简单函数的直接积分法

当被积函数为简单函数时, 即为基本初等函数或其有限线性组合时, 可直接依托基本积分公式与积分的线性性质完成求解, 该方法称为直接积分法, 适用于结构简洁、无复合形式的函数积分[1][2]。

例 1: 计算不定积分 $\int(3x^2 + 2\sin x - e^x) dx$ 。

解: 根据基本积分公式及积分线性性质, 分项积分如下:

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C_1, \int 2\sin x dx = -2\cos x + C_2, \int e^x dx = e^x + C_3$$

合并积分常数($C = C_1 + C_2 + C_3$), 得:

$$\int(3x^2 + 2\sin x - e^x) dx = x^3 - 2\cos x - e^x + C.$$

直接积分法的核心要点在于: 准确识别被积函数的构成类型, 对复杂线性组合表达式, 需先通过积分线性性质拆分为若干简单项, 再逐一套用对应积分公式求解[3]。

5. 复杂函数的化简处理技巧

当被积函数为复杂函数时, 即当所求函数结构复杂(如含分式、高次幂、三角函数组合等)时, 直接套用基本积分公式难以奏效, 此时需将复杂函数化简为简单函数, 进而方可利用直接积分法进行求解[1][3]。

5.1. 分项拆项法

当被积函数为有理函数、多项式分式等复杂表达式时, 可将其拆分为若干简单项的代数和以降低积分难度[3], 将此种方法简记为“分项拆项法”。

例 2: 计算不定积分 $\int \frac{x^3 + 1}{x^2} dx$ 。

解: 首先对被积函数进行代数变形, 拆分为简单项之和:

$$\frac{x^3 + 1}{x^2} = x + \frac{1}{x^2}$$

再通过直接积分法分项求解:

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2} dx = \int x dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C.$$

例 3: 计算不定积分 $\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx$ 。

解: 首先基于表 1 中公式(21)“相邻项, 裂项法”的思想, 可看出所求定积分为相邻 3 项, 故对其进行裂项并分项得:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx \right)$$

进一步可得:

$$\frac{1}{3} \left(\int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx \right) = \frac{1}{3} \left[\int \frac{1}{x-1} d(x-1) - \int \frac{1}{x+2} d(x+2) \right] = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$

即:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

5.2. 构造性变形法

当被积函数为分式时，通过在被积函数中加减同一常数(函数)，乘除同一常数(函数)，构造出便于凑微分或换元的形式，是衔接基础方法与进阶技巧的关键过渡手段[3]，简记为“加点减点，乘点除点”。

例 4: 计算不定积分 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$ 。

解: 首先对分子加个 1 减个 1 后:

$$\int \frac{x^4 - 1 + 1}{1 + x^2} dx$$

再进行分项积分得:

$$\int \frac{x^4 - 1 + 1}{1 + x^2} dx = \int \frac{x^4 - 1}{1 + x^2} dx + \int \frac{1}{1 + x^2} dx$$

接着对第一个积分利用平方差公式变形即可求解得:

$$\int \frac{x^4 - 1 + 1}{1 + x^2} dx = \int \left[(x^2 - 1) + \frac{1}{1 + x^2} \right] dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C.$$

例 5: 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$ 。

解: 首先对分子进行恒等变形，加个 x^2 减个 x^2 得:

$$\int \frac{1 + x^2 - x^2}{x^2(1+x^2)} dx$$

再进行分项积分得:

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + C.$$

5.3. 三角函数的恒等变形

当被积函数为三角函数类时，常需借助三角恒等变换转化为可积形式，常用核心技巧包括:

- 1) 切割化弦: 将正切、余切、正割、余割函数统一转化为正弦、余弦函数;
- 2) 倍角公式: 如 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, 用于降幂化简;
- 3) “1”的妙用: 利用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ 等构造可积形式。

例 6: 计算不定积分 $\int \sin^2 x dx$ 。

解: 利用倍角公式降幂化简被积函数:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

分项积分得:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

5.4. 换元积分法

换元积分法通过引入新变量替换原积分变量，将复杂积分转化为简单积分，分为第一换元积分法(凑

微分法)与第二换元积分法,是积分求解的核心技巧[1][2]。

5.4.1. 第一换元积分法(凑微分法)

当被积函数可表示为 $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ 的复合结构时,可通过第一换元积分法(凑微分)将其转化为基本积分形式,积分计算完成后需注意还原,其方法核心是利用复合函数的微分性质[6]。

基本原理:若 $\int f(x)dx = F(x) + C$,且 $u = \varphi(x)$ 可导,则:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

仍然成立。即

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du \Big|_{u=\varphi(x)} = F(u) \Big|_{u=\varphi(x)} + C = F(\varphi(x)) + C$$

例 7: 计算不定积分 $\int 2xe^{x^2} dx$ 。

解: 观察到 $2x = d(x^2)$, 即 $2xdx = d(x^2)$, 令 $u = x^2$, 则 $du = 2xdx$, 原积分转化为:

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

注意: 能利用第一换元积分法(凑微分)进行求解的积分,均可利用整体的思想,从而不引入中间变量。尤其在定积分的计算中,对于此类方法能求解的题目,尽量不换元,从而不需要换积分上下限,可降低计算难度。

5.4.2. 第二换元积分法

当第被积函数含根式时,可通过第二换元积分法进行换元以消除根号,从而将积分转化为易求解形式[1][3][7],但第二换元积分法在换元消除根号时,其只对根号中 x 的最高次数是一次方和二次方有效,对 x 为三次方及以上的根式类题目失效,对于此类失效题目需采用其它方法进行求解,在此不进一步展开。对于根号中 x 的最高次数是一次方和二次方类的题目,其换元策略如下:

1) 根式换元: 令 $t = \sqrt[3]{ax+b}$ 直接消除根号;

2) 三角换元: 针对 $\sqrt{a^2-x^2}$ (令 $x = a \sin t$)、 $\sqrt{a^2+x^2}$ (令 $x = a \tan t$)、 $\sqrt{x^2-a^2}$ (令 $x = a \sec t$) 等根式形式(注: 在三角换元时,注意变量 t 的范围选取以保证去根号后结果为正值)。

例 8: 计算不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ 。

解: 采用三角换元,令 $x = a \sin t$ ($t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), 则 $dx = a \cos t dt$, 且 $\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t$, 代入原积分得:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int \frac{a \cos t}{a \cos t} dt = \int dt = t + C$$

由 $x = a \sin t$ 反解出 $t = \arcsin \frac{x}{a}$, 故:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

注意: 第二换元积分法通过换元以实现消除根号。因此,在不定积分的计算中务必要还原;在定积分的计算中务必要换积分上下限。

5.5. 奇偶函数的积分性质

当被积函数为在对称区间 $[-a, a]$ 上的定积分时,可利用被积函数的奇偶性简化计算过程,减少冗余

运算, 是定积分求解的重要优化技巧[1][4]。

奇偶函数的积分性质为:

奇函数性质: 若 $f(x)$ 为定义在 $[-a, a]$ 上的奇函数(即 $f(-x) = -f(x)$), 则:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

偶函数性质: 若 $f(x)$ 为定义在 $[-a, a]$ 上的偶函数(即 $f(-x) = f(x)$), 则:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

简记为: 奇零偶倍。

例 9: 计算定积分 $\int_{-1}^1 (x^3 + \sin x) dx$ 。

解: 易知 x^3 和 $\sin x$ 均为定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 根据奇函数积分性质:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0, \int_{-1}^1 \sin x dx = 0$$

故原积分值为:

$$\int_{-1}^1 (x^3 + \sin x) dx = 0.$$

例 10: 计算定积分 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 。

解: $\sqrt{1-x^2}$ 为定义在 $[-1, 1]$ 上的偶函数, 根据偶函数积分性质:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

结合定积分的几何意义, 可知, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 所求定积分表示圆心在原点, 半径为 1 的圆与坐标轴的第一象限围成的平面图形, 即 $\frac{1}{4}$ 圆, 其面积为: $\frac{\pi}{4}$, 则原式可得:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

5.6. 分部积分法

当被积函数为两类不同函数乘积的积分时, 可利用分部积分法进行求解, 其公式源于乘积求导法则的逆推, 是突破“乘积型”积分的核心方法[1][4]。

5.6.1. 分部积分公式

由 $(uv)' = u'v + uv'$ 移项得 $uv' = (uv)' - u'v$, 两端积分即得分部积分公式[2][3]:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

其中 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 均为可导函数, 且 $\int v du$ 需比原积分 $\int u dv$ 更易求解。

5.6.2. u 与 dv 的选择策略

合理选择 u 和 dv 是分部积分成功的关键, 有助于降低分部积分法求解函数积分难度, 结合被积函数类型进行总结得经验法则如表 2 所示[3]。

表 2 分部积分法函数选取策略可简记为: 幂乘三角凑三角; 幂乘指数凑指数; 幂乘对数凑幂; 幂乘反三角凑幂; 三角乘指数任意凑; 但两次凑需保证凑的一致。

Table 2. Strategy for selecting functions in integration by parts

表 2. 分部积分法函数选取策略

被积函数类型	设 u 为	设 dv 为	选择优点
幂函数 \times 三角函数	幂函数	三角函数的积分形式	幂函数求导后次数降低, 简化积分难度
幂函数 \times 指数函数	幂函数	指数函数的积分形式	指数函数积分后形式不变, 适配多次分部积分
幂函数 \times 对数函数	对数函数	幂函数的积分形式	对数函数求导后转化为有理函数, 便于积分
幂函数 \times 反三角函数	反三角函数	幂函数的积分形式	反三角函数求导后转化为有理函数, 降低复杂度
三角函数 \times 指数函数	任意一类函数	另一类函数的积分形式	需通过两次分部积分建立循环方程求解

例 11: 计算不定积分 $\int x \cos x dx$ 。

解: 被积函数为幂乘三角的形式, 根据表 2 分部积分法函数选取策略, 即“幂乘三角凑三角”。因此, 将 $\cos x dx$ 凑成 $d \sin x$, 代入分部积分公式得:

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

例 12: 计算不定积分 $\int e^{\sqrt{x}} dx$ 。

分析: 若直接利用分部积分法求解, 设 $u = e^{\sqrt{x}}$, $dv = dx$, 则有

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = x e^{\sqrt{x}} - \int x d e^{\sqrt{x}} = x e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$$

可见, 经过一次分部积分后, 所求被积函数由 $e^{\sqrt{x}}$ 变为 $\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}$, 变得更加复杂, 若继续按此思路做下去, 将愈加困难。因此, 本题切入点应在根号上, 结合第二换元积分法的求解思路, 首先进行第二换元消除根号, 再进行求解或可降低求解难度。

解: 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t dt$, 代入原式可得:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int t e^t dt$$

上式 $\int t e^t dt$ 中被积函数为幂乘指数的形式, 根据表 2 分部积分法函数选取策略, 即“幂乘指数凑指数”。因此, 将 $e^t dt$ 凑成 $d e^t$, 代入分部积分公式得:

$$\int t e^t dt = \int t d e^t = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + C$$

再对其进行还原可得:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2 e^{\sqrt{x}} + C.$$

6. 抽象函数的积分求解思路

当被积函数为抽象函数时, 因被积函数无具体的函数形式, 无法直接套用基本积分公式, 此时需要通过观察结合经验, 对抽象函数进行转化, 以实现抽象函数的求解。常用经验总结如下:

- 1) 结构特征分析法: 观察被积函数的复合结构、变量关系, 推测原函数可能的形式;
- 2) 分部积分试探法: 将抽象函数与已知可积函数组合, 通过分部积分建立积分方程, 间接求解;
- 3) 变量替换适配法: 引入合适的新变量, 转化抽象函数的表达形式, 简化积分结构;

- 4) 对称性与周期性利用：若积分区间对称或函数具有周期性，结合奇偶性、周期性性质简化计算；
5) 已知结论类比法：联想同类结构的具体函数积分结果，通过类比推导抽象函数的积分表达式。

例 13：已知 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，求抽象函数积分 $\int f(ax+b)dx$ ($a \neq 0$)。

解：采用变量替换法，令 $u = ax + b$ ，则 $du = adx$ ，即 $dx = \frac{1}{a}du$ ，代入原积分得：

$$\int f(ax+b)dx = \int f(u) \cdot \frac{1}{a}du = \frac{1}{a} \int f(u)du$$

由已知条件 $\int f(u)dx = F(u) + C$ ，反代回原变量得：

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

例 14：证明： $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ 。

解：通过观察：需证明等式的两端仅是由 $\sin x$ 变成了 $\cos x$ ，其它均未发生变化。联想到 $\sin x$ 和 $\cos x$ 图像之间的关系，即 $\sin x$ 和 $\cos x$ 图像一样，只是平移了 $\frac{\pi}{2}$ 个单位。因此，为将 $\sin x$ 变成 $\cos x$ ，可令 $x = \frac{\pi}{2} - t$ ，则：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]d\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt$$

进一步的，令 $t = x$ ，则命题即证，即：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

7. 结语

积分求解是一个“方法适配 - 技巧运用 - 逻辑转化”的综合过程，本文通过系统梳理与案例分析，构建了覆盖不同函数类型的积分方法体系，核心结论如下：

- 1) 直接积分法是积分求解的基础，适用于基本初等函数及其线性组合，核心在于公式的精准套用；
- 2) 函数化简技巧(分项拆项、三角恒等变形、构造性变形)是处理复杂积分的“预处理工具”，为后续方法应用奠定基础；
- 3) 换元积分法通过变量替换实现积分结构的简化，是处理复合函数、根式函数的核心手段，需熟练掌握各类换元场景的适配逻辑；
- 4) 分部积分法是解决“乘积型”积分的关键，其核心在于遵循“降次、化简、有理化”的原则选择 u 与 dv ；
- 5) 奇偶性在对称区间定积分中的应用的可大幅降低计算量，是定积分求解的重要优化策略；
- 6) 抽象函数积分需结合经验，进行结构分析、方法试探与类比推理，灵活运用各类基础方法，突破“形式未知”的限制。

掌握各类积分方法的内在逻辑与适用边界，不仅能有效提升解题效率，更能深化对积分本质的理解，为后续微分方程、多元函数积分学等高等数学核心内容的学习奠定坚实基础。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学(第八版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.

- [2] 华东师范大学数学系. 数学分析(第五版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [3] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [4] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [5] Hass, J., Hell, C. and Weir, M.D. (2022) Thomas' Calculus. 14th Edition. Higher Education Press.
- [6] 崔轩诚, 杨荣奎. 不定积分的计算方法总结[J]. 成才, 2024(13): 99-101.
- [7] 顾燕. 被积函数中含根号的几种不定积分的计算[J]. 理科爱好者, 2022(6): 1-5.